VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



ВОЛЬФГАНГ ПАУЛИ

ТРУДЫ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

под редакцией

Я. А. СМОРОДИНСКОГО



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1977

ВОЛЬФГАНГ ПАУЛИ

ТРУДЫ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

СТАТЬИ 1928—1958



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1977

УДК 530.145

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

|*А. П. Виноградов*| (председатель), *Б. Н. Делоне*, *Н. М. Жаворонков*, *А. А. Имшенецкий*, *С. П. Капица*, *Б. М. Кедров*, *А. Н. Колмогоров*, *Б. В. Кукаркин*, *С. Р. Микулинский*, *Ф. А. Петровский*, *Л. С. Полак*, *Я. А. Смородинский*, *Н. А. Фигуровский*, |*А. Н. Фрумкин*|, *Р. В. Хохлов*, *И. И. Шафрановский*, *А. Л. Яншин*

Труды по квантовой теории. Статьи 1928—1958. В. Паули. М., «Наука», 1977, 696 с.

Книга содержит основные статьи В. Паули по проблемам релятивистской квантовой механики, квантовой электродинамики, мезонной теории, теории симметрии элементарных частиц. Развитые в них идеи оказали глубокое влияние на формирование современных представлений о физических полях. Большинство статей публикуется на русском языке впервые.

В книге приводится краткий очерк жизни и деятельности Паули, библиография его трудов.

Издание рассчитано на читателей, интересующихся проблемами теоретической физики и историей современной науки.

Илл. 4. Табл. 11. Библ. 142 назв.

П $\frac{20402\text{-}029}{055\,(02)\text{-}77}$ 23-76

© Издательство «Наука», 1977 г., составление, предисловие, очерк научной деятельности В. Паули

ОТ РЕДАКЦИИ

Настоящая книга завершает первую публикацию на русском языке избранных трудов Вольфганга Паули по квантовой теории [1]. В ней собраны статьи, написанные Паули в 1928—1958 гг.

В своем творчестве Паули с необычайной синхронностью отзывался на все новые идеи квантовой теории. Он обладал даром правильной оценки этих идей, и в его руках они часто обретали новую силу. Поэтому статьи Паули отражают целый этап развития современной квантовой теории: от ее зарождения до начала развития теории квантовых полей. В этом смысле работами Паули завершается важный период истории физики XX в.

При отборе работ мы стремились отразить именно эту роль Паули, собрать его основные научные результаты, стараясь, однако, обойтись по возможности без повторений. Так, мы пожертвовали лекциями Паули по мезонной теории: они уже издавались на русском языке [2]. Вне рамок нашего издания осталось девять небольших томов записей лекций Паули по разным вопросам теоретической физики. Почти все статьи, не вошедшие в наше издание, легко доступны, так как они печатались в распространенных журналах. Статьи Паули, посвященные общим вопросам физики и истории науки, были опубликованы на русском языке отдельно [3].

При подготовке к изданию этих статей, как и работ, вошедших в первую книгу, было использовано двухтомное собрание, опубликованное В. Вайскопфом и Р. Кронигом в 1964 г. [4]

---

[1] Первая книга избранных трудов по квантовой теории вышла в серии «Классики науки» в 1975 г.: *В. Паули.* Труды по квантовой теории (Квантовая теория. Общие принципы волновой механики. Статьи 1920—1928). М., «Наука», 1975.

[2] *В. Паули.* Мезонная теория ядерных сил. М., ИЛ, 1947.

[3] *В. Паули.* Физические очерки. М., «Наука», 1975.

[4] Collected Scientific Papers by W. Pauli, in two Volumes. Ed. by R. Kronig and V. Weisskopf. N. Y.— London — Sydney, Intersc. Publish., 1964.

В конце книги помещен полный список научных трудов Паули с указанием работ, вышедших в русском переводе. Кроме того, в приложении помещен очерк научной деятельности Паули.

Редакция благодарит Ф. Паули, приславшую большую коллекцию фотографий, часть которых опубликована в обеих книгах нашего издания.

Перевод статей Паули выполнен Ю. А. Даниловым и А. А. Сазыкиным.

К КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ *

(Совместно с П. Иорданом)

В развитие теории Дирака, в которой электродинамические полевые величины рассматриваются как неперестановочные числа (q-числа), ниже выводятся, по крайней мере для частного случая, когда заряженные частицы отсутствуют (свободное поле излучения), перестановочные соотношения для полевых величин, имеющие *релятивистски-инвариантный* вид. Показывается, что эти соотношения можно сформулировать и не прибегая к фурье-разложению поля. Далее указывается общий математический метод, позволяющий соотношениям между q-числами (q-функциям), непрерывно зависящим от пространственно-временных координат, сопоставлять соотношения между соответственно выбранными операторами, применяемыми к обобщенным, зависящим от всей конфигурации поля ψ-функциям (функционалам).

Как известно, Дирак [1] прежде всего сумел применить квантовомеханические методы к самому электромагнитному полю, рассматривая амплитуды парциальных волн поля как «q-числа» и составляя для них перестановочные соотношения. Конечно, то обстоятельство, что этим способом можно достичь существенных успехов, должно было бы выясниться сразу же после того, как при аналогичном рассмотрении более простой проблемы скалярного (одномерного) волнового уравнения [2] благодаря применению квантовомеханических методов к собственным колебаниям поля была преодолена обнаруженная Эйнштейном трудность подсчета флуктуаций энергии волнового поля. Однако в действительности последовательная теория испускания, поглощения и дисперсии излучения была создана Дираком. Вслед за этим Иордан [3] распространил предложенные Дираком методы квантования волновых полей на случай волн материи, соответствующих статистике Ферми, а в еще более поздней работе Иордана и Клейна [4] наметились также перспективы для работы над пока еще не разрешенной проблемой квантовой теории взаимодействия частиц с учетом конечной скорости распространения силового воздействия; и электростатическое, и электромагнитное поле излучения в такой теории можно было бы рассматривать единым методом.

---

* *Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder.* (Mit P. Jordan).— Z. Phys., 1928, **47**, 151—173.

[1] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc. London, 1927, **A114**, 243, 710.

[2] *M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan.* Z. Phys., 1926, **35**, 557.

[3] *P. Jordan.* Z. Phys., 1927, **44**, 473. *Добавление при корректуре*: Ср. также *P. Jordan, E. Wigner.* В печати (Z. Phys., 1928, **47**, 630.— *Ред.*).

[4] *P. Jordan, O. Klein.* Z. Phys., 1927, **45**, 751.

Однако целью этой работы является не эта более общая проблема взаимодействия, а всего лишь попытка устранить тот недостаток теории, сформулированной в названных выше работах, на который всегда обращали внимание и сами их авторы. Именно, в этих работах временна́я координата всегда занимает своеобразное выделенное положение по отношению к пространственным координатам и результаты оказываются релятивистски-неинвариантными. Напротив, в настоящей работе для квантования электромагнитного поля применяются *релятивистски-инвариантные* методы.

Вначале, в § 1, еще предполагается, что напряженности электромагнитного поля разлагаются по Фурье на поляризованные монохроматические парциальные волны, амплитуды которых, являясь «q-числами», удовлетворяют некоторым перестановочным соотношениям. Эти соотношения удается сформулировать так, что они не выделяют какой-либо привилегированной системы отсчета в смысле специальной теории относительности, причем в то же время флуктуационные свойства энергии излучения описываются теорией правильно, в соответствии с упомянутыми выше результатами предыдущих работ. Однако этот подход можно заменить более общим [5], когда разложение Фурье в явном виде не применяется, а сами напряженности поля представляются как континуум q-чисел, непрерывно зависящих от пространственно-временны́х координат. Такие совокупности q-чисел мы будем называть кратко «q-функциями». Эта более общая точка зрения проводится в § 2—4 при постоянном сохранении релятивистской инвариантности. Следует отметить, что это рассмотрение можно также полностью перенести на случай материальных волн свободно движущихся частиц, причем для тождественных частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, оно позволяет провести релятивистски-инвариантное квантование этих волн. Но так как в другом случае частиц, подчиняющихся статистике Ферми, вопрос о квантовании материальных волн остается пока не вполне ясным [6], в настоящей работе эти проблемы не рассматриваются. Правда, можно надеяться, что в еще не существующей общей релятивистской квантовой теории волновых полей, в которой, с одной стороны, будут рассматриваться также электромагнитные поля, соответствующие наличию заряженных частиц, и, с другой стороны, будут учитываться взаимодействия материальных волн с электромагнитными, полученные ниже перестановочные соотношения для свободного электромагнитного поля излучения и для материальных волн свободных частиц будут содержаться в качестве предельных частных случаев.

Во второй части этой работы рассматривается вопрос, каким образом можно интерпретировать q-функции как операторы, применяемые к некоторым «амплитудам вероятности» ψ. Ведь в обычной квантовой

Ср. также *P. Jordan*. Z. Phys., 1927, 45, 766.

Примечание при корректуре: См. упомянутую выше работу Иордана и Вигнера.

механике, как известно, от соотношений

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

и закона сохранения энергии

$$H(p, q) = E,$$

первоначально рассматриваемых как соотношения между q-числами, переходят к дифференциальному уравнению для функции $\psi_E(q)$, заменяя p оператором $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$, q — оператором умножения на q и записывая затем $H(p, q)$ в виде оператора, применяемого к ψ:

$$H\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}, q\right)\psi_E(q) = E\psi_E(q).$$

В случае гармонического осциллятора, где

$$H(p, q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m}{2}(2\pi\nu_0)^2 q^2,$$

соответствующее дифференциальное уравнение для ψ приводит, как показал Шредингер, к собственным значениям

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})h\nu_0 \quad \text{при} \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

и к собственным ψ-функциям, имеющим вид так называемых полиномов Эрмита; в частности, для $n = 0$

$$\psi_0(q) = C\exp\left(-\frac{2\pi^2 m\nu_0}{h}q^2\right).$$

Но это приводит к трудностям, если, как в случае собственных колебаний излучения в полости, речь идет о *бесконечно большом* числе осцилляторов (соответствующем бесконечно большому числу степеней свободы излучения). Во-первых, полная плотность энергии излучения должна была бы стать бесконечно большой, потому что (в предельном случае очень большой полости) даже для $n = 0$ излучение с частотой между ν и $\nu + d\nu$ давало бы в нее вклад

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{2}d\nu.$$

Во-вторых, даже тогда, когда возбуждается лишь конечное число собственных колебаний, произведение бесконечно большого числа собственных колебаний в общем случае не сходится и ψ-функция бесконечно большого числа амплитуд осцилляторов q_k не обладает каким-либо определенным значением.

Различные соображения свидетельствуют, по-видимому, о том, что в случае собственных колебаний излучения, в противоположность собственным колебаниям кристаллической решетки (где как теория, так и

опыт говорят в пользу существования нулевой энергии), эта «нулевая энергия», равная $h\nu/2$ на каждую степень свободы, не обладает физической реальностью. Действительно, так как в этом случае мы должны иметь дело со строго гармоническими осцилляторами и так как «нулевое излучение» не может ни поглощаться, ни рассеиваться или отражаться, то, по-видимому, не существует никакой возможности наблюдать ни «нулевое излучение», ни его энергию и массу. Поэтому, вероятно, более простым и более удовлетворительным будет предположение, что в электромагнитном поле такого нулевого излучения вообще не существует.

В этой связи, может быть, интересно заметить, что для отдельного гармонического осциллятора этой идее можно придать также математическую формулировку. Действительно, вводя вместо p и q величины

$$P = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_0 m}}\, p - i\sqrt{\pi\nu_0 m}\, q,$$

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_0 m}}\, p + i\sqrt{\pi\nu_0 m}\, q,$$

мы получаем из

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

соотношение

$$PQ - QP = i\,(pq - qp) = \frac{h}{2\pi}$$

и далее

$$\frac{1}{2m}\, p^2 + \frac{m}{2}(2\pi\nu_0)^2 q^2 = 2\pi\nu_0 \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_0 m}}\, p + i\sqrt{\pi\nu_0 m}\, q\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_0 m}}\, p - i\sqrt{\pi\nu_0 m}\, q\right) + \pi\nu_0 i\,(pq - qp) = 2\pi\nu_0 QP + \frac{h\nu_0}{2}\,.$$

Таким образом, вводя новую функцию Гамильтона

$$H'(P,\ Q) \equiv 2\pi\nu_0 QP = E,$$

где

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi}\,,$$

мы приходим к собственным значениям

$$E_n = nh\nu_0$$

без нулевой энергии. Можно также получить собственные функции $\psi_E\,(Q)$, причем переменная Q будет, конечно, комплексной величиной. Можно надеяться, что этим путем когда-нибудь будут преодолены трудности, связанные с расходимостью нулевой энергии.

Во второй части настоящей работы, однако, указывается метод определения ψ-функций поля и операций с ними, удовлетворяющих наперед заданным соотношениям между q-функциями, причем явного применения фурье-разложения поля не требуется. К сожалению, нам не удалось провести и при этом условии удовлетворительное исключение нулевой энергии, аналогичное приведенному выше рассмотрению отдельного осциллятора. Поэтому результаты второй части работы в большой мере требуют улучшения и дополнения и приводятся здесь скорее ради общих математических методов, примененных там, а не ради полученных при этом конкретных соотношений.

I. МЕТОД q-ФУНКЦИЙ И q-ЧИСЕЛ

§ 1. Фурье-разложение поля; релятивистски-инвариантные перестановочные соотношения для амплитуд собственных колебаний

Представим себе поле электромагнитного излучения, разложенное на плоские монохроматические парциальные волны; при этом мы будем иметь в виду бегущие волны, не удовлетворяющие никаким особым граничным условиям, которые соответствовали бы чему-то вроде непрозрачных стенок полости. Однако целесообразно вместо интегралов Фурье сначала применять ряды Фурье. Пусть символ $\mathfrak{k}_s$ означает волновой вектор плоской парциальной волны (вектор, направленный по нормали к волне и по величине равный волновому числу), $|\mathfrak{k}_s| = k_s$ — его абсолютную величину, ν_s — его частоту, так что справедливы соотношения:

$$k_s = \frac{\nu_s}{c}, \qquad \mathfrak{k}_s^2 = \frac{\nu_s^2}{c^2}. \tag{1}$$

Пусть индекс s отвечает только разным собственным частотам, а волновые векторы $\mathfrak{k}_s$, входящие в ряд Фурье для поля, сначала распределены в пространстве $(\mathfrak{k}_x, \mathfrak{k}_y, \mathfrak{k}_z)$ — кратко, в «$\mathfrak{k}$-пространстве» — с плотностью, соответствующей собственным колебаниям кубической полости с ребром L (объемом L^3). Другими словами, мы предполагаем, что средний объем ячейки $\mathfrak{k}$-пространства, приходящийся (с точностью до поляризационного множителя, который будет рассмотрен позже) на одну парциальную волну ряда Фурье, дается равенством

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{1}{L^3}. \tag{2}$$

Тогда напряженности поля $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ складываются из напряженностей поля $\mathfrak{E}_s$ и $\mathfrak{H}_s$ отдельного собственного колебания, отвечающего монохроматической волне:

$$\mathfrak{E} = \sum_s \mathfrak{E}_s, \qquad \mathfrak{H} = \sum_s \mathfrak{H}_s.$$

Теперь мы должны еще учесть, что для каждого $\mathfrak{k}_s$ возможны *две* независимые линейно-поляризованные волны, в которых направления колебаний перпендикулярны $\mathfrak{k}_s$.

Для того чтобы перевести это на язык формул, введем для каждого s ортогональную систему координат (ξ, η, ζ), у которой ось ζ направлена параллельно $\mathfrak{k}_s$; пусть $\mathfrak{e}_\xi^{(s)}$, $\mathfrak{e}_\eta^{(s)}$, $\mathfrak{e}_\zeta^{(s)}$ — единичные векторы, направленные по осям ξ, η, ζ. Амплитуда $a_s^{(1)}$ электрического поля одного линейно-поляризованного собственного колебания (отмеченная индексом 1) пусть направлена параллельно оси ξ, амплитуда второго (отмеченная индексом 2) — параллельно оси η. Если еще вынести за скобки по причине, которая будет объяснена ниже, множитель $\sqrt{\nu_s/L^3}$, то получим:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_s &= \sqrt{\frac{\nu_s}{L^3}}\{(\mathfrak{e}_\xi^{(s)}a_s^{(1)} + \mathfrak{e}_\eta^{(s)}a_s^{(2)})\cos 2\pi\,[(\mathfrak{k}_s\mathfrak{r}) - |\mathfrak{k}_s|\,ct] + (\mathfrak{e}_\xi^{(s)}b_s^{(1)} + \mathfrak{e}_\eta^{(s)}b_s^{2}) \times \\ &\qquad\times \sin 2\pi\,[(\mathfrak{k}_s\mathfrak{r}) - |\mathfrak{k}_s'|\,ct]\}, \\ \mathfrak{H}_s &= [\mathfrak{e}_\zeta^{(s)}\mathfrak{E}_s] = \sqrt{\frac{\nu_s}{L^3}}\{(\mathfrak{e}_\eta^{(s)}a_s^{(1)} - \mathfrak{e}_\xi^{(s)}a_s^{(2)})\cos 2\pi\,[(\mathfrak{k}_s\mathfrak{r}) - |\mathfrak{k}_s|\,ct] + \\ &\qquad + (\mathfrak{e}_\eta^{(s)}b_s^{(1)} - \mathfrak{e}_\xi^{(s)}b_s^{2})\sin 2\pi\,[(\mathfrak{k}_s\mathfrak{r}) - |\mathfrak{k}_s|\,ct]\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Множитель $\sqrt{\nu_s/L^3}$ в (3) выбран так, что полная энергия полости

$$E_s = \frac{1}{2}\int (\mathfrak{E}_s^2 + \mathfrak{H}_s^2)\,dV$$

для одной линейно-поляризованной парциальной волны оказывается равной

$$E_s = \frac{1}{2}\nu_s(a_s^2 + b_s^2), \tag{4}$$

где вместо a_s и b_s следует подставлять либо $a_s^{(1)}$, $b_s^{(1)}$, либо $a_s^{(2)}$, $b_s^{(2)}$. (Напряженности поля при этом измеряются в единицах Хевисайда.)

Так как энергия E_s (если не учитывать нулевую энергию) должна быть кратной величине $h\nu_s$, т. е. выражение

$$\frac{1}{2}(a_s^2 + b_s^2)$$

(во всяком случае с точностью до аддитивной постоянной) должно принимать характеристические значения $N_s = 0, 1, 2, \ldots$, то представляется естественным положить

$$a_s^{(1)}b_s^{(1)} - b_s^{(1)}a_s^{(1)} = a_s^{(2)}b_s^{(2)} - b_s^{(2)}a_s^{(2)} = ih, \tag{I}$$

причем, конечно, a_s и $b_{s'}$ для $s \neq s'$, а также различные a_s или различные b_s коммутируют друг с другом. Естественно также предполагать, что амплитуды, соответствующие различным направлениям поляризации, коммутируют:

$$\begin{aligned}a_s^{(1)}a_s^{(2)} - a_s^{(2)}a_s^{(1)} &= 0, \qquad b_s^{(1)}b_s^{(2)} - b_s^{(2)}b_s^{(1)} = 0, \\ a_s^{(1)}b_s^{(2)} - b_s^{(2)}a_s^{(1)} &= 0, \qquad a_s^{(2)}b_s^{(1)} - b_s^{(1)}a_s^{(2)} = 0.\end{aligned} \tag{I'}$$

Легко видеть, что перестановочные соотношения (сокращенно п.с.) (I) и (I′) не зависят от выбора единичных векторов $\mathfrak{e}_\xi^{(s)}$, $\mathfrak{e}_\eta^{(s)}$, если только эти векторы будут перпендикулярны друг другу и $\mathfrak{k}_s$. Аналогично можно доказать инвариантность соотношений (I) и (I′) при переносе начала координат, выделенного при разложении поля в ряд Фурье (3). Действительно, при изменении начала координат величины a_s и b_s преобразуются для каждого направления поляризации линейно и ортогонально по формулам:

$$a_s' = a_s \cos \delta_s + b_s \sin \delta_s,$$

$$b_s' = -a_s \sin \delta_s + b_s \cos \delta_s.$$

Отсюда действительно следует

$$a_s' b_s' - b_s' a_s' = a_s b_s - b_s a_s. \tag{5}$$

Учитывая еще, что это соотношение зависит не от точных значений векторов $\mathfrak{k}_s$, а только от их плотности (2) в $\mathfrak{k}$-пространстве, и принимая во внимание соотношения (1), мы видим, что п.с. (I) удовлетворяют требованию *релятивистской инвариантности.*

Это становится особенно ясно, если совершить *предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье.* Тогда для каждой поляризации [опуская для простоты индекс (1) или (2)] мы получаем равенство

$$\sum_s a_s^2 \frac{1}{L^3} = \sum_s a_s^2 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \to \int A^2(k_x, k_y, k_z)\, dk_x dk_y dk_z$$

и аналогичное равенство для $\sum_s b_s^2 \frac{1}{L^3}$. Далее, при определении $E(k_x, k_y, k_z) = E(\mathfrak{k})$ имеем:

$$\sum_s E_s' \frac{1}{L^3} = \sum_s \frac{1}{L^3} \frac{1}{2} \int (\mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2)\, dV \to \int E(\mathfrak{k})\, dk_x dk_y dk_z,$$

$$E(\mathfrak{k}) = \frac{1}{2} \nu(\mathfrak{k}) [A^2(\mathfrak{k}) + B^2(\mathfrak{k})]. \tag{6}$$

Вычисляя сумму по всем собственным колебаниям с векторами $\mathfrak{k}_s$ в некоторой области $\Omega_1(\mathfrak{k})$ $\mathfrak{k}$-пространства, а также аналогичную сумму с векторами $\mathfrak{k}_s$ в некоторой другой области $\Omega_2(\mathfrak{k})$ и обозначая через $\Omega_{12}(\mathfrak{k})$ величину объема *общей* части областей Ω_1 и Ω_2 в $\mathfrak{k}$-пространстве, находим

$$\frac{1}{ih} \frac{1}{L^3} \Big(\sum_{\mathfrak{k}_s \text{ в } \Omega_1(\mathfrak{k})} a_s \sum_{\mathfrak{k}_s \text{ в } \Omega_2(\mathfrak{k})} b_s - \sum_{\mathfrak{k}_s \text{ в } \Omega_2(\mathfrak{k})} b_s \sum_{\mathfrak{k}_s \text{ в } \Omega_1(\mathfrak{k})} a_s \Big) = \Omega_{12}(\mathfrak{k}).$$

Это равенство получается потому, что значение левой части равно деленному на L^3 числу общих для обеих сумм собственных колебаний, совпадающему с $\Omega_{12}(\mathfrak{k})$ в соответствии с формулой (2). К тому же суммы в левой

части в пределе переходят в соответствующие интегралы от $A(\mathfrak{k})$ и $B(\mathfrak{k})$, так что можно написать

$$\int_{\Omega_1} A(\mathfrak{k})\, dk_x dk_y dk_z \int_{\Omega} B(\mathfrak{k})\, dk_x dk_y dk_z - \\ - \int_{\Omega_2} B(\mathfrak{k})\, dk_x dk_y dk_z \int_{\Omega_1} A(\mathfrak{k})\, dk_x dk_y dk_z = ih\Omega_{12}, \qquad (7)$$

или, вводя δ-функцию Дирака, подробнее рассматриваемую в следующем параграфе,

$$A(\mathfrak{k})B(\mathfrak{k}') - B(\mathfrak{k}')A(\mathfrak{k}) = ih\delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}'). \qquad (8)$$

Более важным, чем предельный переход от рядов Фурье к интегралам Фурье, оказывается отказ от всякого разложения Фурье для поля и непосредственное представление поля в виде континуума q-чисел (q-функций). Для этого необходимо определить новую, релятивистски-инвариантную δ-функцию, что и будет сделано в следующих параграфах.

§ 2. Определение и смысл релятивистски-инвариантной Δ-функции

Обычная δ-функция Дирака от одной переменной x определяется равенством

$$\int_a^b \delta(x)\, dx = \begin{cases} 1, \text{ если } (a, b) \text{ содержит точку } x = 0; \\ 0 \text{ в противоположном случае.} \end{cases} \qquad (9)$$

Тогда справедлива также формула

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x)\, dx = \begin{cases} f(0), \text{ если } (a, b) \text{ содержит точку } x = 0; \\ 0 \text{ в противоположном случае.} \end{cases} \qquad (10)$$

Под «функцией» $\delta(x)$ можно понимать *сокращенно записанную последовательность* функций $\delta_1(x)$, $\delta_2(x)$, . . ., $\delta_N(x)$. . ., для которой существует предел $\lim\limits_{N\to\infty} \int_a^b \delta_N(x)\, dx$, имеющий указанное выше значение. Точно таким же образом выражение

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x)\, dx \ \textit{означает}\ \lim_{N\to\infty} \int_a^b f(x)\,\delta_N(x)\, dx.$$

В качестве такой последовательности функций можно взять, например,

$$\delta_N(x) = \frac{\sin 2\pi Nx}{\pi x} = 2\int_0^N \cos 2\pi kx\, dk, \qquad (11)$$

так как тогда

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b f(x)\,\delta_N(x)\,dx = \int_{a_\infty}^{b_\infty} f\left(\frac{y}{2\pi N}\right)\frac{\sin y}{\pi y}\,dy = \begin{cases} f(0), & \text{если } a<0, \quad b>0; \\ 0, & \text{если } a>0, \quad b>0. \end{cases}$$

Разумеется, формула (11) определяет, далеко не единственно возможным образом, последовательность функций $\delta_N(x)$, удовлетворяющих соотношению (10) в пределе $N\to\infty$.

В следующих параграфах мы будем встречаться с последовательностью функций $\Delta_N(x, y, z, t)$, определенных равенством

$$\Delta_N(x, y, z, ct) = \iiint\limits_{\substack{\text{сфера}\\ \mathfrak{k}<N}} \frac{2}{|\mathfrak{k}|}\sin 2\pi\,(k_x x + k_y y + k_z z - |\mathfrak{k}|\,ct)\,dk_x dk_y dk_z$$

$$\left(|k| = \sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}\right). \tag{12}$$

Существенной здесь является связь коэффициента при t с коэффициентами при x, y, z, которая показывает, что все парциальные волны в выражении (12) распространяются со скоростью света c. Впрочем, функция $\Delta_N(x, y, z, t)$ при фиксированном начале координат релятивистски-инвариантна, поскольку, как легко убедиться, в случае, когда величины

$$k_x,\ k_y,\ k_z,\ i\,|k|$$

образуют компоненты 4-вектора нулевой длины, выражение

$$\frac{1}{|k|}\,dk_x dk_y dk_z$$

инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Последовательность $\Delta_N(\ldots)$ мы будем характеризовать Δ-функцией, переходя к пределу

$$\lim_{N\to\infty}\int_{V_4} f(x, y, z, t)\,\Delta_N(x, \ldots, t)\,dV_4,$$

где интегрирование производится по некоторой четырехмерной области, причем

$$dV_4 = dx\,dy\,dz\,c\,dt.$$

Этот предел мы будем опять записывать символически в виде

$$\int f(x,\ y,\ z,\ t)\ \Delta\,(x,\ y,\ z,\ t)\ dV_4.$$

Все последовательности Δ_N, для которых этот предел один и тот же при любых f, мы будем считать различающимися несущественно, независимо от того, имеет ли последовательность Δ_N специальную форму (12).

Теперь не составляет никакого затруднения найти предел последовательности этого специального вида Δ_N. Сначала вычислим интеграл

в (12). Вводя в $\mathfrak{k}$-пространстве полярные координаты, $\sphericalangle(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}) = \vartheta$, $\cos\vartheta = u$ и

$$dk_x dk_y dk_z = 2\pi \mid k \mid^2 d \mid k \mid du,$$

получаем

$$\Delta_N(x \ldots t) = 4\pi \int\limits_0^N \mid k \mid d \mid k \mid \int\limits_{-1}^{+1} \sin 2\pi \mid k \mid (ru - ct)\, du,$$

$$\Delta_N(x \ldots t) = 2 \int\limits_0^N d \mid k \mid \frac{1}{r} [\cos 2\pi \mid k \mid (r + ct) - \cos 2\pi \mid k \mid (r - ct)]$$

$$(r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

или, наконец,

$$\Delta_N(x \ldots t) = \frac{1}{\pi r}\left[\frac{\sin 2\pi N (r + ct)}{r + ct} - \frac{\sin 2\pi N (r - ct)}{r - ct}\right]. \qquad (12')$$

(Заметим, что функции Δ_N остаются конечными при $t \neq 0$, $r = 0$, поскольку в скобках стоит знак разности.)

В полной аналогии со свойствами функции $\delta_N(x)$, определенной в начале этого параграфа, мы можем вычислить теперь также предел $\lim\limits_{N \to \infty} \int f(\ldots)\Delta_N dV_4$. Пусть V_4 — область интегрирования; V_3^+ — ее трехмерное пересечение со «световым конусом» $r + ct = 0$; V_3^- — ее пересечение со световым конусом $r - ct = 0$. Тогда

$$\int\limits_{V_4} f(x \ldots t)\, \Delta(x \ldots t)\, dV_4 = \int\limits_{V_3^+} f(x, y, z, ct = -r) \frac{1}{r}\, dxdydz -$$
$$- \int\limits_{V_3^-} f(x, y, z, ct = r) \frac{1}{r}\, dxdydz. \qquad (II)$$

Это уравнение теперь надо рассматривать так же, как определение релятивистски-инвариантной (учитывая инвариантность $\frac{dxdydz}{r}$) Δ-функции, независимое от ее реализации в виде последовательности (12). Полагая в соотношении (II) $f = 1$, получаем значение $\int\limits_{V_4} \Delta dV_4$:

$$\int\limits_{V_4} \Delta dV_4 = \int\limits_{V_3^+} \frac{dxdydz}{r} - \int\limits_{V_3^-} \frac{dxdydz}{r}. \qquad (II')$$

Основываясь на формуле (12), мы можем дать наглядное объяснение: введенная здесь Δ-функция представляет собой пространственно-изотропную, в пределе сконцентрированную в бесконечно тонком слое $r = ct$ сферическую волну, сначала сходящуюся, чтобы при $t = 0$ прибыть в начало координат $r = 0$, после чего снова расходящуюся со скоростью

света. Кроме того, она обладает свойством

$$\Delta(-x, -y, -z, -t) = -\Delta(x, y, z, t). \qquad (13)$$

Заметим еще, что производные Δ-функции определяются пределом

$$\int\limits_{V_4} f \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} dV_4 \equiv \lim_{N\to\infty} \int\limits_{V_4} f \frac{\partial \Delta_N}{\partial x_i} dV_4 = \lim_{N\to\infty} - \int \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_N dV_4 =$$

$$= \int\limits_{V_3^+} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \frac{dxdydz}{r} - \int\limits_{V_3^-} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \frac{dxdydz}{r}.$$

При этом предполагается, что функция f на границе области интегрирования обращается в нуль. Аналогично можно определить и частные производные более высокого порядка. Следует еще заметить, что в соответствии с этим определением выполняется условие

$$\sum_{a=1}^{4} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_a^2} \equiv 0. \qquad (14)$$

§ 3. Перестановочные соотношения для рассматриваемых в качестве q-функций напряженностей электромагнитного поля без введения разложения Фурье

Попытаемся теперь найти значения перестановок каких-нибудь компонент напряженности электромагнитного поля в двух различных точках пространства-времени, сохраняя релятивистскую инвариантность, но не вводя в конечный результат явно разложения Фурье для поля. Таким образом, речь идет о вычислении выражений

$$\mathfrak{E}_i(P)\mathfrak{E}_k(P') - \mathfrak{E}_k(P')\mathfrak{E}_i(P), \qquad \mathfrak{H}_i(P)\mathfrak{H}_k(P') - \mathfrak{H}_k(P')\mathfrak{H}_i(P),$$
$$\mathfrak{E}_i(P)\mathfrak{H}_k(P') - \mathfrak{H}_k(P')\mathfrak{E}_i(P),$$

причем символами P и P' сокращенно обозначаются четыре координаты x, y, z, t точки P и x', y', z', t' точки P', а индексами $i, k = 1, 2, 3$ — компоненты в направлениях x, y, z. Мы будем записывать эти выражения также с помощью квадратных скобок

$$[\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')], \qquad [\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')], \qquad [\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')].$$

В этих вычислениях будем исходить из выражений (3) для напряженностей поля:

$$\mathfrak{E}'_s = \sqrt{\frac{\nu_s}{L^3}} \{(\mathfrak{e}_\xi a_s^{(1)} + \mathfrak{e}_\eta a_s^{(2)}) \cos 2\pi[(\mathfrak{k}_s\mathfrak{r}) - |\mathfrak{k}_s| ct] + (\mathfrak{e}_\xi b_s^{(1)} + \mathfrak{e}_\eta b_s^{(2)}) \times$$
$$\times \sin 2\pi[(\mathfrak{k}_s\mathfrak{r}) - |\mathfrak{k}_s| ct]\},$$

$$\mathfrak{H}_s = \sqrt{\frac{\nu_s}{L^3}}\{(\mathfrak{e}_\eta a_s^{(1)} - \mathfrak{e}_\xi a_s^{(2)}) \cos 2\pi\,[(\mathfrak{k}_s\mathfrak{r}) - |\mathfrak{k}_s|\,ct] + (\mathfrak{e}_\eta b_s^{(1)} - \mathfrak{e}_\xi b_s^{(2)}) \sin 2\pi\,[(\mathfrak{k}_s\mathfrak{r}) - |\mathfrak{k}_s|\,ct]\}.$$

Для каждой пары величин $a_s^{(1)}$, $b_s^{(1)}$ и $a_s^{(2)}$, $b_s^{(2)}$ по отдельности выполняются соотношения (I), тогда как величины $a_s^{(1)}$ коммутируют с $b_s^{(2)}$, $a_s^{(2)}$ — с $b_s^{(1)}$ в соответствии с соотношениями (I′). Теперь мы используем соотношения вида:

$$(\mathfrak{e}_\xi)_i(\mathfrak{e}_\xi)_k + (\mathfrak{e}_\eta)_i(\mathfrak{e}_\eta)_k = \delta_{ik} - (\mathfrak{e}_\zeta)_i(\mathfrak{e}_\zeta)_k$$

$$(i,\ k = x,\ y,\ z;\ \delta_{ik} = 0 \text{ для } i \neq k,\ \delta_{ik} = 1 \text{ для } i = k),$$

$$(\mathfrak{e}_\xi)_i(\mathfrak{e}_\eta)_k - (\mathfrak{e}_\eta)_k(\mathfrak{e}_\xi)_i = (\mathfrak{e}_\xi)_l = \frac{(\mathfrak{k}_s)_l}{|\mathfrak{k}_s|}$$

(i, k, l — четная перестановка 1, 2, 3).

В этих соотношениях учитывается также, что ось ζ параллельна $(\mathfrak{k}_s)$. Следовательно, полагая при заданных значениях индексов

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} = |\mathfrak{k}_s|^2\,\delta_{ik} - (\mathfrak{k})_i(\mathfrak{k})_k,$$

$$\beta_{ik} = -\beta_{ki} = |\mathfrak{k}_s|\cdot(\mathfrak{k}_s)_l\ (\beta_{ik} = 0 \text{ при } i = k) \tag{15}$$

и далее

$$(P_s) = 2\pi\,[(\mathfrak{k}_s\mathfrak{r}) - |\mathfrak{k}_s|\,ct], \qquad (P_s') = 2\pi\,[(\mathfrak{k}_s'\mathfrak{r}') - |\mathfrak{k}_s|\,ct'],$$

мы получаем в соответствии с формулами (I)

$$[\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')] = [\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')] = ihc\frac{1}{L^3}\sum_s \overline{|\mathfrak{k}_s|}\,\alpha_{ik}^{(s)}\,[\cos(P_s)\sin(P_s') - \sin(P_s)\cos(P_s')] = ihc\,\frac{1}{L^3}\sum_s \overline{|\mathfrak{k}_s|}\,\alpha_{ik}^{(s)}\sin(P_s' - P_s),$$

а также

$$[\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')] = -[\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')] = ihc\,\frac{1}{L^3}\sum_s \frac{2}{|\mathfrak{k}_s|}\beta_{ik}^{(s)}\sin(P_s' - P_s).$$

[Таким образом, в частности, компоненты $\mathfrak{E}_i\,(P)$ коммутируют с $\mathfrak{H}_i\,(P')$.]

Заменим теперь по формуле (2) сумму $\frac{1}{L^3}\sum_s(\ldots)$ на интеграл $\int(\ldots)\,dk_x dk_y dk_z$, причем сначала проведем интегрирование по сфере радиуса N в $\mathfrak{k}$-пространстве и лишь потом перейдем к пределу $N \to \infty$. Кроме того, учтем, что при вычислении второй производной от $\sin(P_s' - P_s)$ по пространственным координатам x_i и x_k точки P или P' появляется множитель $-4\pi^2\mathfrak{k}_i\mathfrak{k}_k$, а по координатам x_l и ct — множитель $+4\pi^2|\mathfrak{k}_s|\,\mathfrak{k}_l$.

Таким образом, множители $\alpha_{ik}^{(s)}$ и $\beta_{ik}^{(s)}$ можно заменить соответствующими комбинациями таких вторых производных, получив в результате:

$$[\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')] = [\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')] = \\ = \frac{ihc}{8\pi^2}\iiint \frac{2}{|\mathfrak{k}|}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sin(P'-P)_k\, dk_x dk_y dk_z,$$

$$[\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')] = -[\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')] = \\ = \frac{ihc}{8\pi^2}\iiint \frac{2}{|\mathfrak{k}|}\frac{\partial^2}{c\partial t dx_l}\sin(P'-P)_k dk_x dk_y dk_z.$$

Дифференцирование и интегрирование здесь можно переставлять, и интеграл от производных дает как раз определенную формулой (12) функцию Δ_N, в которую следует подставить аргументы $x'-x, \ldots, t'-t$. Вводя для функции $\Delta(x'-x, \ldots, t'-t)$ сокращенное обозначение $\Delta(P'-P)$ и переходя к пределу $N \to \infty$, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')] = [\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')] &= \frac{ihc}{8\pi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik}\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\Delta(P'-P), \\ [\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')] = -[\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')] &= \frac{ihc}{8\pi^2}\frac{\partial^2}{c\partial t \partial x_l}\Delta(P'-P) \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

($i, k = 1, 2, 3$; во втором уравнении при $i = k$ правая часть равна нулю, при $i \neq k$ i, k, l — четная перестановка 1, 2, 3).

Вспомним теперь, что в соответствии с соотношением (13) имеем

$$\Delta(P-P') = -\Delta(P'-P). \qquad (13')$$

Полагая

$$(F_{41}, F_{42}, F_{43}) = i\mathfrak{E}, \quad (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \mathfrak{H},$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict),$$

мы можем придать соотношениям (III) единую четырехмерную инвариантную форму

$$[F_{ik}(P), F_{lm}(P')] = \frac{ihc}{8\pi^2}\Delta_{ik,\,lm}(P'-P), \qquad \text{(III')}$$

где величина $\Delta_{ik,lm}$ означает сокращенно

$$\Delta_{ik,\,lm} = \left(\delta_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m} - \delta_{il}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} + \delta_{im}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} - \delta_{km}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l}\right)\Delta. \qquad (16)$$

При сравнении соотношений (III) и (III′) следует воспользоваться свойством, выраженным уравнением (14) предыдущего параграфа:

$$\sum_a \frac{\partial^2}{\partial x_a^2}\Delta = 0.$$

§ 4. Простые следствия из перестановочных соотношений для напряженностей поля. Об отношении квантовой электродинамики к уравнениям Максвелла

Те q-функции, которые в рассматриваемой здесь форме квантовой электродинамики выражают напряженности поля, не могут зависеть *произвольно* от пространства и времени, а должны удовлетворять уравнениям Максвелла для вакуума:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_j}+\frac{\partial F_{kj}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k}=0,$$

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}=0. \qquad \text{(IV)}$$

Это требование было выполнено уже в нашем исходном пункте, в разложении поля на поперечные парциальные волны, распространяющиеся со скоростью света. При этом предполагалось, что плотность заряда и тока всюду равна нулю. Мы исходим из предпосылки, что результаты, полученные при рассмотрении этого частного случая, можно распространить на всю квантовую электродинамику. Насколько это верно, может показать только будущая полная квантовая электродинамика, учитывающая свойства заряженных частиц. Но, допуская нашу предпосылку, можно сказать, что классические уравнения поля (IV) входят явно и в квантовую электродинамику, и притом в качестве *дополнительных условий, налагаемых на q-функции напряженностей поля.*

Для того чтобы перестановочные соотношения (III) были совместны с уравнениями поля (IV), левые части равенств (16), согласно соотношению (III′), должны коммутировать с какой-нибудь компонентой напряженности поля F_{lm}. В том, что это действительно так, нас убеждает уже вывод перестановочных соотношений (III′) из таких же соотношений для фурье-компонент поля. Но это легко подтверждается и непосредственным вычислением. Особенно простым оказывается рассмотрение для второй группы уравнений (IV), так как, применяя операцию $\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ к правой части соотношений (III′), мы получаем при любых фиксированных l, m

$$\left(-\delta_{il}\frac{\partial}{\partial x_m}+\delta_{im}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\sum_a\frac{\partial^2\Delta}{\partial x_a^2}.$$

Вследствие уравнения (14) это выражение тождественно равно нулю. Аналогичным, только несколько более длинным, оказывается вычисление для первой группы уравнений (IV). Цель достигается быстрее, если мы введем дуальный F_{ik} тензор $\overset{*}{F}_{ik}$, компоненты которого равны:

$$(\overset{*}{F}_{23},\overset{*}{F}_{31},\overset{*}{F}_{12})=-i\mathfrak{E},\qquad(\overset{*}{F}_{41},\overset{*}{F}_{42},\overset{*}{F}_{43})=-\mathfrak{H}.$$

С помощью этого тензора первую группу уравнений можно, как известно, также записать в виде

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial F^*_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0. \qquad (IV')$$

Но при переходе к дуальному тензору происходит замена $i\mathfrak{E}$ на $-\mathfrak{H}$, а значит $\mathfrak{E}$ на $i\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}$ на $-i\mathfrak{E}$. Как непосредственно следует из соотношений (III), все скобочные выражения при этом просто изменяют знак на противоположный. Таким образом, выполняются также соотношения

$$[F^*_{ik}(P), F^*_{lm}(P')] = -[F_{ik}(P), F_{lm}(P')] = -\frac{ihc}{8\pi^2} \Delta_{ik,\, lm}(P' - P). \qquad (III'')$$

Отсюда коммутативность левых частей уравнений (IV') с F_{lm} следует точно таким же образом, как из соотношений (III″) вытекает, что $\sum_{\alpha} \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}$ коммутирует с F_{lm}.

Далее, поскольку на основании соотношений (III) легко убедиться, что

$$[F_{ik}(P), \; F^*_{lm}(P')] = -[F^*_{ik}(P), \; F_{lm}(P')], \qquad [F_{ik}(P), \; F^*_{ik}(P')] = 0, \qquad (17)$$

мы получаем с учетом соотношений (III″) для тензоров

$$E_{ik} = F_{ik} + F^*_{ik}, \qquad E^*_{ik} = F_{ik} - F^*_{ik} \qquad (18а)$$

соотношения:

$$[E_{ik}(P), \; E_{lm}(P')] = 0, \qquad [E^*_{ik}(P), \; E^*_{lm}(P')] = 0, \qquad (18б)$$

$$[E_{ik}(P), \; E^*_{lm}(P')] = 2\,[F_{ik}(P), \; F_{lm}(P')] + 2\,[F^*_{ik}(P), \; F_{lm}(P')],$$

$$[E^*_{ik}(P), \; E_{lm}(P')] = 2\,[F_{ik}(P), \; F_{lm}(P')] - 2\,[F^*_{ik}(P), \; F_{lm}(P')].$$

Соотношения (18б) особенно примечательны тем, что они позволяют вместо одних только q-функций $E_{ik}(P)$ [или одних только функций $E^*_{ik}(P)$] при частных приложениях подставлять обычные функции («c-функции»), так как их значения в различных точках пространства-времени всегда коммутируют. Функции с аналогичными свойствами получаются также, если произвести отражение напряженностей поля $F_{ik}(P)$ относительно произвольно выбранного начала координат:

$$F^+_{ik}(P) = \frac{1}{2}[F_{ik}(P) + F_{ik}(-P)],$$

$$F^-_{ik}(P) = \frac{1}{2}[F_{ik}(P) - F_{ik}(-P)].$$

В результате выполняются соотношения:

$$F^+_{ik}(P) = F^+_{ik}(-P), \qquad F^-_{ik}(P) = -F^-_{ik}(-P).$$

Легко получаем

$$[F^+_{ik}(P), F^+_{lm}(P')] = \frac{ihc}{8\pi^2}\frac{1}{4}[\Delta_{iklm}(P'-P) + \Delta_{iklm}(P'+P) + \\ + \Delta_{iklm}(-P'-P) + \Delta_{iklm}(-P'+P)].$$

Так как величины Δ_{iklm} обладают аналогичными (13′) свойствами симметрии:

$$\Delta_{iklm}(P'-P) = -\Delta_{iklm}(-P'+P),$$
$$\Delta_{iklm}(P'+P) = -\Delta_{iklm}(-P'-P),$$

то два средних, а также первый и последний члены в скобке правой части взаимно сокращаются, и правая часть оказывается равной нулю. Аналогичный вывод получается также для $[F^-_{ik}(P), F^-_{lm}(P')]$, так что справедливы соотношения

$$[F^+_{ik}(P), F^+_{lm}(P')] = [F^-_{ik}(P), F^-_{lm}(P')] = 0. \quad (19а)$$

Напротив, тем же способом легко получаются соотношения:

$$[F^+_{ik}(P), F^-_{lm}(P')] = \frac{ihc}{16\pi^2}[\Delta_{ik,lm}(P'-P) + \Delta_{ik,lm}(P'+P)], \quad (19б)$$

$$[F^-_{ik}(P), F^+_{lm}(P')] = \frac{ihc}{16\pi^2}[\Delta_{ik,lm}(P'-P) - \Delta_{ik,lm}(P'+P)]. \quad (19в)$$

Свойство коммутативности левой части уравнений Максвелла со всеми компонентами напряженности поля применительно к последним уравнениям можно сформулировать так: *при фиксированных l, m и P' правая часть соотношений* (19б) *при подстановке в нее $F^+_{ik}(P)$ удовлетворяет уравнениям Максвелла* (IV); *то же самое верно при подстановке $F^-_{lm}(P')$ при фиксированных i, k* и *P в правую часть* (19б). Более строго, вследствие использования Δ-функции следует говорить не о решениях уравнений Максвелла, а о сингулярных предельных случаях таких решений.

Последним свойством соотношений (19) мы воспользуемся позднее. Здесь же заметим еще, что для четырехмерных потенциалов невозможно найти простые формулировки для релятивистски-инвариантных перестановочных соотношений, включающие только Δ-функцию и ее производные.

II. МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Одномерный континуум в нерелятивистском приближении

Рассмотрим стоячие продольные колебания в одномерном континууме с граничными условиями

$$q(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l.$$

Тогда можно положить

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{l_s}} \sum_{s=0}^{\infty} q_s \sin 2\pi k_s x, \qquad k_s = s\frac{x}{2l}, \qquad s \text{—целое}; \quad (20)$$

аналогично для «импульса»

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{s=0}^{\infty} p_s \sin 2\pi k_s x.$$

Классические уравнения движения имеют вид:

$$\dot{p}_s = -2\pi\nu_s q_s, \quad \dot{q}_s = 2\pi\nu_s p_s, \quad \nu_s = ck_s.$$

Полная энергия дается формулой

$$E = \sum_s \frac{1}{2}\{p_s^2 + (2\pi\nu_s)^2 q_s^2\} = \frac{1}{2}\int \left[p^2(x) + c^2\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right] dx. \tag{21}$$

В квантовой механике формулам (18) соответствуют перестановочные соотношения

$$p_s q_{s'} - q_{s'} p_s = \begin{cases} \dfrac{h}{2\pi i}, & \text{если } s = s', \\ 0, & \text{если } s \neq s'. \end{cases} \tag{22}$$

Эти соотношения, как следует из простого вычисления [7], эквивалентны соотношению

$$p(x)\,q(x') - q(x')\,p(x) = \frac{h}{2\pi i}\,\delta(x - x') \quad [x, x' \text{ в } (0, l)], \tag{23}$$

причем δ означает функцию Дирака (ср. ч. I, § 2).

Как известно, соотношения (22) после введения функции Шредингера $\psi(q_1, \ldots q_s \ldots)$ бесконечно большого числа независимых переменных $q_1 \ldots q_s \ldots$ можно привести также к операторному уравнению, заменяя

q_s на оператор умножения на q_s,

p_s на оператор дифференцирования $\dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial q_s}$.

Для этого используется тождество

$$\frac{\partial}{\partial a_s}(a_s\psi) - a_s\frac{\partial\psi}{\partial a_s} = \psi.$$

В соответствии с формулой (21) закон сохранения энергии приводит затем к дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}\sum_s\left(-\frac{h^2}{4\pi^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial a_s^2} + \left(\sum_s \frac{1}{2}(2\pi\nu_s)^2 a_s^2\right)\psi = E\psi. \tag{24}$$

Решение этого уравнения при бесконечно большом числе переменных, конечно, расходится из-за конечной нулевой энергии $h\nu_s/2$, приходящейся

[7] См., например, *P. Jordan, O. Klein*. Z. Phys., 1927, 45, 751.

на каждое собственное колебание. Эта еще не вполне разрешенная трудность была подробно обсуждена во введении.

Но, помимо этого, возникает следующий вопрос. Что будет аналогом операторного представления соотношений (22) и уравнения (24), если мы вместо бесконечного счетного множества переменных $q_1 \ldots q_s \ldots$ в качестве варьируемых переменных возьмем функцию $q(x)$, т. е. континуум? Ответить на этот вопрос можно с помощью функциональной математики Вольтерра. Функционал $\Psi\{(x)\}$ сопоставляет число некоторой функции $q(x)$. Функционал называется дифференцируемым в точке P, если всегда существует следующий предел независимо от конкретного способа его вычисления: образуем проварьированную функцию $q(x) + \bar{q}(x)$, а интервал, в котором $\bar{q}(x)$ отличается от нуля, будем стягивать в точку $x_0 = P$, причем одновременно будем стремиться к нулю и интеграл $\int \bar{q}(x) dx$. Это значит, что

$$\Psi_{q(x);\,P} = \lim \frac{\Psi\{q(x) + \bar{q}(x)\} - \Psi\{q(x)\}}{\int \bar{q}(x)\,dx}.$$

С помощью δ-функции это можно также записать в виде

$$\Psi_{q(x);\,P} = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \bar{q}(x) \to \delta(x - x_{P_1})}} \frac{1}{\alpha} [\Psi_{q(x);\,P}\{q(x) + \alpha\bar{q}(x)\} - \Psi_{q(x);\,P}\{q(x)\}]. \tag{25}$$

Обычное правило дифференцирования суммы и произведения при этом сохраняется. Аналогично определяется вторая производная

$$\Psi_{q(x),\,q(x);\,PP_1} = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \bar{q}(x) \to \delta(x - x_{P_1})}} \frac{1}{\alpha} [\Psi_{q(x);\,P}\{q(x) + \alpha\bar{q}(x)\} - \Psi_{q(x);\,P}\{q(x)\}]. \tag{25a}$$

В частном случае второй производной для $P_1 = P$ мы будем писать индекс $q(x),\ q(x);\ PP$.

Теперь мы будем искать для $p(x)$ и $q(x)$ функциональные операторы, т. е. сопоставлять функционалу Ψ новые функционалы $\overline{\Psi}$ и $\overline{\overline{\Psi}}$. Эти функционалы можно выразить формулами:

$$\left(\int_J p(x)\,dx\right) \cdot \Psi\{q(x)\} \to \overline{\Psi}_J\{q(x)\},$$

$$\left(\int_J q(x)\,dx\right) \cdot \Psi\{q(x)\} \to \overline{\overline{\Psi}}_J\{q(x)\},$$

где в левых частях производится интегрирование по произвольному интервалу J переменной x, а зависимость функционалов $\overline{\Psi}$ и $\overline{\overline{\Psi}}$ от этого интервала указывается индексом J. Это сопоставление следует теперь произвести таким образом, чтобы удовлетворялось соотношение (23), рассмат-

риваемое в качестве операторного уравнения. Ясно, что этому требованию удовлетворяют формулы:

$$\left(\underline{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx}\right)\cdot \Psi\{q(x)\} = \frac{h}{2\pi i}\int_{x_1}^{x_2} \Psi_{q(x);P}\,dx_P,$$
$$\left(\underline{\int_{x_1}^{x_2} q(x)\,dx}\right)\cdot \Psi\{q(x)\} = \Psi\{q(x)\}\cdot \int_{x_1}^{x_2} q(x)\,dx. \tag{26}$$

Уравнение сохранения энергии (21) дает затем функциональное интегродифференциальное уравнение

$$-\int\left(\frac{h}{4\pi}\right)^2\cdot \Psi_{q(x),\,q(x);\;PP}dx_P + c^2\left[\int\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 dx\right]\cdot\Psi = E\Psi. \tag{27}$$

Чтобы составить аналог условия ортогональности, необходимо дать определение интеграла $\int\psi_E\psi_{E'}\delta\Omega$ по пространству функций. Естественно было бы для этого разделить отрезок $(0,\ l)$ на N интервалов и рассмотреть ступенчатые ломаные $q\,(x)$, принимающие в каждом отдельном интервале постоянные значения от q_1 до q_N. После этого можно было бы перейти к пределу $N\to\infty$:

$$\int\psi_E\psi_{E'}\delta\Omega = \lim_{N\to\infty}\int\ldots\int\psi_E(q_1\ldots q_N)\,\psi_{E'}(q_1\ldots q_N)\,dq_1\ldots dq_N = \delta(E-E').$$

Однако этому пока препятствует упомянутая выше трудность со сходимостью.

§ 2. Релятивистски-инвариантное функциональное рассмотрение случая двух канонически-сопряженных скалярных *q*-функций, удовлетворяющих волновому уравнению

Для подготовки к проблеме электродинамики вакуума рассмотрим сначала следующую более простую задачу. Пусть две скалярные функции состояния f и g удовлетворяют (четырехмерным) волновым уравнениям:

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2} = 0,\qquad \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2 g}{\partial x_\alpha^2} = 0. \tag{28}$$

Далее, пусть для них как q-функций переменных x, y, z, t выполняются перестановочные соотношения

$$f\,(P)\,g\,(P') - g\,(P')\,f\,(P) = ih\Delta\,(P-P'), \tag{29}$$

причем Δ означает определенную в § 2 ч.I функцию, а значения f в разных точках коммутируют между собой, как и значения g. Спрашивается,

каким образом эти перестановочные соотношения можно представить в виде соотношения между функциональными операторами аналогично введению операторов (26) в соотношение (23).

Вследствие того что $g(P)$ и $g(P')$ коммутируют между собой, можно рассматривать функционалы $\Psi\{g(x_1\ldots x_4\}$, в которых значения $g(x_1\ldots x_4)$ являются уже обычными числами. Однако существенно, что в качестве $g(x_1\ldots x_4)$ теперь можно брать не произвольные функции переменных $x_1\ldots x_4$, а только такие функции, которые удовлетворяют волновому уравнению. Мы не должны выходить из этого частного класса функций и при варьировании $g(x_i)$. Поэтому, в частности, теперь уже невозможно выбирать вариацию $g(x_1\ldots x_4)$ так, чтобы она отличалась от нуля только в окрестности некоторой мировой точки. Следовательно, тот факт, что на аргумент функционала Ψ теперь накладывается дополнительное условие в виде волнового уравнения или, в более общем случае, в виде линейного дифференциального уравнения в частных производных, приводит к необходимости несколько изменить понятие функциональной производной Вольтерра.

Это можно сделать, просто заменяя обычную δ-функцию в определении производной Вольтерра (25) сферической Δ-функцией § 2 ч. I, поскольку последняя функция, в соответствии с уравнением (13) того же параграфа, является решением волновых уравнений (28).

Таким образом, мы определим теперь функциональную производную формулой

$$\Psi_{g(x_i);\,P}=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \bar{g}[x_i(P')]\to\Delta(P-P')}}\frac{1}{\alpha}\left[\Psi\{g(x_i)+\alpha\bar{g}(x_i)\}-\Psi\{g(x)\}\right]. \quad (30)$$

Но так как для этой производной по-прежнему справедливы правила дифференцирования суммы и произведения, то совершенно ясно, что соотношение (29) удовлетворяется следующим операторным равенством, полностью аналогичным равенствам (26):

$$\Big[\underbrace{\int g(x_i)\,dx_1\ldots dx_4}_{\text{оператор}}\Big]\cdot\Psi\{g(x)\}=ih\int\limits_{V_4}\Psi_{g(x_i);\,P}\,dx_1\ldots dx_4. \quad (31)$$

Точно так же оператор $f(x)$ означает просто умножение на $f(x)$.

Тем самым получен полный ответ на вопрос, поставленный в этом параграфе, и теперь мы можем возвратиться к нашей главной цели — отысканию функционального уравнения электродинамики световых квантов.

§ 3. Представление перестановочных соотношений электродинамики вакуума в форме инвариантных соотношений между функциональными операторами. Уравнение сохранения энергии-импульса как обобщение уравнения Шредингера

Если в качестве независимых переменных ввести амплитуды Фурье $b_1 \ldots b_s \ldots$, определенные равенствами (3) ч. I, то функциональное представление окажется очевидным, и q-числу a_s будет соответствовать оператор $ih\frac{\partial}{\partial a_s}$. Конечно, расходимость, о которой говорилось в § 1 ч. II, остается и здесь, так что все сказанное ниже может еще оказаться весьма проблематичным.

Но и, помимо того, появляется еще одна трудность, если мы не будем использовать явно разложение Фурье для поля в нашем функциональном разложении. Как уже было сказано в предыдущем параграфе, аргументами функционала могут быть только такие физические переменные поля — q-функции, которые обладают свойством перестановочности для всех точек пространства-времени. Следовательно, принимая для напряженностей поля F_{ik} перестановочные соотношения (III), сформулированные в ч. I, мы можем использовать в качестве аргументов функционала не сами эти напряженности, а в соответствии с уравнениями (18б) или (19a) § 4 ч. I только одну из определенных там систем величин $F^{+}_{ik}(P)$ $F^{-}_{ik}(P)$, $E_{ik}(P)$, $\overset{*}{E}_{ik}(P)$. Хотя использование этих функций, особенно зеркально отраженных относительно некоторой фиксированной точки величин F^{+}_{ik} и F^{-}_{ik}, выглядит крайне искусственно, избежать его мы не смогли.

Следующее рассмотрение проводится для функционала от антисимметричной относительно фиксированного начала координат части $F^{-}_{lm}(x_1, \ldots x_4)$ уравнений Максвелла (IV), и мы введем для этого функционала обозначение $\Psi\{F^{-}_{lm}(x_1 \ldots x_4)\}$. Разумеется, во всех последующих рассуждениях величины F^{-}_{ik} и F^{+}_{ik} можно поменять ролями; аналогичные рассуждения можно провести и в том случае, если в качестве аргументов функционала вводятся величины E_{ik} или $\overset{*}{E}_{ik}$.

Проблема ставится совершенно так же, как и в предыдущем параграфе, только теперь в качестве аргументов в функционале выступает *одновременно* несколько (шесть) функций, зависящих одна от другой вследствие уравнений Максвелла (IV). Теперь уже нельзя дифференцировать отдельно по *одной* из шести компонент напряженности поля, потому что *одну* такую компоненту нельзя варьировать независимо от прочих. И опять на помощь здесь приходит Δ-функция, на этот раз вместе со своими вторыми производными. Если мы введем определенное уравнением (16) ч. I выражение $\Delta_{ik,\,lm}$, то в соответствии с § 4 ч. I для каждой пары индексов $(i,\ k)$ величина

$$F^{-}_{im}(P) = \Delta_{ik,\,lm}(P' - P) + \Delta_{ik,\,lm}(P' + P) = \Delta^{-}_{ik,\,lm}(P', P) \qquad (32)$$

при фиксированной точке P будет *допустимой вариацией* F_{lm}^{-}, так как она удовлетворяет уравнениям Максвелла и, кроме того, условию симметрии [изменяет знак при переходе от (P) к $(-P')$]. Поэтому мы можем определить для нашего функционала $\Psi\{F_{lm}^{-}(P')\}$ по аналогии с равенством (30) *шесть следующих производных, характеризуемых парой индексов* (i, k) *и антисимметричных по* (i, k):

$$\Psi'_{ik;\,P}\{F_{lm}^{-}(P')\} = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \delta F_{lm}^{-}(P')\to\Delta_{ik,\,lm}^{-}(P',\,P)}} \frac{1}{\alpha}[\Psi\{F_{lm}^{-}(P') + \alpha(\delta F_{lm}^{-})(P')\} - \Psi\{F_{lm}^{-}(P')\}]. \qquad (33)$$

Тогда очевидно, что перестановочным соотношениям (III), понимаемым в операторном смысле, можно удовлетворить, определив сопряженный $F_{ik}^{+}(P)$ оператор по формуле

$$\left(\int_J \underline{F_{ik}^{+}(P)}\, dV_P\right)\cdot\Psi\{F_{lm}^{-}(P')\} = \frac{ihc}{16\pi^2}\iint_J \Psi'_{ik;\,P}\{F'_{lm}(P')\}\, dV_P, \qquad (34)$$

где dV_P — элемент объема четырехмерного пространства координат $x_1 \ldots x_4$ точки P; J — произвольная конечная четырехмерная область этого пространства, а оператор $\iint_J F_{lm}^{-}(P)\, dV_P$ означает просто умножение на эту величину.

Приведем здесь вкратце рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены в § 1 ч. II для вывода равенства (25). Прежде всего, вполне очевидно, как можно образовывать *вторые* производные нашего функционала Ψ; наиболее общую вторую производную запишем в виде

$$\Psi'_{ik,\,rs;\,PP_1}.$$

Правда, в дальнейшем нам потребуется только частный случай $P_1 = P$. Необходимо учитывать, что в релятивистски-инвариантной теории интегралы импульса и энергии должны быть равноправными, так что из «собственного» функционала Ψ_{J_k}, зависящего от четырех компонент энергии-импульса $J_4 = -E$, $(J_1, J_2, J_3) = ic\mathfrak{G}$, мы получаем систему из четырех уравнений в частных функциональных производных второго порядка. Как известно, в классической электродинамике компоненты J_k выражаются через напряженности поля следующим образом:

$$J_k = \int_{t=\text{const}} \left[\sum_{r=1}^{4} F_{kr}F_{4r} - \delta_{k4}\sum_{(rs)} \frac{1}{2}(F_{rs})^2\right] dx dy dz.$$

Сечение $t = \text{const}$ мы можем выбрать, в частности, как $t = 0$, т. е. провести его через начало координат, применявшееся нами при разложении напряженностей поля на F_{ik}^{+} и F_{ik}^{-}. Тогда каждый из четырех интегралов J_k

распадается на две части, зависящие от одних только $\overset{-}{F}_{ik}$ или $\overset{+}{F}_{ik}$, так как интегралы от смешанных членов обращаются в нуль по соображениям симметрии. Мы получаем в результате систему из четырех (k принимает значения от 1 до 4 соответственно) уравнений, аналогичных (27):

$$\left(\frac{ihc}{16\pi^2}\right)^2 \underset{t=0}{\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}} \left[\sum_{r=1}^{4} \Psi''_{kr;\,4r;\,PP} - \delta_{k4} \sum_{(rs)} \frac{1}{2} \Psi''_{rs;\,rs;\,PP}\right] dx_P dy_P dz_P +$$

$$+ \Psi \iiint \left[\sum_{r=1}^{4} \overset{-}{F}_{kr} \overset{-}{F}_{4r} - \delta_{k4} \cdot \frac{1}{2} \sum_{rs} (\overset{-}{F}_{rs})^2\right] dx_P dy_P dz_P = J_k \Psi. \qquad (35)$$

Здесь Ψ — функционал, зависящий от $\overset{-}{F}_{rs}\,(x_k)$ и, кроме того, параметрически — еще от J_k. Для «замкнутого» поля излучения эти уравнения играют такую же роль, как дифференциальное уравнение Шредингера для определенного квантового состояния замкнутой механической системы.

Как уже говорилось во введении, приведенные в последних параграфах ч. II уравнения, для которых пока еще не существует прямых методов интегрирования, следует считать окончательными не более чем соображения о q-функциях, развитые в ч. I. Однако в общем мы считаем естественным вводить функционалы для последовательного квантовотеоретического переосмысления классической физики поля, несмотря на множество возникающих при этом нерешенных частных проблем.

Поступила 7 декабря 1927 г.

1929

К КВАНТОВОЙ ДИНАМИКЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ *

(Совместно с В. Гейзенбергом)

Введение.—I. Общий метод. § 1. Лагранжева и гамильтонова формы уравнений поля; интегралы энергии и импульса. § 2. Канонические перестановочные соотношения для непрерывных функций пространственных координат и времени. Закон сохранения энергии и импульса в квантовой динамике. § 3. Релятивистская инвариантность перестановочных соотношений в случае инвариантной функции Лагранжа.— II. Вывод основных уравнений теории для электромагнитных полей и волн материи. § 4. Трудности электродинамики, квантование уравнений Максвелла, необходимость добавочных членов. § 5. О связи между уравнениями, полученными в этой работе, и прежними подходами к квантовой электродинамике полей в отсутствие зарядов. § 6. Дифференциальная и интегральная формы законов сохранения энергии и импульса для полного волнового поля.— III. Приближенные методы интегрирования уравнений и физические приложения. § 7. Вывод дифференциальных уравнений для амплитуд вероятности. § 8. Вычисление возмущенных собственных значений с точностью до второго порядка по взаимодействию. § 9. О предсказываемом теорией световом излучении, возникающем при прохождении электронов через потенциальный барьер.

Введение

В квантовой теории до сих пор невозможно было установить непротиворечивым образом связь между законами механики и электродинамики, а также между электро- и магнитостатическими взаимодействиями, с одной стороны, и взаимодействиями через излучение — с другой, и рассмотреть их с единой точки зрения. В частности, не удавалось корректно учесть конечную скорость распространения электромагнитных взаимодействий. Цель настоящей работы и состоит в том, чтобы восполнить этот пробел. Для достижения этой цели необходимо указать релятивистски-инвариантный формализм, который позволит рассмотреть взаимодействие между материей и электромагнитным полем и тем самым взаимодействие между материей и материей. Эта задача сопряжена с большими и, по всей видимости, принципиальными трудностями, которые, по мнению Дирака, служат препятствием на пути к релятивистски-инвариантной формулировке одноэлектронной проблемы. Вполне удовлетворительного решения поставленной нами задачи удастся достичь лишь после того, как эти принципиальные трудности будут выяснены. В отличие от этого проблему запаздывания, по-видимому, можно отделить от столь глубоких вопросов, и, хотя решать ее придется без всякой помощи со стороны клас-

* *Zur Quantendynamik der Wellenfelder.* (Mit W. Heisenberg).— Z. Phys., 1929, **56**, H. 1 und 2, S. 1—61.

сической теории, все же есть надежда, что привлечение соответствующих соображений позволит найти решение.

Как известно, в классической механике точки с помощью гамильтоновой теории нельзя получить релятивистски-инвариантную формулировку проблемы многих тел. Поэтому нельзя надеяться, что в квантовой теории релятивистски-инвариантную формулировку проблемы многих тел удастся получить с помощью дифференциальных уравнений в конфигурационном пространстве или с помощью соответствующих матриц, тем более что такой подход, по-видимому, неразрывно связан с введением квантования электромагнитных волн, эквивалентного введению квантов света. Например, предложенное Эддингтоном [1] уравнение для двухэлектронной задачи, в которое существенно входит четырехмерное расстояние между двумя мировыми точками, вряд ли удастся согласовать с экспериментом, поскольку это уравнение приводит к взаимодействию между электронами, качественно отличающемуся от запаздывающих потенциалов, следующих из теории Максвелла. Это различие сохранялось бы и в предельном случае больших квантовых чисел и, следовательно, приводило бы к противоречию. Кроме того, аналогом той теории, которую мы хотим построить, должны быть, с одной стороны, теория Максвелла, а с другой — волновое уравнение одноэлектронной проблемы, интерпретированное в духе классической теории сплошных сред.

Шредингеру [2] удалось построить формально удовлетворительную теорию, объединяющую обе названные теории поля. Для одноэлектронной проблемы, решаемой на основе уравнения Дирака, соответствующая связь была установлена Тетроде [3]. Теория, которую мы стремимся здесь построить, находится в таком же отношении к упомянутой выше последовательной теории поля, в каком квантовая теория — к классической механике; а именно, наша теория получается из этой последовательной теории в результате квантования (введения некоммутирующих величин или соответствующих функционалов) и с формальной стороны представляет собой дальнейшее развитие исследований Дирака [4], Иордана и Паули [5] по теории излучения и Иордана, Клейна и Вигнера [6] по проблеме многих тел. Аналогичная попытка недавно была предпринята Ми [7]; она во многом напоминает разработанную им же теорию электрона. Эта теория пока что остается всего лишь формальной схемой, поскольку не найдено классическое уравнение поля, интегрирование которого приводило бы к удовлетворительному описанию электрона. С квантовой теорией поля Ми дело обстоит точно так же: несмотря на огромное сходство с той теорией, которую мы хотим построить, она пока остается практически неприменимой.

[1] *A. S. Eddington.* Proc. Roy. Soc., 1928, **121**, 525; 1929, **122**, 358.
[2] *E. Schrödinger.* Ann. Phys., 1927, 82, 265.
[3] *H. Tetrode.* Z. Phys., 1929, 49, 858; ср. также *F. Möglich.* Z. Phys., 1928, 48, 852.
[4] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc., 1927, **A114**, 243, 710.
[5] *P. Jordan, W. Pauli.* Z. Phys., 1928, **47**, 151. (Русск. пер. см. с. 7.— *Ред.*).
[6] *P. Jordan, O. Klein.* Z. Phys., 1927, **45**, 751; *P. Jordan, E. Wigner.* Z. Phys., 1928, **47**, 631.
[7] *G. Mie.* Ann. Phys., 1928 (4), **85**, 711.

Не лишена некоторых недостатков и развиваемая нами теория. Как уже упоминалось, остаются непреодоленными те принципиальные трудности, связанные с релятивистским волновым уравнением, на которые обращал внимание Дирак [8]. Кроме того, формулы нашей теории приводят к бесконечному значению нулевой энергии для излучения и содержат взаимодействие электрона с самим собой в качестве бесконечной аддитивной постоянной. Разумеется, эта теория не позволяет также делать никаких заключений о возможности процессов излучения электрически заряженных элементарных частиц или о предпочтении, отдаваемом природой антисимметричным волновым функциям в конфигурационном пространстве перед симметричными в случае многих электронов или протонов. Однако все эти трудности не мешают приложениям теории ко многим физическим проблемам. Например, развитые нами методы позволяют провести математическое рассмотрение некоторых тонких вопросов теории эффекта Оже и родственных ему явлений, а также учесть запаздывание потенциала при вычислении значений энергии стационарных состояний атома. Последнее особенно важно для теории тонкой структуры спектра ортогелия. Кроме того, построенный здесь формализм включает в себя прежние методы (квантовую механику, дираковскую теорию излучения) в качестве частных случаев — первого приближения. В целом отсюда можно заключить, что будущая окончательная теория должна иметь много общих существенных черт с построенной нами теорией. Следует еще упомянуть, что квантование гравитационного поля, которое необходимо в силу некоторых физических причин [9], проводится без каких-либо новых трудностей с помощью формализма, вполне аналогичного развитому здесь.

I. ОБЩИЙ МЕТОД

§ 1. Лагранжева и гамильтонова формы уравнений поля; интегралы энергии и импульса

Пусть задана функция Лагранжа L, зависящая от некоторых непрерывных функций пространственных координат и времени Q_α (x_1, x_2, x_3, t) и их первых производных по координатам. Дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять переменные поля Q_α, могут быть получены

---

[8] Как показал Клейн (*O. Klein.* Z. Phys., 1929, 53, 157), эти трудности особенно поразительно проявляются в том, что, согласно теории Дирака, скачки электронного потенциала порядка $V = mc^2/e$ иногда могут быть беспрепятственно преодолены вопреки классическому закону сохранения энергии. Аналогичное следствие из нашей теории, по-видимому, препятствует более подробному теоретическому рассмотрению строения ядра атома.

[9] *A. Einstein.* Berl. Ber., 1916, S. 688 (русск. пер.: *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. 2. М., «Наука», 1965, с. 514.— *Ред.*); см. в особенности с. 696, где подчеркивается необходимость квантового рассмотрения испускания гравитационных волн. (Паули имеет в виду слабое гравитационное поле; квантование его рассмотрено в работе: *М. Бронштейн.* ЖЭТФ, 1936, 6, 195.—*Ред.*). См. также *O. Klein.* Z. Phys., 1927, 46, 188, особенно прим. на с. 188 этой работы.

из вариационного принципа

$$\delta \int L\left(Q_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}, \dot{Q}_\alpha\right) dV dt = 0, \tag{1}$$

если предполагается, что вариация функции Q_α на границе области интегрирования обращается в нуль. Здесь $\dot{Q}_\alpha$ означает производную по времени $\partial Q_\alpha/\partial t$ в некоторой фиксированной точке пространства, индекс α нумерует встречающиеся в задаче различные переменные состояния, число которых произвольно, но конечно, а индекс i относится к трем пространственным координатам. Далее мы всегда будем обозначать индексы первого рода греческими буквами, а индексы второго рода — латинскими. Как известно, дифференциальные уравнения, следующие из вариационного принципа (1), имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} = 0. \tag{2}$$

Чтобы аналогия с обычной механикой стала более заметной, рассмотрим сначала функцию Лагранжа, проинтегрированную только по пространственному объему:

$$\bar{L} = \int L \, dV. \tag{3}$$

Интегрируя по частям, мы получаем для вариаций δQ_α, обращающихся в нуль на границе:

$$\delta \bar{L} = \int \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \right) \delta Q_\alpha dV.$$

Поэтому выражение

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \tag{4}$$

называется *гамильтоновой*, или функциональной, производной от $\bar{L}$ по Q_α в рассматриваемой точке P пространства с координатами x_1, x_2, x_3. Эту производную можно определить как предел отношения

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_{\alpha;\, P}} = \lim \frac{\bar{L}(Q_\alpha + \delta Q_\alpha) - \bar{L}(Q_\alpha)}{\int \delta Q_\alpha dV},$$

если значения $\bar{L}$ в числителе отличаются лишь тем, что только одна из переменных состояния Q_α как функция пространства в первом случае имеет иной вид, чем во втором, а в пределе не только интеграл, стоящий в знаменателе, стремится к нулю, но и отрезок, на котором, по предполо-

жению, δQ_α отлична от нуля, стягивается в одну точку пространства P, в которой требуется вычислить функциональную производную $\overline{L}$. Так как соотношение

$$\frac{\delta \overline{L}}{\delta \dot{Q}_{\alpha;P}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha}\right)_P$$

выполняется тривиально, уравнения поля можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \overline{L}}{\delta \dot{Q}_{\alpha;P}} = \frac{\delta \overline{L}}{\delta Q_{\alpha;P}}. \qquad (2')$$

Так же как и в механике точки, уравнения (2), или (2′), определяют поведение переменных состояния во все последующие моменты времени, если в некоторый момент времени эти переменные и их первые производные заданы. Вместо конечного числа переменных состояния q_i, фигурирующих в механике материальных точек, в рассматриваемом случае приходится иметь дело с континуумом таких переменных или, точнее говоря, с конечным числом континуумов, а именно, с функциями состояния $Q_\alpha(x_1, x_2, x_3)$. Пространственные же координаты x_1, x_2, x_3, напротив, не являются более переменными состояниями, а служат параметрами.

На самом деле случай континуума степеней свободы, когда переменные состояния являются функциями пространства, всегда можно получить с помощью предельного перехода, исходя из случая конечного числа степеней свободы. Пусть та область пространства, в которой определены переменные поля (для простоты будем считать ее конечной), разделена на одинаковые ячейки, имеющие вид параллелепипедов с ребрами длиной Δx_1, Δx_2, Δx_3. Заменим непрерывные функции пространства $Q_\alpha(x_1, x_2, x_3)$ ступенчатыми функциями, имеющими внутри каждой ячейки постоянное значение. Если считать, что ячейки пронумерованы по трем пространственным координатам тремя числами l, m, n, то число переменных состояния $Q_{\alpha,l,m,n}$ станет конечным. Если же, кроме того, заменить интеграл в выражении для $\overline{L}$ суммой, а производные по пространственным переменным конечными разностями по формуле

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_1} = \frac{Q_{\alpha,\, l+1,\, m,\, n} - Q_{\alpha,\, l,\, m,\, n}}{\Delta x_1},$$

то функция Лагранжа примет вид

$$\overline{L} = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \sum_{l,\, m,\, n} L\left(Q_{\alpha,\, l,\, m,\, n}, \frac{Q_{\alpha,\, l+1,\, m,\, n} - Q_{\alpha,\, l,\, m,\, n}}{\Delta x_1}, \ldots, \dot{Q}_{\alpha,\, l,\, m,\, n}\right), \qquad (5)$$

и мы получим уравнения движения обычной механики точек

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{Q}_{\alpha,\, l,\, m,\, n}} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial Q_{\alpha,\, l,\, m,\, n}}. \qquad (5')$$

Покажем теперь, что из уравнений (5′) обычной механики материальных точек в пределе, когда объем ячеек, на которые разбито пространство, стремится к нулю, получаются уравнения, в точности совпадающие с уравнениями (2) или (2′) для континуума степеней свободы [10]. Для этого, очевидно, достаточно показать, что

$$\lim \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \frac{\partial \overline{L}}{\partial Q_{\alpha,\,l,\,m,\,n}} \to \frac{\delta \overline{L}}{\delta Q_{\alpha;\,P}}.$$

Так как в сумме по l, m, n координаты $Q_{\alpha,l,m,n}$ входят как в члены, относящиеся к ячейке l, m, n, так и в члены, относящиеся к ячейкам $l-1$, m, n; l, $m-1$, n; l, m, $n-1$, то

$$\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \frac{\partial \overline{L}}{\partial Q_{\alpha.\,l,\,m,\,n}} = \left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\right)_{l,\,m.\,n} -$$

$$- \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_1}}\right)_{l,\,m,\,n} - \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_1}}\right)_{l-1,\,m,\,n}\right] \frac{1}{\Delta x_1} - \ldots$$

Если ячейки, на которые разбивается пространство, становятся сколь угодно малыми, правая часть этого равенства сходится к

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} = \frac{\delta \overline{L}}{\delta Q_{\alpha;\,P}},$$

что и утверждалось.

Теперь мы уже в состоянии вместо лагранжевой формы уравнений поля ввести их гамильтонову форму, подобно тому, как это делается в обычной механике. Определим прежде всего «импульс» P_α, канонически-сопряженный с переменной поля Q_α, с помощью соотношения

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha}, \tag{6}$$

а затем функцию Гамильтона H:

$$H\left(P_\alpha, Q_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\right) = \sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}_\alpha - L. \tag{7}$$

Варьируя H по переменным P_α, Q_α, $\partial Q_\alpha / \partial x_i$ и принимая во внимание (6), получаем

$$\delta H = \sum_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial P_\alpha} \delta P_\alpha + \frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} \delta Q_\alpha + \sum_i \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \delta \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \sum_\alpha \dot{Q}_\alpha \delta P_\alpha - \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} \delta Q_\alpha + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \delta \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\right).$$

[10] См. также § 4 и 5 в упоминавшейся работе Ми (прим. 7).

Следовательно, выполняются соотношения, во-первых,

$$\frac{\partial H}{\partial P_\alpha} = \dot{Q}_\alpha \tag{8}$$

и, во-вторых,

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha}\right)_{P_\alpha} = \left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\right)_{\dot{Q}_\alpha}, \quad -\left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right)_{P_\alpha} = \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right)_{\dot{Q}_\alpha} = P_{\alpha i}. \tag{9}$$

Переменные, стоящие у скобок, при дифференцировании следует считать постоянными. Кроме того, мы ввели здесь новое сокращенное обозначение $P_{\alpha i}$, которое нам понадобится в дальнейшем.

Из (8) и (9), если учесть (2), следуют канонические уравнения поля:

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha}, \qquad \dot{P}_\alpha = -\left[\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right], \tag{10}$$

или, если ввести

$$\overline{H} = \int H dV, \tag{11}$$

то

$$\dot{Q}_{\alpha;P} = \frac{\delta \overline{H}}{\delta P_{\alpha;P}}, \qquad \dot{P}_{\alpha;P} = -\frac{\delta \overline{H}}{\delta Q_{\alpha;P}}. \tag{I}$$

Они следуют из вариационного принципа

$$\delta \int L\, dV dt = \delta \int \left[\sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}_\alpha - H\left(P_\alpha, Q_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\right)\right] dV dt = 0, \tag{12}$$

где теперь P_α и Q_α можно считать независимо варьируемыми функциями пространственных координат с вариациями, обращающимися в нуль на границе. Значения функций P_α и Q_α в некоторый момент времени $t = t_0$ можно задать произвольно. Тогда во все последующие моменты времени их значения будут однозначно определяться из канонических уравнений поля.

Впрочем, в последующих выкладках используется лишь вариационный принцип в форме (12), и несущественно, можно ли подынтегральное выражение в (12) представить в виде функции одних лишь Q_α, $\partial Q_\alpha/\partial x_i$ и $\dot{Q}_\alpha$ путем исключения P_α или нет. Точно так же можно освободиться и от предположения о том, что H не содержит производных P_α по пространственным переменным, поскольку оно не понадобится в дальнейшем.

Предположим теперь (до сих пор в этом предположении не было необходимости), что функция Гамильтона не содержит в явном виде временнóй координаты. Мы утверждаем, что в этом случае величина $\overline{H}$ постоянна по времени. Интегрируя по частям, тотчас же находим

$$\frac{d\overline{H}}{dt} = \int \sum_\alpha \left(\frac{\delta \overline{H}}{\delta P_{\alpha;P}} \dot{P}_{\alpha;P} + \frac{\delta \overline{H}}{\delta Q_{\alpha;P}} \dot{Q}_{\alpha;P}\right) dV_P,$$

причем члены, отвечающие границе области интегрирования, здесь (так же как и в проводимом ниже доказательстве постоянства по времени некоторых объемных интегралов) уже отброшены [11]. Это означает, что при интегрировании по всему пространству переменные по́ля должны достаточно быстро обращаться в нуль на бесконечности. Если это предположить, то постоянство величины $\overline{H}$ по времени следует непосредственно из выражения для $d\overline{H}/dt$ в силу (I). *Во всех физических приложениях величину* $\overline{H}$ (так же как и функцию Гамильтона обычной механики) при подходящем выборе численных множителей *можно интерпретировать как полную энергию системы.*

Кроме интеграла энергии $\overline{H}$ существуют еще другие интегралы

$$G_k = -\int \sum_\alpha P_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} dV \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{13}$$

которые можно считать компонентами *полного импульса* системы. Так же, как и при выводе интеграла энергии, здесь следует предположить, что H не содержит в явном виде пространственных координат и что допускается отбрасывание интегралов по поверхности. В самом деле, при этих предположениях, интегрируя последовательно по частям, мы получаем из (13):

$$\frac{dG_k}{dt} = -\int \sum_\alpha \left(\dot{P}_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_k} \dot{Q}_\alpha\right) dV = \int \sum_\alpha \left(\frac{\delta H}{\delta Q_\alpha} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} + \frac{\delta H}{\delta P_\alpha} \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_k}\right) dV.$$

После подстановки выражений

$$\frac{\delta H}{\delta Q_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}, \qquad \frac{\delta H}{\delta P_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha},$$

отсюда следует, что

$$\frac{dG_k}{dt} = -\int \sum_\alpha \left[\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial H}{\partial x_k}\right] dV.$$

Последнее выражение можно преобразовать в поверхностный интеграл, который, по предположению, равен нулю. Отсюда следует, что величина G_k постоянна по времени. Если в пространстве нет выделенных направлений, то функция L (а следовательно, и H) инвариантна относительно поворотов осей координат в пространстве и величины G_k, как и должно быть, образуют компоненты некоторого вектора.

[11] Эти члены приводят к поверхностному интегралу

$$\int df \sum_i \left[\cos(n, x_i) \sum_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \dot{Q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}} \dot{P}_\alpha\right)\right],$$

который можно интерпретировать как поток энергии через граничную поверхность.

§ 2. Канонические перестановочные соотношения для непрерывных функций пространственных координат и времени. Законы сохранения энергии и импульса в квантовой динамике

Теперь мы уже достаточно подготовлены, чтобы и в теории поля сделать шаг от классической физики к квантовой. Для этого мы сначала воспользуемся методом, соответствующим применению матриц или операторов в квантовой механике, и лишь затем коротко остановимся на методе, аналогичном дифференциальному уравнению Шредингера в координатном пространстве. Формальный перенос второго метода в теорию поля наталкивается на математические трудности, связанные с разумным определением элемента объема в функциональном пространстве. Кроме того, первый метод обладает тем преимуществом, что предоставляет большую свободу в выборе независимых переменных, вследствие чего облегчается проведение канонических преобразований; к тому же этот метод позволяет заимствовать форму физических законов (в нашем случае — уравнений поля и выражения для функции Гамильтона) непосредственно из классической теории. Различие между классической и квантовой физикой при использовании этого метода, как известно, проявляется в том, что в квантовом случае физические величины заменяются, вообще говоря, некоммутирующими операторами. В квантовой механике физические переменные состояния зависят, во-первых, от времени и, во-вторых, от одного или нескольких дискретных индексов, позволяющих отличать различные степени свободы. В случае же полевых функций квантовой динамики эти индексы (частично) переходят в непрерывно изменяющиеся пространственные координаты x_1, x_2, x_3, которые так же, как и время t, можно рассматривать как обычные числа (c-числа).

Чтобы получить канонические п. с. [12] для непрерывных переменных поля, мы, как и в предыдущем параграфе, совершим предельный переход от случая конечного числа степеней свободы к случаю бесконечного числа степеней свободы. Будем исходить из функции Лагранжа (5), которая в пределе, когда ячейки, на которые разбивается пространство, становятся бесконечно малыми, переходит в функцию Лагранжа (3). Введем обычный δ-символ, определяемый соотношением

$$\delta_{ll'} = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq l'; \\ 1, & \text{если } l = l', \end{cases} \tag{14}$$

и сокращенное обозначение

$$\delta_{l,\,m,\,n;\,l',\,m',\,n'} = \delta_{ll'}\delta_{m'm}\delta_{n'n}.$$

Пусть

$$\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

[12] Здесь и далее мы всегда будем для краткости вместо слов «перестановочные соотношения» писать п. с.

— объем ячейки. Тогда из обычной квантовой механики следует, что в случае конечного числа степеней свободы выполняются п. с.

$$p_{\alpha,\,lmn}Q_{\beta,\,l'm'n'} - Q_{\beta,\,l'm'n'}p_{\alpha,\,lmn} = \frac{h}{2\pi i}\,\delta_{lmn,\,l'm'n'}\delta_{\alpha\beta}, \tag{15}$$

к которым следует еще добавить перестановочность различных Q и перестановочность различных p. Величина $p_{\alpha,lmn}$ здесь имеет смысл

$$p_{\alpha,\,lmn} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{Q}_{\alpha,\,lmn}} = \Delta V\,\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha,\,lmn}},$$

откуда в пределе получаем

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\,p_{\alpha,\,lmn} = P_\alpha(x_1, x_2, x_3).$$

Если бы в соотношениях (14) мы перешли к пределу $\Delta V \to 0$, поделив их предварительно на ΔV, то справа мы получили бы нуль. Тем не менее мы приходим к разумному результату, умножая (15) сначала на любую ступенчатую функцию f (c-число) индексов $l'm'n'$, а затем суммируя по всем ячейкам некоторой пространственной области V', если функция f в пределе при $\Delta V \to 0$ так сходится к функции пространства $f(x_1, x_2, x_3)$, что при этом сумма

$$\sum_{l'm'n'} f(l', m', n')\,\Delta V$$

переходит в интеграл

$$\int_{V'} f(x_1', x_2', x_3')\,dV'$$

по выбранной части пространства. В результате первой операции имеем:

$$\sum_{l'm'n'} f(l'm'n')\,\Delta V\left[\frac{p_{\alpha,\,lmn}}{\Delta V}\,Q_{\beta,\,l'm'n'} - Q_{\beta,\,l'm'n'}\,\frac{p_{\alpha,\,lmn}}{\Delta V}\right] = \frac{h}{2\pi i}\,\delta_{\alpha\beta}\begin{cases} f(lmn), & \text{если ячейка } lmn \text{ принадлежит } V';\\ 0 & \text{— в противном случае,}\end{cases}$$

а в пределе при разбиении на бесконечно тонкие ячейки

$$\iiint_{V'} f(x_1', x_2', x_3')\,dV'\,\{P_\alpha(x_1, x_2, x_3)\,Q_\beta(x_1', x_2', x_3') - Q_\beta'(x_1', x_2', x_3')\,P_\alpha(x_1, x_2, x_3)\} = \frac{h}{2\pi i}\,\delta_{\alpha\beta}\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3), & \text{если точка } x_1, x_2, x_3 \text{ принадлежит } V';\\ 0 & \text{— в противном случае.}\end{cases} \tag{16}$$

Впрочем, x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3' здесь можно поменять ролями. Этот результат целесообразно сформулировать с помощью сингулярной $\delta(x)$-функции

Дирака, определяемой следующим образом:

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx = \begin{cases} f(0), \text{ если } x=0 \text{ принадлежит } (a,b); \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases} \tag{17}$$

Поэтому всегда можно считать, что $\delta(-x) = \delta(x)$. Далее, введем вектор $\mathfrak{r}$ с компонентами x_1, x_2, x_3 и обозначим для краткости

$$\delta(\mathfrak{r}) = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3), \qquad \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') = \delta(\mathfrak{r}', \mathfrak{r}) = \delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}').$$

Тогда

$$\int_{V'} f(x_1', x_2', x_3')\,\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')\,dV' = \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3), \text{ если } x_1, x_2, x_3 \text{ принадлежит } V'; \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases} \tag{17'}$$

Если вместо $P_\alpha(x_1, x_2, x_3)$, $Q_\alpha(x_1, x_2, x_3)$ мы запишем кратко P_α, Q_α, а вместо $P_\alpha(x_1', x_2', x_3')$, $Q_\alpha(x_1', x_2', x_3')$ — P_α', Q_α' и, кроме того, введем еще сокращенное обозначение для коммутатора

$$[F, G] \equiv FG - GF,$$

то канонические п. с. для непрерывных переменных поля можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered} [Q_\alpha, Q_\beta'] = 0, \qquad [P_\alpha, P_\beta'] = 0, \\ [P_\alpha, Q_\beta'] = [P_\alpha', Q_\beta] = \frac{h}{2\pi i}\,\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'). \end{gathered} \tag{II}$$

Следует заметить, что эти соотношения выполняются для двух различных точек пространства, но всегда для одного и того же момента времени, и что поначалу ничего не говорится о значении коммутатора для переменных поля, относящихся к двум различным моментам времени. Если производную δ-функции мы определим обычным образом из интеграла

$$\int_a^b f(x)\,\delta'(x)\,dx = \begin{cases} -f'(0), \text{ если } x=0 \text{ принадлежит } (a,b); \\ 0 \text{ — в противном случае} \end{cases} \tag{17''}$$

[этот результат получается из (17) при формальном интегрировании по частям и отбрасывании внеинтегральных членов], то п. с. (II) можно дифференцировать по пространственным координатам. Оказывается, например, что

$$\begin{gathered} \left[P_\alpha', \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\right] = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i}\,\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'), \\ \left[P_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha'}{\partial x_i'}\right] = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i'}\,\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i}\,\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'), \end{gathered} \tag{18}$$

$$\left[\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}, Q'_\alpha\right] = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'),$$
$$\left[\frac{\partial P'_\alpha}{\partial x'_i}, Q_\alpha\right] = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x'_i}\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'), \qquad (18)$$

причем последнее равенство следует из равенств

$$\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') = \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}') = \delta(\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}).$$

Чтобы продвинуться дальше, необходимо определить дифференцирование функции некоммутирующих переменных по одной из них, которое, как известно, должно производиться по формуле

$$\frac{\partial F(Q_1, Q_2, \ldots)}{\partial Q_1} = \lim_{\delta \to 0}\frac{F(Q_1 + \delta, Q_2, \ldots) - F(Q_1, Q_2, \ldots)}{\delta},$$

где δ — c-число (умноженное на невыписанный здесь единичный оператор). При таком определении выполняется обычное правило дифференцирования произведения

$$\frac{\partial(F_1F_2)}{\partial Q_1} = F_1\frac{\partial F_2}{\partial Q_1} + \frac{\partial F_1}{\partial Q_1}F_2,$$

в котором особое внимание следует обратить на сохранение порядка следования сомножителей.

Пусть теперь F — произвольная функция величин P_α, $\partial P_\alpha/\partial x_i$, Q_α, $\partial Q_\alpha/\partial x_i$, которая сначала зависит лишь от значений этих величин в одной и той же точке пространства. По аналогии с соответствующими разложениями в обычной квантовой механике нетрудно показать, что

$$[F, Q'_\alpha] = \frac{h}{2\pi i}\left[\frac{\partial F}{\partial P_\alpha}\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')\right],$$
$$[P'_\alpha, F] = \frac{h}{2\pi i}\left[\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')\right]. \qquad (19)$$

Дело в том, что эти соотношения, как видно из (II) и (18), справедливы и в том случае, если вместо F подставлена одна из переменных поля P_α, Q_α, $\partial P_\alpha/\partial x_i$, $\partial Q_\alpha/\partial x_i$. Можно показать, что если предположить их справедливость для F_1 и F_2, то они будут выполняться и для $F_1 + F_2$ и F_1F_2. Далее, соответствующие п. с. для

$$\bar{F} = \int F\, dV$$

получим, проинтегрировав (19):

$$[\bar{F}, Q'_\alpha] = \frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial F}{\partial P_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}}\right)_{\text{для } x_i = x'_i},$$

$$[P'_\alpha, \bar{F}] = \frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right)_{\text{для } x_i = x'_i}.$$

Вводя функциональные производные $\delta\bar{F}/\delta P_\alpha$ и $\delta\bar{F}/\delta Q_\alpha$ по формуле (4), эти соотношения можно переписать в виде:

$$[\bar{F}, Q_\alpha] = \frac{h}{2\pi i}\frac{\delta\bar{F}}{\delta P_\alpha}, \qquad [\bar{F}, P_\alpha] = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\delta\bar{F}}{\delta Q_\alpha}, \tag{20}$$

причем вариацию здесь всегда следует брать в той точке пространства, к которой относятся переменные поля, стоящие в скобках.

Теперь мы уже достаточно подготовлены для того, чтобы перейти к обсуждению уравнений поля. Эти уравнения мы возьмем из классической теории в канонической форме (I):

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\delta\bar{H}}{\delta P_\alpha}, \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\delta\bar{H}}{\delta Q_\alpha}. \tag{I}$$

Добавим лишь, что входящие в эти уравнения частные производные следует понимать в смысле данного выше определения. Кроме того, в общем случае последовательность сомножителей в H должна подчиняться особым правилам, не имеющим однозначного прообраза в классической теории. Однако в последующих приложениях H относительно переменных поля (в основном) будет квадратичной формой, вследствие чего уравнения поля (в основном) [13] будут линейными. Формулы же (I) означают, что эти уравнения поля будут иметь в точности такой же вид, как и соответствующие классические уравнения.

Воспользовавшись соотношениями (20), мы можем сразу же переписать уравнения поля в виде:

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{2\pi i}{h}[\bar{H}, Q_\alpha], \qquad \dot{P}_\alpha = \frac{2\pi i}{h}[\bar{H}, P_\alpha],$$

откуда затем с помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше при выводе соотношения

$$\dot{F} = \frac{2\pi i}{h}[\bar{H}, F] \tag{21}$$

[13] Функция Гамильтона и уравнения поля содержат произведения материальных переменных поля ψ и ψ^* и электромагнитных потенциалов Φ_ν. Однако это обстоятельство ничему не мешает, поскольку, как мы увидим дальше, в нашей теории ψ и ψ^* перестановочны с Φ_ν.

для каждой из рассмотренных там величин F, получить для

$$\bar{F} = \int F dV$$

соотношение [14]

$$\dot{\bar{F}} = \frac{2\pi i}{h} [H, \bar{F}]. \tag{21'}$$

Из этого уравнения можно сделать два вывода, имеющих фундаментальное значение для непротиворечивости всей теории в целом. Во-первых, положим в (21') $\bar{F} = \bar{H}$. Тогда в силу того, что $[\bar{H}, \bar{H}] = 0$, получим:

$$\dot{\bar{H}} = 0, \qquad \bar{H} = \text{const}. \tag{22}$$

Таким образом, закон сохранения энергии выполняется и в рассматриваемом случае [15] (мы предполагали, разумеется, что H не содержит явно времени, так как уравнение (21) выполняется только для величин, удовлетворяющих этому условию). Во-вторых, подставим в (21') вместо F один из коммутаторов $[Q_\alpha, Q'_\beta]$, $[P_\alpha, P'_\beta]$, $[P_\alpha, Q'_\beta]$, $[P'_\alpha, Q'_\beta]$. В силу п. с. (II) все эти коммутаторы являются c-числами (точнее, c-числами, умноженными на единичные операторы), последние же в свою очередь перестановочны с H, так что производная от этих коммутаторов по времени (в фиксированной точке пространства) равна нулю. *Это означает, что если п. с.* (II), *по предположению, выполняются в некоторый момент времени* $t = t_0$, *то в силу уравнений* (I) *они будут выполняться и в следующий момент времени. Таким образом, они будут выполняться при любом* t. Тем самым доказано, что уравнения (I) и п.с. (II) дополняют друг друга.

Запишем теперь соотношения (20) для интеграла импульса, определяемого формулой (13)

$$G_k = -\int \sum_\alpha P_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} dV.$$

Полагая в (20) $\bar{F} = G_k$, находим:

$$[G_k, Q_\alpha] = \frac{ih}{2\pi} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}, \qquad [G_k, P_\alpha] = \frac{ih}{2\pi} \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_k}.$$

---

[14] Роль этого соотношения заключается в том, что оно позволяет не пользоваться равенством

$$\dot{F} = \sum_\alpha \left[\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} \dot{Q}_\alpha + \frac{\partial F}{\partial P_\alpha} \dot{P}_\alpha + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial \dot{Q}_\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial \dot{P}_\alpha}{\partial x_i} \right) \right].$$

[15] Заметим, что, в отличие от старых представлений квантовой механики, мы не делали предположения о том, что $\bar{H}$ приведен к диагональному виду, так как это предположение отвечает хотя и важному, но не единственно возможному случаю, который может представиться в физических приложениях этих уравнений.

Отсюда по индукции следует, что для любой (не содержащей в явном виде пространственных координат) величины F рассматриваемого вида

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = -\frac{2\pi i}{h}[G_k, F] \tag{23}$$

по аналогии с соотношением (21). Так как

$$\int \frac{\partial F}{\partial x_k} dV = 0,$$

то из (23) при интегрировании по объему получим, если существует $\overline{F} = \int F dV$:

$$[G_k, \overline{F}] = 0.$$

В частности, при $F = \overline{H}$ вследствие (21)

$$\dot{G}_k = 0, \qquad G_k = \text{const}. \tag{24}$$

Тем самым существование интеграла импульса в квантовой динамике доказано. Однако следует сделать еще одно замечание относительно порядка сомножителей P_α и $\partial Q_\alpha/\partial x_k$ в (13). Правда, справедливость формул (23) и (24) не зависит от того, в каком порядке следуют эти сомножители; но, поскольку в $\left[P_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}\right]$ эти функции необходимо рассматривать в одной и той же точке пространства, это выражение в силу (18) при $x = 0$ имеет особенность типа $\delta'(x)$ и становится неопределенным. Таким образом, на вопрос о том, какую линейную комбинацию выражений $P_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} P_\alpha$ следует брать в подынтегральном выражении для G_k, нельзя ответить заранее.

Если операторы, отвечающие переменным поля, представлены матрицами и, в частности, если матрицы энергии $\overline{H}$ и импульса G_k приведены к *диагональной форме*, то для произвольного элемента F_{nm} величины F в силу (21) и (23) будут выполняться дифференциальные уравнения:

$$\dot{F}_{nm} = \frac{2\pi i}{h}(\overline{H}_n - \overline{H}_m) F_{nm}, \qquad \frac{\partial F_{nm}}{\partial x_k} = -\frac{2\pi i}{h}(G_{k,n} - G_{k,m}) F_{nm}.$$

Вследствие этого зависимость элемента F_{nm} от пространства и времени с необходимостью будет иметь вид гармонической волны

$$F_{nm} = a_{nm} \exp\left\{\frac{2\pi i}{h}[(\overline{H}_n - \overline{H}_m)t - (\mathfrak{G}_n - \mathfrak{G}_m)\mathfrak{r}]\right\}, \tag{25}$$

если под $\mathfrak{G}$ понимать вектор импульса с компонентами G_k. Независимо от конкретного представления операторов при повторном применении (21) и (23) для каждой величины F получаем известным способом, что

$$F(x_1', x_2', x_3', t) = \exp\left\{\frac{2\pi i}{h}[\overline{H}(t'-t) - (\mathfrak{G}, \mathfrak{r}' - \mathfrak{r})]\right\} \times$$
$$\times F(x_1, x_2, x_3, t) \exp\left\{-\frac{2\pi i}{h}[\overline{H}(t'-t) - (\mathfrak{G}, \mathfrak{r}' - \mathfrak{r})]\right\}. \tag{26}$$

В заключение этого параграфа следует еще упомянуть в качестве метода интегрирования уравнений разложение переменных поля по собственным колебаниям. Этот метод оказался единственным практически осуществимым методом. Переменные поля как функции пространственных координат разлагают по ортогональной системе:

$$P_\alpha = \sum_\alpha a_{\alpha\rho}(t)\, u_\rho(x_1, x_2, x_3), \qquad Q_\alpha = \sum_\rho b_{\alpha\rho}(t)\, u_\rho^*(x_1, x_2, x_3), \tag{27}$$

где

$$\int u_\rho u_\sigma^* dV = \delta_{\rho\sigma}, \tag{28}$$

а формулы обращения имеют вид:

$$a_{\alpha\rho}(t) = \int P_\alpha u_\rho^*(x_1, x_2, x_3)\, dV, \qquad b_{\alpha\rho}(t) = \int Q_\alpha u_\rho(x_1, x_2, x_3)\, dV. \tag{27'}$$

Здесь u_ρ следует считать с-функциями, а a_ρ и b_ρ так же, как и P_α и Q_α,— q-числами.

Дискретности ортогональной системы можно добиться, либо рассматривая поле в полости, на стенках которой должны выполняться определенные краевые условия (стоячие волны), либо, как это принято делать, например, в теории кристаллической решетки, ограничиваясь рассмотрением периодических полей с достаточно большим периодом (бегущая волна).

Перестановочные соотношения для a и b получаем из (II)

$$[a_{\alpha\rho}, b_{\beta\sigma}] = \int [P_\alpha, Q'_\beta]\, u_\rho^* u'_\sigma dV dV' = \frac{h}{2\pi i}\delta_{\alpha\beta}\int u_\rho^* u_\sigma dV.$$

Их канонический вид определяется соотношением (28)

$$[a_{\alpha\rho}, b_{\beta\sigma}] = \frac{h}{2\pi i}\,\delta_{\alpha\beta}\delta_{\rho\sigma}. \tag{29}$$

Функция Гамильтона $\overline{H}$ переходит в некоторую функцию от a и b, что позволяет получить канонические уравнения в этих переменных. Разумеется, в выборе ортогональной системы имеется полная свобода. Если ее удается выбрать так, чтобы переменные в $\overline{H}$ разделились, то все матрицы вычисляются без труда. В противном случае, выбрав подходящую исходную систему, приходится обращаться к теории возмущений либо с помощью введения шредингеровских функций $\varphi\ (b_1,\ b_2, \ldots)$, либо с помощью первоначальных методов матричной теории.

§ 3. Релятивистская инвариантность перестановочных соотношений в случае инвариантной функции Лагранжа

До сих пор речь шла исключительно о п.с., связывающих значения полевых величин, относящиеся к двум точкам пространства и одному и тому же моменту времени. Тем не менее уравнения поля (I) неявно определяют п.с. для двух различных моментов времени. От любой приемлемой

теории следует требовать, чтобы при условии релятивистской инвариантности функции Лагранжа п.с. также сохраняли свой вид при переходе от одной системы координат к другой с помощью преобразования Лоренца. Задача этого параграфа и состоит в том, чтобы доказать, что это условие выполнено.

Если мы совершаем переход от одной системы координат к другой с помощью преобразования Лоренца, то значения коммутаторов в (II) изменяются по двум причинам. Во-первых, величины P_α и Q_α в общем случае не являются скалярами и, следовательно, в данной мировой точке както преобразуются. Во-вторых, в штрихованной системе координат в п.с. предполагается другая мировая точка по сравнению с нештрихованной системой, однако координата t' имеет то же значение, что и t. Изменение коммутатора, обусловленное последним обстоятельством, было бы очень трудно вычислить, поскольку мы не смогли бы установить общих формул для обеих рассматриваемых точек, если бы речь шла о конечной разности времени. Однако эту трудность все же удается обойти, если ограничиться бесконечно малыми преобразованиями Лоренца. Действительно, в этом случае любую физическую величину $f(t)$ можно заменить разложением $f(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(t' - t)$ и считать, что $\partial f/\partial t$ так же, как и соответствующие п.с., можно брать из (I). В силу группового свойства множества этих преобразований отсюда автоматически будет следовать инвариантность системы уравнений и относительно конечных преобразований. Поэтому ниже, при рассмотрении бесконечно малых преобразований Лоренца, мы будем поступать так: вычислять изменения коммутаторов, обусловленные каждым из названных двух обстоятельств в отдельности, а затем исследовать, при каких условиях эти изменения компенсируют друг друга.

Если начать обсуждение с первой из названных причин изменения коммутатора, то прежде всего необходимо сделать общие замечания относительно характера преобразования величин P_α и Q_α при преобразованиях Лоренца. Целесообразно ввести мнимую временну́ю координату $x_4 = ict$, а вместо величин, ранее обозначенных через P_α,— величины

$$P_{\alpha 4} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_4}} = icP_\alpha \tag{30}$$

так, что

$$\frac{\partial P_{\alpha 4}}{\partial x_4} = \dot{P}_\alpha = -\frac{\delta \overline{H}}{\delta Q_\alpha}, \qquad \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_4} = \frac{1}{ic}\dot{Q}_\alpha = \frac{1}{ic}\frac{\delta \overline{H}}{\delta P_\alpha} = \frac{\delta \overline{H}}{\delta P_{\alpha 4}}, \tag{30'}$$

$$[P_{\alpha 4}, \overline{Q}_\beta] = \frac{hc}{2\pi}\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}). \tag{31}$$

Пространственно-временну́ю точку Q_β мы будем теперь обозначать тем же символом с чертой сверху, чтобы сохранить штрих для обозначения перехода к другой системе координат. Наряду с $P_{\alpha 4}$ будут встречаться

в дальнейшем формально аналогичные величины $P_{\alpha i}$, введенные еще в (9):

$$P_{\alpha i} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} = -\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}},$$

для которых, однако, не выполняется простое п.с. с Q_β и $P_{\beta 4}$ типа п.с. (31). Следует особо подчеркнуть, что в общем случае вследствие неперестановочности некоторых множителей в H нельзя гарантировать совпадение обоих выражений для $P_{\alpha i}$, входящих в (9). Аргументацию, применявшуюся при выводе (9), можно непосредственно использовать лишь при условии, что L — квадратичная относительно $\dot{Q}_\alpha$ и $\partial Q_\alpha/\partial x_i$ форма с постоянными коэффициентами. В этом случае

$$P_{\alpha\mu} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\mu}}, \tag{32}$$

причем здесь и далее индексы μ, ν,. . . принимают значения от 1 до 4 в отличие от латинских индексов, которые относятся только к пространственным координатам и принимают значения от 1 до 3, и в отличие от индексов α, β,. . ., позволяющих различать величины $P_{\alpha 4}$ и Q^β. Никаких специальных предположений ни о числе последних величин, ни о законе, по которому они преобразуются, мы не делаем. Однако из (32) нетрудно заключить следующее [16]: если величины Q при ортогональном преобразовании координат (по индексам, встречающимся дважды, предполагается суммирование)

$$x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu, \qquad a_{\mu\rho}a_{\nu\rho} = \delta_{\nu\mu}, \tag{33}$$

преобразуются по закону

$$Q'_\alpha = A_{\alpha\beta}Q_\beta, \tag{34}$$

то $P_{\alpha\mu}$ преобразуются по закону

$$P'_{\alpha\mu} = a_{\mu\nu}B_{\alpha\beta}P_{\beta\nu}, \tag{35}$$

причем коэффициенты B связаны с коэффициентами A соотношением

$$A_{\alpha\gamma}B_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{36}$$

Оно означает, что B — матрица, обратная транспонированной матрице A. Отсюда следует, что P и Q всегда можно свернуть по одинаковым индексам так, что, например, $\sum_\alpha P_{\alpha\mu}Q_\alpha$ будет вектором, а $\sum_\alpha P_{\alpha\mu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\nu}$ — тензором.

Если от конечных преобразований перейти к инфинитезимальным, для которых $a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon s_{\mu\nu}$, $A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon t_{\alpha\beta}$ и в силу (33) и (36) $s_{\mu\nu} =$

[16] Вывод остается в силе независимо от того, содержит L в явном виде наряду с $\dot{Q}_\alpha$ еще и $P_{\alpha 4}$ или нет.

$= -s_{\nu\mu}$, $s_{\nu\nu} = 0$, $B_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \varepsilon t_{\beta\alpha}$, а величины порядка ε^2 отброшены, то из (33) — (35) будет следовать, что

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon s_{\mu\nu} x_\nu, \qquad s_{\mu\nu} = -s_{\nu\mu}, \tag{33'}$$

$$Q'_\alpha = Q_\alpha + \varepsilon t_{\alpha\beta} Q_\beta, \tag{34'}$$

$$P'_{\alpha\mu} = P_{\alpha\mu} - \varepsilon t_{\beta\alpha} P_{\beta\mu} + \varepsilon s_{\mu\nu} P_{\alpha\nu}. \tag{35'}$$

Вычислим теперь коммутатор штрихованных переменных поля, причем мировые точки (x_μ) и ($\bar{x}_\mu$), в которых следует брать переменные пóля, сначала будем предполагать фиксированными. Тогда

$$[Q'_\alpha, \bar{Q}'_\beta] = [Q_\alpha, \bar{Q}_\beta] + \varepsilon t_{\alpha\gamma} [Q_\gamma, \bar{Q}_\beta] + \varepsilon t_{\beta\delta} [Q_\alpha, \bar{Q}_\delta],$$

$$[P'_{\alpha 4}, \bar{Q}'_\beta] = [P_{\alpha 4}, \bar{Q}_\beta] + \varepsilon s_{4\nu} [P_{\alpha\nu}, \bar{Q}_\beta] - \varepsilon t_{\gamma\alpha} [P_{\gamma 4}, \bar{Q}_\beta] + \varepsilon t_{\beta\gamma} [P_{\alpha 4}, \bar{Q}_\gamma],$$

$$[P'_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta 4}] = [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta 4}] + \varepsilon s_{4\nu} [P_{\alpha\nu}, \bar{P}_{\beta 4}] + \varepsilon s_{4\nu} [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta\nu}] - \\ - \varepsilon t_{\gamma\alpha} [P_{\gamma 4}, \bar{P}_{\beta 4}] - \varepsilon t_{\gamma\beta} [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\gamma 4}].$$

Эти выражения существенно упрощаются, если для нештрихованной системы координат подставить значения (II) и соответственно (31) коммутаторов. Действительно, в результате такой подстановки все члены, содержащие множитель $t_{\alpha\beta}$, обращаются в нуль. В первом и последнем равенствах это тривиально; во втором равенстве члены с $t_{\alpha\beta}$ (с точностью до постоянного общего множителя) дают вклад

$$-t_{\gamma\alpha}\delta_{\gamma\beta} + t_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\gamma} = -t_{\beta\alpha} + t_{\beta\alpha} = 0.$$

Таким образом, остаются лишь члены с $s_{4\nu}$. Так как $s_{44} = 0$, то ν можно заменить индексом k, принимающим значения от 1 до 3, так что

$$[Q'_\alpha, \bar{Q}'_\beta] = 0,$$

$$[\bar{P}'_{\alpha 4}, Q'_\beta] = \frac{hc}{2\pi}\,\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')\,\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon s_{4k} [P_{\alpha k}, \bar{Q}_\beta], \tag{37}$$

$$[\bar{P}'_{\alpha 4}, \bar{P}'_{\beta 1}] = \varepsilon s_{4k} [P_{\alpha k}, \bar{P}_{\beta 4}] + \varepsilon s_{4k} [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta k}].$$

Теперь мы можем перейти к вычислению второй части изменения коммутатора — той, что связана с изменением мировой точки. Начало системы координат можно поместить в одной из двух мировых точек, положение которой после этого фиксируется. В какой из двух мировых точек помещать начало координат, не имеет значения, поскольку уже показано, что переход от сечения $t = \mathrm{const}$ к *параллельному* соседнему сечению в четырехмерном мире не изменяет п.с. Если в качестве начала выбрать первую точку P, то вторая точка $\bar{P}$ в нештрихованной системе координат будет иметь координаты $x_i = \bar{x}_i$, $x_4 = 0$, в то время как точка $\bar{P}'$ будет иметь те же координаты $x'_i = \bar{x}_i$, $x'_4 = 0$ в штрихованной системе. Таким образом, в нештрихованной системе точка $\bar{P}$ имеет координаты ($\bar{x}_i$, 0), а точка $\bar{P}'$ вследствие того, что $x_4 = 0$,— координаты ($\bar{x}_i - \varepsilon s_{ik}\bar{x}_k$, $\bar{x}_k - \varepsilon s_{4k}\bar{x}_k$).

Следовательно, для любых двух величин F_1 и F_2

$$[F_1(P), F_2(\bar{P}')] = [F_1(P), F_2(\bar{P})] - \varepsilon s_{\nu k}\bar{x}_k\left[F_1(P), \frac{\partial F_2(\bar{P})}{\partial \bar{x}_\nu}\right].$$

Если теперь мы не будем фиксировать начало системы координат, то полное изменение коммутаторов будет определяться формулами:

$$[Q'_\alpha, Q'_\beta(\bar{P}')] - [Q_\alpha, Q_\beta(\bar{P})] = -\varepsilon s_{\nu k}(\bar{x}_k - x_k)\left[Q_\alpha, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial \bar{x}_\nu}\right],$$

$$[P'_{\alpha 4}, Q'_\beta(\bar{P}')] - [P_{\alpha 4}, Q_\beta(\bar{P})] = -\varepsilon s_{\nu k}(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial \bar{x}_\nu}\right] + \varepsilon s_{4k}[P_{\alpha k}, \bar{Q}_\beta], \quad (38)$$

$$[P'_{\alpha 4}, P'_{\beta 4}(\bar{P}')] - [P_{\alpha 4}, P_{\beta 4}(\bar{P})] =$$
$$= -\varepsilon s_{\nu k}(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{P}_{\beta 4}}{\partial \bar{x}_\nu}\right] + \varepsilon s_{4k}\{[P_{\alpha k}, \bar{P}_{\beta 4}] + [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta k}]\}.$$

Здесь следует заметить, что индекс суммирования ν в членах с $s_{\nu k}$ можно ограничить значением 4. Для первого и последнего равенств это тривиально, поскольку соответствующие коммутаторы обращаются в нуль; для среднего же равенства это следует из того, что члены с $(\bar{x}_k - x_k)$ необходимо удерживать лишь тогда, когда этот множитель уничтожается соответствующей производной от δ-функции по x_k (последнее обстоятельство важно для дальнейшего). При $\nu = 1, 2, 3$ коммутатор $\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial Q_\beta}{\partial \bar{x}_\nu}\right]$ пропорционален $\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')$, в то время как при $\nu = k$ соответствующий член обращается в нуль вследствие того, что $s_{kk} = 0$. Таким образом, и в этом случае остается лишь $\nu = 4$.

Если требуется, чтобы п.с. (II) выполнялись и для непараллельного соседнего сечения $t' = \mathrm{const}$, то для всех антисимметричных $s_{\mu\nu}$, а следовательно и для всех s_{4k}, члены с ε в выписанных нами формулах должны компенсировать друг друга. Это означает, что должны выполняться равенства:

$$(\bar{x}_k - x_k)\left[Q_\alpha, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial x_4}\right] = 0,$$

$$(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial x_4}\right] = [P_{\alpha k}, \bar{Q}_\beta], \quad (39)$$

$$(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{P}_{\beta 4}}{\partial x_4}\right] = [P_{\alpha k}, \bar{P}_{\beta 4}] + [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta k}].$$

Приступим теперь к проверке равенств (39) в предположении, что H не содержит пространственных производных от P. В этом случае первое

равенство будет выполняться автоматически, так как коммутатор $\left[Q_\alpha, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial x_4}\right]$ содержит только δ-функцию, но не ее пространственные производные. Проверка второго равенства также не составляет труда. Прежде всего, согласно (II) и (19) правую часть можно преобразовать к виду

$$\frac{2\pi}{hc}[P_{\alpha k}, \bar{Q}_\beta] = \frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial P_{\beta 4}}\,\delta(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}) = -\frac{\partial^2 H}{\partial P_{\beta 4}\,\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}}\,\delta(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}),$$

а левую — к виду

$$\frac{2\pi}{hc}(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial x_4}\right] = \frac{2\pi}{hc}(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{P}_\beta}\right] =$$
$$= (\bar{x}_k - x_k)\frac{\partial}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial P_\beta}\,\delta + (\bar{x}_k - x_k)\sum_i \frac{\partial}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\frac{\partial H}{\partial P_\beta}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\,\delta.$$

Так как множитель $(\bar{x}_k - x_k)$ должен компенсироваться соответствующей производной от δ-функции, то после взятия частной производной от $(\bar{x}_k - x_k)$ останется лишь

$$-\frac{\partial}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}}\frac{\partial H}{\partial P_\beta},$$

что совпадает со значением правой части [17]. Несколько более длинных выкладок требует последнее из равенств (39). Прежде всего, из (19) следует, что правая часть этого равенства равна

$$\frac{2\pi}{hc}\{[P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta 4}] + [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta k}]\} = \left(-\frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial Q_\beta} + \frac{\partial P_{\beta k}}{\partial Q_\alpha}\right)\delta +$$
$$+\sum_i\left(\frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}} + \frac{\partial P_{\beta k}}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\,\delta = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Q_\beta\,\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} - \frac{\partial^2 H}{\partial Q_\alpha\,\partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_k}}\right)\delta -$$
$$-\sum_i\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}\,\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\,\partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_k}}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\,\delta. \qquad (*)$$

---

[17] Перестановочность операций дифференцирования по различным переменным выполняется и при дифференцировании по матрицам, как следует из определения этой операции, данного в предыдущем параграфе.

Левая же часть равенства (39) равна

$$\frac{2\pi}{hc}(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{P}_{\beta 4}}{\partial x_4}\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{hc}(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, -\frac{\partial H}{\partial Q_\beta}\right] + \frac{2\pi}{hc}(\bar{x}_k - x_k)\sum_i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{H}}{\partial \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 H}{\partial Q_\beta \partial \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}}\delta + (\bar{x}_k - x_k)\sum_i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial^2 H}{\partial Q_\beta \partial \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}\delta + \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x_j}\partial \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}\frac{\partial \delta}{\partial \bar{x}_j}\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Q_\beta \partial \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} - \frac{\partial^2 H}{\partial Q_\alpha \partial \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial x_k}}\right)\delta - \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\frac{\partial^2 H}{\partial \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}\partial \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}\right)\delta +$$

$$+ \sum_i \sum_j (\bar{x}_k - x_k)\frac{\partial^2 \delta}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j}\frac{\partial^2 H}{\partial \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x_j}\partial \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}.$$

Здесь первый член уже совпадает с соответствующим членом в (*), в то время как последний отличен от нуля лишь при $i = k$ или $j = k$. В первом случае он дает вклад, равный

$$-\sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\partial \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial x_k}}\frac{\partial \delta}{\partial \bar{x}_i},$$

во втором —

$$-\sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}\partial \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}\frac{\partial \delta}{\partial \bar{x}_i},$$

что в точности совпадает с теми членами в (*), которые умножены на $\partial\delta/\partial\bar{x}_i$. Остается единственный член

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}\partial \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}\right)\delta(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}).$$

Обращение его в нуль, очевидно, должно представлять особое, дополнительное условие, связанное с релятивистской инвариантностью п. с.:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}\partial \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}\right) = 0. \qquad (40)$$

Правда, это условие выполняется не для любой релятивистски-инвариантной функции Лагранжа L и соответствующей функции Гамильтона H; но для тех L, для которых справедливы уравнения (9), оно выполняется. Именно такие функции и будут встречаться в физических приложениях. В этом случае члены, квадратичные относительно пространственных производных от Q_α (члены более высоких порядков вообще не будут встречаться), всегда имеют постоянные коэффициенты. Таким образом, инвариантность п. с. доказана нами в объеме, достаточном для дальнейшего.

Из вида п.с. следует, что коммутаторы обращаются в нуль для всех мировых точек, разделенных пространственно-подобным интервалом ($\sum_i \Delta x_i^2 - c^2\Delta t^2 > 0$) *конечной* длины (инфинитезимальный характер п. с.). Из других соображений ясно, что для точек, лежащих на световом конусе или разделенных временно-подобным интервалом, такое положение обычно не сохраняется: на сей раз значения коммутаторов будут отличны от нуля и для точек, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, причем выписать их в явном виде удается лишь в частных случаях. В квантовой механике это означает, что координата $q\,(t)$, отвечающая моменту времени t, не перестановочна с координатой, отвечающей моменту времени t', причем соответствующий коммутатор в общем случае нельзя выписать в явном виде.

Далее, из (21) и (23) следует, что

$$\begin{aligned} J_k &= -icG_k = \int \sum_\alpha P_{\alpha 4} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} dV, \\ J_4 &= \int \Bigl(\sum_\alpha P_{\alpha 4} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_4} - L\Bigr) dV = \overline{H} = E \end{aligned} \tag{41}$$

образуют компоненты 4-вектора, охватывающего полную энергию и полный импульс, и наши соотношения принимают следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu} = \frac{2\pi}{hc}\,[J_\nu, F]. \tag{42}$$

Векторный характер J_k мы установим позднее с помощью непосредственных вычислений.

II. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ВОЛН МАТЕРИИ

§ 4. Трудности электродинамики, квантование уравнений Максвелла, необходимость добавочных членов

Прежде всего попытаемся применить схему п. с., изложенную в предыдущей главе, к уравнениям электродинамики в вакууме. В этом случае физическими переменными состояния служат компоненты Φ_α 4-потенциала [$\Phi_i = \mathfrak{A}_i$, $\Phi_4 = i\Phi_0$], из которых при дифференцировании получают-

ся напряженности поля:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta},$$
$$F_{4k} = i\mathfrak{E}_k,\ (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3),\ F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}. \tag{43}$$

Как известно, остальные максвелловские уравнения электродинамики в вакууме

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \tag{44}$$

выводят путем вариации из принципа наименьшего действия

$$\delta \int L dV dt = 0,$$

если функцию Лагранжа выбрать в виде [18]

$$L = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2). \tag{45}$$

Следуя общим предписаниям первой главы, образуем импульс, канонически-сопряженный Φ_α:

$$P_{\alpha 4} = \frac{\partial L}{\partial \dfrac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_4}},$$

и найдем, что

$$P_{k4} = -F_{4k} (k = 1, 2, 3), \qquad P_{44} = 0. \tag{46}$$

Тождественное равенство нулю импульса, сопряженного Φ_4, представляет собой замечательное вырождение функций Лагранжа в электродинамике и приводит к специфическим трудностям. Прежде всего, P_{k4} нельзя более считать произвольными функциями пространственных координат в мировом сечении $t = \text{const}$, поскольку в этом сечении они оказываются связанными соотношением

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial P_{k4}}{\partial x_4} = -\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \tag{44'}$$

[вытекающим из (44) при $\alpha = 4$]. Поэтому, прежде чем применять канонические п.с. главы I [ср. также (30)], которые в нашем случае можно было

---

[18] По индексам, встречающимся дважды, всегда проводится суммирование, причем по каждому индексу — независимо от остальных. Греческие индексы принимают значения от 1 до 4, латинские — от 1 до 3. Кроме того, следует заметить, что в этой главе для напряженностей поля мы всюду используем единицы Хевисайда.

бы записать в виде

$$[\Phi_\alpha, \Phi'_\beta] = 0, \quad [F_{4i}, F'_{4k}] = 0,$$
$$[F_{4k}, \Phi'_\alpha] = \delta_{k\alpha} \frac{-hc}{2\pi} \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'), \tag{47}$$

следует убедиться, в какой мере они согласуются с дополнительным условием (44′). Мы тотчас же обнаружим, что для соотношений, написанных последними, оно не выполнено, ибо согласно этим соотношениям

$$\left[\frac{\partial F_{4k}}{\partial x_k}, \Phi'_i\right] = -\frac{hc}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'),$$

в то время как согласно (44′) это же выражение должно было бы обратиться в нуль. Правда, нам потребуются такие п.с., которые получаются из приведенных выше, если из них после дифференцирования исключить потенциалы, заменив их напряженностями поля:

$$[F_{ik}, F'_{lm}] = 0, \quad [F_{4i}, F'_{4k}] = 0,$$
$$[F_{4k}, F'_{lm}] = -\frac{hc}{2\pi}\left(\delta_{kl} \frac{\partial \delta}{\partial x_m} - \delta_{km} \frac{\partial \delta}{\partial x_l}\right), \tag{47′}$$

или в трехмерной записи:

$$[\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}'_k] = 0, \quad [\mathfrak{E}_i, \mathfrak{E}'_k] = 0,$$
$$[\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}'_2] = -[\mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}'_1] = \frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \delta}{\partial x_3}. \tag{47″}$$

Из только что выписанных соотношений уже вытекает, что, как и следовало ожидать,

$$\left[\sum_k \frac{\partial F_{k4}}{\partial x_k}, F'_{lm}\right] = \frac{-hc}{2\pi}\left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial^2 \delta}{\partial x_m \partial x_l}\right) = 0.$$

Перестановочные соотношения (47′) по существу эквивалентны квантованию электромагнитных волн, т. е. использованию представлений о квантах света. Это можно усмотреть, если ввести собственные колебания с помощью метода, указанного в конце § 2. Однако тот факт, что общая схема канонических п.с., развитая в главе I, не может быть непосредственно перенесена в электродинамику, остается неизменным.

При нашем подходе к релятивистской проблеме многих тел наличие частиц естественно учитывать прежде всего с помощью волн материи. Переход от классической теории к квантовой будет при этом происходить в два этапа: во-первых, переход от классической механики точки к волновым уравнениям квантовомеханической проблемы одного тела (одна частица в заданном электромагнитном поле) и интерпретация полученного дифференциального уравнения в духе классической теории сплошных сред; во-вторых, переход к проблеме многих тел, для чего 4-ток, обусловленный волнами материи, в соответствии с уравнениями Максвелла рассматривает-

ся как причина возникновения некоторого электромагнитного поля, после чего и материя, и электромагнитные волны (то и другое в обычном пространственно-временно́м мире) подвергаются квантованию. Этот метод приводит, однако, к тому, что принципиальные трудности, присущие любой из сформулированных к настоящему времени релятивистских теорий квантовомеханической проблемы одного тела и связанные с возможностью двух различных знаков у энергии при заданном импульсе, вытекающей из релятивистской формы закона сохранения энергии-импульса для частицы, переходят и в нашу теорию и остаются пока не решенными полностью.

Мы будем исходить из теории Дирака, учитывающей наличие спина у частицы. Поэтому, прежде чем переходить к дальнейшему обсуждению упоминавшихся трудностей электродинамики, рассмотрим кратко уравнения этой теории, поскольку эти уравнения будут играть у нас важную роль. Введем четыре функции ψ_ρ ($\rho = 1, \ldots, 4$) и четыре матрицы γ^μ четвертого порядка с элементами $\gamma^\mu_{\rho\sigma}$. Матрицы γ^μ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta_{\nu\mu}. \quad (48)$$

Функции ψ_ρ удовлетворяют уравнениям поля

$$\sum_\mu \sum_\sigma \gamma^\mu_{\rho\sigma} \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{e}{c} \Phi_\mu \right) \psi_\rho - imc\psi_\rho = 0. \quad (49)$$

Точно так же $\psi^\dagger_\rho$ удовлетворяют сопряженным уравнениям

$$\sum_\mu \sum_\sigma \gamma^\mu_{\sigma\rho} \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} \Phi_\mu \right) \psi^\dagger_\sigma + imc\psi^\dagger_\rho = 0. \quad (50)$$

При этом предполагается, что заряд электрона равен $-e$ (e — положительная величина). Мы утверждаем, что оба уравнения следуют из вариационного принципа

$$\delta \int L \, dV dt = 0,$$

если

$$L = -\sum_\mu \sum_\sigma \sum_\rho \left[\gamma^\mu_{\rho\sigma} \psi^\dagger_\rho \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + e\Phi_\mu \right) \psi_\sigma - imc^2 \psi^\dagger_\rho \psi_\rho \right], \quad (51)$$

а $\psi^\dagger$ и ψ варьируются независимо. Для уравнения (49) это утверждение тривиально, для уравнения (50) оно следует из того, что L отличается от

$$L' = +\sum_\mu \sum_\rho \sum_\sigma \left[\gamma^\mu_{\sigma\rho} \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \psi^\dagger_\sigma}{\partial x_\mu} - e\Phi_\mu \psi^\dagger_\sigma \right) \psi_\rho + imc^2 \psi^\dagger_\rho \psi_\rho \right] \quad (51')$$

лишь членами, которые можно записать в виде дивергенции, не дающими, следовательно, вклада в вариацию интеграла $\int L dV dt$:

$$L - L' = -\sum_\mu \sum_\rho \sum_\sigma \frac{hc}{2\pi i} \gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\psi^\dagger_\rho \psi_\sigma). \quad (52)$$

Важно заметить, что в этих выкладках $\psi^\dagger$ и ψ считаются не коммутирующими между собой и $\psi^\dagger$ всегда должна стоять слева от ψ. Так как для неварьируемого поля в силу (49) и (50) как L, так и L' обращаются в нуль, то это же справедливо и для разности $L - L'$. Следовательно, величину

$$s_\mu = (-e) \sum_{\rho, \sigma} \gamma^\mu_{\rho\sigma} \psi^\dagger_\rho \psi_\sigma \tag{53}$$

можно отождествить с вектором тока $\left(s_k = \frac{1}{c} i_k, \quad s_4 = i\rho\right)$, причем множитель $(-e)$ естественно появится вследствие отрицательности заряда электрона. Тогда соотношение

$$\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \tag{54}$$

будет выполняться как следствие уравнений (49) и (50). Кроме того, из (51) и (53) вытекает, что

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} = s_\mu. \tag{55}$$

Чтобы получить это соотношение, каждое из выражений (49) и (50) при составлении L умножалось еще на c.

Вариационный принцип, из которого были выведены уравнения Дирака, уже имеет гамильтонову форму(12), характеризующуюся независимым варьированием по P_α и Q_α и линейностью функции Лагранжа по $\dot{Q}_\alpha$ (в нашем случае — по $\partial\psi_\sigma/\partial x_4$). Следовательно,

$$P_{\sigma 4} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4}} = -\frac{hc}{2\pi i} \sum_\rho \gamma^4_{\rho\sigma} \psi^\dagger_\rho = -\frac{hc}{2\pi} \psi^*_\sigma.$$

Последнее обозначение связано с тем, что функцию ψ^*_ρ, сопряженную функции ψ_ρ, согласно дифференциальным уравнениям (49) и (50) можно выбрать в виде

$$\psi^*_\rho = \frac{1}{i} \sum_\rho \gamma^4_{\rho\sigma} \psi^*_\rho, \tag{56}$$

если γ^α — эрмитовы матрицы, так что выражение для плотности частиц будет определяться формулой

$$\frac{1}{(-e)} \frac{1}{i} s_4 = \sum_\rho \psi^*_\rho \psi_\rho. \tag{53'}$$

Перестановочные соотношения (II) и соответственно (31) принимают следующий простой вид:

$$\begin{gathered} [\psi_\rho, \psi'_\sigma] = 0, \\ [\psi_\rho, \psi^{*\prime}_\sigma] = \frac{1}{i} \sum_\tau \gamma^4_{\tau\sigma} [\psi_\sigma, \psi^{\dagger\prime}_\tau] = \delta_{\rho\sigma} \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'), \\ [\psi^*_\rho, \psi^{*\prime}_\sigma] = [\psi^\dagger_\rho, \psi^\dagger_\sigma] = 0. \end{gathered} \tag{57}$$

Закон, по которому преобразуются величины ψ_ρ и $\psi_\rho^\dagger$ при преобразованиях Лоренца, нет необходимости обсуждать отдельно. Достаточно заметить, что в соответствии с общими правилами § 3 релятивистскую инвариантность п. с. (57) можно считать доказанной.

Здесь уместно остановиться на хорошо известной особенности п.с. (57), состоящей в том, что они представляют собой лишь одну из двух формально равноправных возможностей: одна из них соответствует решениям обычных квантовомеханических уравнений, симметричным в конфигурационном пространстве (статистика Бозе — Эйнштейна), в то время как другая — антисимметричным решениям (статистика Ферми — Дирака), отвечающим соотношениям q-чисел, получающимся из (57) при замене в коммутаторах всех знаков минус на знак плюс. Следовательно, если ввести сокращенное обозначение

$$[F,\ G]_+ = FG + GF,$$

то

$$[\psi_\rho,\ \psi_\sigma^{*\prime}]_+ = \frac{1}{i}\sum_\tau \gamma^4_{\tau\sigma}\,[\psi_\rho,\ \psi_\tau^{\dagger\prime}]_+ = \delta_{\rho\sigma}\delta(\mathfrak{r},\ \mathfrak{r}'),$$

$$[\psi_\rho,\ \psi_\sigma^{\prime}]_+ = [\psi_\rho^*,\ \psi_\sigma^{*\prime}]_+ = [\psi_\rho^\dagger,\ \psi_\sigma^\dagger]_+ = 0. \tag{57a}$$

На изменениях, к которым приводят эти соотношения в общих уравнениях (19) и (20) из § 2, следует остановиться подробнее. Ясно, что в этих уравнениях знак в коммутаторе следует изменять на знак плюс, *если F линейна по ψ или $\psi^\dagger$ (либо по их производным)*. Нетрудно видеть, что все коммутаторы, встречавшиеся в § 3 при доказательстве инвариантности, удовлетворяют этому условию. Тем самым приведенное там доказательство переносится и на рассматриваемый здесь случай. Наоборот, перенесение результатов, полученных относительно F_1 и F_2, на F_1F_2 в доказательстве соотношений (19) требует осторожности. Действительно, проведенное там доказательство справедливо лишь для обычных коммутаторов со знаком минус:

$$[F_1F_2,\ Q_\alpha]_- = F_1\,(F_2Q_\alpha + Q_\alpha F_2) - (F_1Q_\alpha + Q_\alpha F_1)\,F_2,$$
$$[P_\alpha,\ F_1F_2]_- = (P_\alpha F_1 + F_1P_\alpha)\,F_2 - F_1\,(P_\alpha F_2 + F_2P_\alpha),$$

в то время как $[F_1F_2,\ Q_\alpha]_+$ и $[P_\alpha,\ F_1F_2]_+$ нельзя свести к соответствующим коммутаторам, которые бы содержали F_1 и F_2 в отдельности. Следовательно, если F — *билинейная форма* относительно $\psi^\dagger$, $\partial\psi^\dagger/\partial x_i$, ψ, $\partial\psi/\partial x_i$, в которой $\psi^\dagger$ стоит всегда слева от ψ, то для такой F соотношения (19) или (20) будут выполняться только при условии, что *коммутаторы понимаются в обычном смысле*, со знаком минус. Поэтому п.с. (21) и (23), и соответственно (42), для энергии и импульса выполняются с обычными коммутаторами, что имеет решающее значение для дальнейшего развития теории.

Итак, с точки зрения квантования волн и релятивистски-инвариантного рассмотрения проблемы многих тел обе разновидности решений, а именно статистика Бозе — Эйнштейна, с одной стороны, и принцип запрета (запрет тождественности) — с другой, с формальной стороны все еще

остаются абсолютно равноправными. Таким образом, мы не можем получить от природы удовлетворительного объяснения того, какой из двух возможностей следует отдать предпочтение [19]. Для протонов, как и для электронов, приходится вводить особые ψ-функции, которые, впрочем, коммутируют с ψ-функциями последних. Поскольку уравнение для протонов имеет в точности такой же вид, как и для электронов, с тем лишь различием, что $-e$ всюду следует заменить на $+e$, а m — на M, мы не будем останавливаться на них подробнее.

Теперь мы можем рассмотреть взаимодействие волн материи с электромагнитным полем, которое получается из вариационного принципа

$$\delta \int L dV dt = 0,$$

если вместо L подставить сумму двух слагаемых: $L^{(s)}$ — функции Лагранжа для излучения [равенство (45)] и $L^{(m)}$ — функции Лагранжа для материи [равенство (51)]. Вследствие (55) отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = s_\alpha,$$

если для s_α подставить выражение (53). Физически это означает, что этот вектор тока не только определяет действие внешнего поля на материю, но и выступает как источник поля. Здесь еще раз мы сталкиваемся с трудностями при выводе п.с., удовлетворяющих условию

$$\operatorname{div} E = \frac{1}{i} s_4 = \rho = (-e) \sum_\sigma \psi_\sigma^* \psi_\sigma.$$

Действительно, составим выражение

$$[\operatorname{div} E, \psi_\sigma^{*\prime}] = (-e)\, \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')\, \psi_\sigma^*,$$

справедливое как для (57), так и для (57а). Проинтегрировав [по (x_i)] это выражение по конечному объему, содержащему точку (x_i'), получим

$$\left[\int E_n\, df, \psi_\sigma^{*\prime}\right] = (-e)\, \psi_\sigma^{*\prime}.$$

Но это означает, что в том случае, если расстояние между пространственными точками (x_i) и (x_i') *конечно*, напряженность электрического поля E не коммутирует с полем материи ψ. Построение теории с такими неинфинитезимальными п.с. практически не представляется возможным, поскольку доказательство релятивистской инвариантности подобных п.с. было бы сопряжено с большими трудностями.

Однако эти трудности можно устранить с помощью искусственного приема — добавления к электродинамической функции Лагранжа $L^{(s)}$

[19] Гипотезы, высказанные в этой связи Иорданом (*P. Jordan*. Ergebnisse der exakten Wissenschaften, 1929, 7, 206), не соответствуют действительности. Впрочем, ни тот, ни другой тип волн материи не приводил бы к появлению в теории нулевой энергии.

малых дополнительных членов, которые также содержат лишь первые производные потенциалов Φ_α и не нарушают линейности уравнений поля, но позволяют сделать P_{44} не обращающимся тождественно в нуль. Затем с помощью канонических п.с. вычисляют модифицированные уравнения и лишь в конечных результатах физических приложений коэффициенты при дополнительных членах устремляют к нулю. Простейшая возможность выбора такого дополнительного члена заключается в том, чтобы положить

$$-L^{(s)} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \frac{\varepsilon}{2} (\mathrm{Div}\, \Phi)^2, \qquad \mathrm{Div}\, \Phi = \sum_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\alpha}. \tag{58}$$

Существует и другая возможность:

$$-L'^{(s)} = \frac{1}{4} (1+\varepsilon) F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Однако нетрудно показать, что разность вариаций интегралов от L и L' тождественно равна нулю. Правда, п.с. для этих двух случаев были бы несколько различны; однако все конечные физические результаты в пределе $\varepsilon \to 0$ были бы одними и теми же, поэтому в дальнейшем мы будем считать, что L имеет вид (58). В этом случае модифицированные уравнения Максвелла можно записать в виде

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathrm{Div}\, \Phi) = (1+\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathrm{Div}\, \Phi) - \Box \Phi_\alpha = s_\alpha. \tag{59}$$

Импульс, сопряженный потенциалу Φ_α, будет определяться по формулам

$$P_{k4} = -F_{4k}, \qquad P_{44} = \varepsilon\, \mathrm{Div}\, \Phi \tag{60}$$

вместо (46). Канонические п.с. будут иметь вид:

$$\begin{gathered} [\Phi_\alpha, \Phi'_\beta] = 0, \qquad [F_{4i}, F'_{4k}] = 0, \qquad [F_{4i}, \mathrm{Div}\, \Phi] = 0, \\ [F_{4i}, \Phi'_\alpha] = \delta_{i\alpha} \frac{-hc}{2\pi} \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'), \qquad [\mathrm{Div}\, \Phi, \Phi'_4] = \frac{1}{\varepsilon} \frac{hc}{2\pi} \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'). \end{gathered} \tag{61}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что выписанные ранее п.с. (47) остаются справедливыми, но их необходимо дополнить п.с., содержащими $\partial\Phi_4/\partial x_4$. Следовательно, соотношения (47′) или (47″) также будут справедливыми. Уравнения (59) при $\alpha = 4$ не будут содержать возмущений, так как в них входит вторая производная от Φ_4 по времени. В силу этого Φ_α и сопряженные им $P_{\alpha 4}$ в заданный момент времени можно по существу считать произвольными функциями пространства. Следует еще заметить, что теория уже не будет полностью инвариантной относительно таких преобразований потенциалов, которые оставляют неизменными напряженности поля:

$$\Phi'_\alpha = \Phi_\alpha + \frac{\partial \lambda}{\partial x_\alpha};$$

однако такая инвариантность сохранится, если на функцию λ наложить дополнительное условие:

$$\Box \lambda = \text{const}.$$

Рассуждения, приведенные в § 2, позволяют дать строгое доказательство релятивистской инвариантности п.с. (61) и для $\varepsilon \neq 0$.

В выражениях (58) и (51) для функций Лагранжа излучения и материи и соответствующих им канонических п.с. (61) и (57) или (57a) содержатся существенные предпосылки нашей теории. Дополним их выражениями для функции Гамильтона. Для излучения в силу (60) и (58) имеем

$$\begin{aligned} H^{(s)} &= P_{\nu 4} \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_4} - L^{(s)} = -F_{4k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_4} + \varepsilon \operatorname{Div} \Phi \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_\nu} + \\ &+ \frac{1}{4} F_{ik} F_{ik} - \frac{\varepsilon}{2} (\operatorname{Div} \Phi)^2 = -\frac{1}{2} F_{4k} F_{4k} + \frac{1}{4} F_{ik} F_{ik} - \\ &- F_{4k} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_k} + \frac{\varepsilon}{2} (\operatorname{Div} \Phi)^2 - \varepsilon \operatorname{Div} \Phi \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k}, \end{aligned} \tag{58'}$$

для материи в силу (51) и (56) —

$$\begin{aligned} H^{(m)} &= -\frac{hc}{2\pi i} \gamma^4_{\rho\sigma} \psi^\dagger_\rho \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4} - L^{(m)} = +\frac{hc}{2\pi i} \gamma^k_{\rho\sigma} \psi^\dagger_\rho \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} - imc^2 \psi^\dagger_\sigma \psi_\sigma + \\ &+ e\gamma^\mu_{\rho\sigma} \psi^\dagger_\rho \psi_\sigma \Phi_\mu = +\frac{hc}{2\pi i} \alpha^k_{\rho\sigma} \psi^*_\rho \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + \\ &+ mc^2 \alpha^\nu_{\rho\sigma} \psi^*_\rho \psi_\sigma + e\alpha^k_{\rho\sigma} \psi^*_\rho \psi_\sigma \Phi_\mu + ei\psi^*_\rho \psi_\rho \Phi_4, \end{aligned} \tag{51'}$$

если

$$\alpha^k = i\gamma^4\gamma^k, \; \alpha^4 = \gamma^4, \text{ причем } \alpha^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu = 2\delta_{\nu\mu}. \tag{48'}$$

Утверждения, содержащиеся в канонических п.с. для суммарного поля, следует дополнить еще одним: все электромагнитные полевые величины (потенциалы, напряженности поля и Div Φ) *коммутируют* со всеми полевыми величинами волн материи (ψ_ρ, $\psi^\dagger_\rho$) (взятыми в тот же момент времени). Это обстоятельство, существенно отличающее нашу теорию от теории Иордана и Клейна, выполняющейся в предельном случае при $c \to \infty$, сильно упрощает вычисления. С другой стороны, расщепление функции Лагранжа на два логически полностью независимых слагаемых, отвечающих волнам материи и световым волнам (если принять во внимание протоны, то таких слагаемых станет три), указывает на предварительный характер нашей теории и необходимость отказа от нее впоследствии в пользу единой теории волновых полей всех видов.

§ 5. О связи между уравнениями, полученными в этой работе, и прежними подходами к квантовой электродинамике полей в отсутствие зарядов

В опубликованной ранее работе Иордана и Паули [20] п.с. электродинамики для частного случая отсутствия заряженных частиц были сформулированы с несколько иной точки зрения. В ней рассматривались четырехмерные интегралы (по пространству и времени) с коммутаторами в подынтегральных выражениях; поэтому изложенную там точку зрения можно было бы охарактеризовать как четырехмерную. В той работе Δ-функция определялась с помощью соотношения

$$\int_{V_4} f(x\ldots t)\,\Delta(x\ldots t)\,dV\,dt = \\ = \int_{V_3^+} f(x_1\ldots x_3,\ ct=-r)\frac{1}{r}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 - \\ - \int_{V_3^-} f(x_1\ldots x_3,\ ct=r)\frac{1}{r}\,dx_1\,dx_2\,dx_3, \tag{62}$$

которое предполагалось справедливым для любой функции $f\,(x\ldots t)$ так, что эта Δ-функция имела особенности на световом конусе при $ct = -r$ и $ct = r$, причем противоположных знаков для прошлого и будущего. В этом смысле можно положить

$$\Delta\,(x\ldots t) = \frac{1}{r}\,[\delta\,(r+ct) - \delta\,(r-ct)], \tag{62'}$$

если под δ понимать обычную δ-функцию.

Возникает вопрос, что следует из соотношения (62′) для Δ-функции, если вместо четырехмерных интегралов по пространству-времени в соответствии с принятой нами точкой зрения всегда вводить лишь трехмерные интегралы по пространству при $t = 0$.

Прежде всего из (62) получим

$$\Delta = 0 \text{ для интегралов при } t = 0; \tag{63}$$

такое же равенство выполняется и для пространственных производных от Δ и ее второй производной по времени, поскольку соотношение

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2\Delta}{\partial x_\alpha^2} = 0$$

---

[20] *P. Jordan, W. Pauli.* Z. Phys., 1928, 47, 151. (Русск. пер. см. с. 7.— *Ред.*). Этот параграф не является необходимым для понимания последующего.

позволяет выразить ее через пространственные производные. Нечто более интересное получится, если с помощью (62′) рассмотреть $\frac{1}{c}\frac{\partial\Delta}{\partial t}$, ограничившись трехмерными интегралами. Прежде всего получим

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Delta}{\partial t} = \frac{2}{r}\,\delta'(r),$$

но это выражение допускает дальнейшие преобразования. Пусть $f(x_1, x_2, x_3)$ — произвольная функция пространственных координат. Требуется вычислить интеграл

$$\int f\frac{2}{r}\,\delta'(r)\,dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

Введем полярные координаты и обозначим функцию f, проинтегрированную по углам, через $\Phi(r)$:

$$\Phi(r) = \int f\,d\Omega, \text{ так что } \Phi(0) = 4\pi f(0).$$

Тогда

$$\int f\frac{2}{r}\,\delta'(r)\,dV = \int\limits_0^\infty \Phi(r)\,2\delta'(r)\,r\,dr.$$

Будем считать, что $\Phi(r)$ для отрицательных r продолжена как четная функция (так, что $\Phi(r)$ при $r=0$ остается непрерывной и $r\,\Phi(r)$ при $r=0$ имеет непрерывную производную). Поскольку $\delta'(r)$ — нечетная функция, мы можем записать, что

$$\int f\frac{2}{r}\,\delta'(r)\,dV = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi\delta'(r)\,r\,dr = -\frac{d}{dr}(r\Phi)\big|_{r=0} = -\Phi(0) = -4\pi f(0).$$

Таким образом, поскольку вычисленный интеграл для всех $f(x_1, x_2, x_3)$ имеет значение $-4\pi f(0)$, можно сказать, что равенство

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Delta}{\partial t} = -4\pi\delta(x_1, x_2, x_3) \tag{64}$$

выполняется для всех интегралов при $t = 0$.

Перестановочные соотношения для напряженностей полей, полученные в работе Иордана и Паули, а именно:

$$[\mathfrak{E}_i, \mathfrak{E}_k'] = [\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}_k'] = \frac{ihc}{8\pi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} - \delta_{ik}\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\Delta(P'-P),$$

$$[\mathfrak{E}_1, H_2'] = -[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{E}_2'] = \frac{ihc}{8\pi^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Delta(P'-P),$$

мы можем тотчас же преобразовать в применявшиеся нами п.с. (47″), которые по существу следуют из них в силу (63) и (64).

Четырехмерная трактовка обладает тем преимуществом по сравнению с трехмерной, что делает непосредственно очевидной релятивистскую инвариантность, в то время как при изложенном здесь трехмерном подходе ее приходится доказывать с помощью достаточно сложного метода (см. § 2). Однако существует ряд причин, по которым при формулировке п.с. следует отдавать предпочтение трехмерной трактовке. Во-первых, при четырехмерном подходе вследствие того, что вклад в интегралы от коммутаторов дают лишь бесконечно близкие точки, не очень ясно, каким должно быть обобщение на случай других волн, отличных от световых. Во-вторых, даже при рассмотрении свободных волн материи вследствие зависимости их фазовой скорости от длины волны наряду с трехмерным интегралом по световому конусу в определение соответствующей Δ-функции входит еще и четырехмерный интеграл по внутренней области этого конуса. Что же касается аналога Δ-функции для волн материи во внешнем электромагнитном поле, то, хотя ее свойства можно определить с помощью волнового уравнения, указать ее явный вид невозможно. Наконец, во всех физических приложениях рассматриваются лишь трехмерные интегралы по $t = \text{const}$; следовательно, трехмерная трактовка находится в более тесной связи с физическим содержанием теории, нежели четырехмерная.

§ 6. Дифференциальная и интегральная формы законов сохранения энергии и импульса для полного волнового поля

В главе I было показано, что при канонической форме уравнений поля всегда можно указать постоянные по времени объемные интегралы для полной энергии и полного импульса [см. равенства (7), (13) и (41)]:

$$J_\mu = \int \Big(\sum_\alpha P_{\alpha 4} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu 4} L \Big)\, dV, \tag{41'}$$

где J_ν при $\nu = 1,\ 2,\ 3$ — компоненты 4-вектора, имеющие смысл компонент импульса, умноженных на $-ic$, а $J_4 = \overline{H}$ — полная энергия. Однако там не было показано, может ли закон сохранения энергии и импульса выполняться в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{65}$$

где $T_{\mu\nu}$, как известно,— тензор напряжений и плотности энергии и импульса, откуда и следует постоянство

$$J_\mu = \int T_{\mu 4} dV. \tag{66}$$

Покажем здесь, что это действительно так, причем совпадают не подынтегральные выражения в (41′) и (66), а значения интегралов, если предположить, что остающийся (двумерный) поверхностный интеграл всегда равен нулю. Однако необходимо подчеркнуть, что для суммарного поля,

состоящего из электромагнитного поля и волн материи, следует ожидать настоящих законов сохранения.

Начнем с обсуждения вклада, вносимого волнами материи в тензор энергии. Он хорошо известен и был подробнейшим образом вычислен Тетроде [21]. Еще раз кратко напомним эти выкладки, обратив особое внимание на встречающуюся иногда неперестановочность отдельных сомножителей. Исходя из выражения (51) для той части функции Лагранжа, которая отвечает материи, и соотношения (55), попытаемся представить выражение $F_{\mu\nu}s_\nu$ для силы Лоренца в виде четырехмерной дивергенции. Прежде всего получим

$$F_{\mu\nu}s_\nu = \left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}\right) s_\nu = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} s_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\Phi_\mu s_\nu).$$

Здесь мы воспользовались уже упоминавшимся важным соотношением (54)

$$\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} = 0,$$

вытекающим из уравнений поля для волн материи. Учитывая (55), получаем

$$F_{\mu\nu}s_\nu = \frac{\partial L}{\partial \Phi_\nu}\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\Phi_\mu s_\nu). \tag{67}$$

Здесь существенно, что компоненты тока, поскольку их можно выразить через одни лишь ψ и $\psi^\dagger$, перестановочны со всеми электромагнитными величинами. Поэтому порядок сомножителей в (67) роли не играет. По той же причине (перестановочность $\partial\Phi_\nu/\partial x_\mu$ с ψ и $\psi^\dagger$) можно записать

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} = \frac{\partial L}{\partial \Phi_\nu}\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \psi_\rho^\dagger}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial \psi_\rho^\dagger} + \frac{\partial^2 \psi_\rho^\dagger}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_\rho^\dagger}{\partial x_\nu}} + \frac{\partial L}{\partial \psi_\rho}\frac{\partial \psi_\rho}{\partial x_\mu} + \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_\rho}{\partial x_\nu}}\frac{\partial^2 \psi_\rho}{\partial x_\nu \partial x_\mu},$$

причем следует обращать внимание на то, чтобы множители, содержащие $\psi^\dagger$, всегда стояли слева от множителей, содержащих ψ. Наконец, из равенства нулю вариации L следуют уравнения поля:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_\rho^\dagger} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_\rho^\dagger}{\partial x_\nu}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi_\rho} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_\rho}{\partial x_\nu}},$$

---

[21] *H. Tetrode.* Z. Phys., 1929, 49, 858.

так что из (67) окончательно получаем

$$F_{\mu\nu}s_\nu = -\frac{\partial\psi_\rho^\dagger}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\psi_\rho^\dagger}{\partial x_\nu}} - \frac{\partial^2\psi_\rho^\dagger}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\psi_\rho^\dagger}{\partial x_\nu}} - \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\psi_\rho}{\partial x_\nu}}\right)\frac{\partial\psi_\rho}{\partial x_\mu} - \frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\psi_\rho}{\partial x_\nu}}\frac{\partial^2\psi_\rho}{\partial x_\mu\partial x_\nu} + \frac{\partial L}{\partial x_\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\Phi_\mu s_\nu).$$

Это означает, что тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}^{(m)}$ для материи, определяемый выражением

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{\partial\psi_\rho^\dagger}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\psi_\rho^\dagger}{\partial x_\nu}} + \frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\psi_\rho}{\partial x_\nu}}\frac{\partial\psi_\rho}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu}L + \Phi_\mu s_\nu, \tag{68}$$

удовлетворяет соотношению

$$F_{\mu\nu}s_\nu = -\frac{\partial T_{\mu\nu}^{(m)}}{\partial x_\nu}. \tag{69}$$

Первый член в (68) пропадет, если в качестве L выбрать функцию (51); можно даже саму L положить равной нулю. Однако интересно упомянуть, что соотношение (69) останется справедливым и в том случае, если L в (68) заменить функцией L' [см. (51′)] или $(L + L')/2$. Выбирая в качестве L выражение (51), из (68) получаем

$$-T_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{hc}{2\pi i}\sum_{\rho,\sigma}\gamma_{\sigma\rho}^{\nu}\psi_\rho^\dagger\frac{\partial\psi_\rho}{\partial x_\mu} - \Phi_\mu s_\nu = \sum_{\rho,\sigma}\gamma_{\sigma\rho}^{\nu}\psi_\sigma^\dagger\left(\frac{hc}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_\mu} + e\Phi_\mu\right)\psi_{\nu\rho}. \tag{70}$$

Это выражение для $T_{\mu\nu}^{(m)}$ не симметрично относительно μ и ν. Как показал Тетроде, можно воспользоваться и симметризованным выражением для тензора энергии. Однако, поскольку оно приводит к тому же значению интеграла энергии и импульса, как и несимметризованное выражение (68) или (70), мы не будем останавливаться на нем более подробно [22].

Перейдем теперь к той части тензора энергии-импульса, которая связана с электромагнитным полем. Потребуем, чтобы эта часть, $T_{\mu\nu}^{(s)}$, наряду с соотношением (54) и

$$s_\nu = \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x_\rho} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathrm{Div}\,\Phi) \tag{59}$$

[22] Наоборот, при вычислении полного момента импульса следует пользоваться выражением для $T_{\mu\nu}^{(m)}$, симметричным по μ и ν.

для вектора тока удовлетворяла соотношению

$$\frac{\partial T^{(s)}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = F_{\mu\nu} s_\nu. \tag{71}$$

Если бы не было членов с ε, то в качестве $-T^{(s)}_{\mu\nu}$, как известно, можно было бы взять максвелловский тензор

$$S_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_{\mu\rho} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \delta_{\mu\nu}, \tag{72}$$

поскольку он удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = - F_{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x_\rho}, \tag{73}$$

при выводе которого следует принять во внимание (43). Таким образом, требуется найти добавочные члены, пропорциональные ε, которые позволят учесть второй член в выражении для тока. При этом необходимо иметь в виду, что согласно уравнениям

$$\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} = 0,$$

вытекающим из уравнений поля для волн материи, и уравнениям Максвелла (59) должно выполняться уравнение

$$\Box \operatorname{Div} \Phi = \sum_{\mu,\,\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \tag{74}$$

Мы утверждаем, что в формуле (72) добавочные члены $\varepsilon \Sigma_{\mu\nu}$ с

$$\Sigma_{\mu\nu} = \overline{\Phi_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\operatorname{Div} \Phi)} + \overline{\Phi_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\operatorname{Div} \Phi)} - \overline{\frac{\partial}{\partial x_\rho} (\Phi_\rho \operatorname{Div} \Phi)}\, \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\operatorname{Div} \Phi)^2 \delta_{\mu\nu} \tag{75}$$

позволяют добиться желаемого (черта сверху означает симметризацию, производимую вследствие неперестановочности сомножителей). Действительно,

$$\frac{\partial \Sigma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \overline{(\operatorname{Div} \Phi) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \operatorname{Div} \Phi} + \overline{\Phi_\nu \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu} (\operatorname{Div} \Phi)} + \overline{\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}\, \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\operatorname{Div} \Phi)} - \overline{\Phi_\mu \Box \operatorname{Div} \Phi} - \overline{\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\operatorname{Div} \Phi)} - \overline{\operatorname{Div} \Phi \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\operatorname{Div} \Phi)} - \overline{\Phi_\nu \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu} (\operatorname{Div} \Phi)}.$$

Если принять во внимание соотношение (74), то из всего этого выражения останется лишь

$$\frac{\partial \Sigma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \left(\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathrm{Div}\,\Phi) = -F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathrm{Div}\,\Phi). \tag{76}$$

Следовательно, воспользовавшись выражением (58) для $L^{(s)}$, мы получим соотношение

$$-T^{(s)}_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + \varepsilon\Sigma_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu\rho} + \varepsilon\,\overline{\Phi_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\mathrm{Div}\,\Phi)} + \\ + \varepsilon\,\overline{\Phi_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathrm{Div}\,\Phi)} - \varepsilon\,\overline{\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\Phi_\rho\,\mathrm{Div}\,\Phi)}\,\delta_{\mu\nu} + L^{(s)}\delta_{\mu\nu}, \tag{77}$$

которое в действительности совпадает с равенством (71). С помощью уравнений (59) это выражение можно преобразовать к виду

$$-T^{(s)}_{\mu\nu} = F_{\nu\rho}\frac{\partial \Phi_\rho}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\rho}(\Phi_\mu F_{\nu\rho}) - \varepsilon\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu}\,\mathrm{Div}\,\Phi + \Phi_\mu s_\nu + \\ + \varepsilon\,\overline{\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\Phi_\nu\,\mathrm{Div}\,\Phi)} - \varepsilon\,\overline{\frac{\partial}{\partial x_\rho}(\Phi_\rho\,\mathrm{Div}\,\Phi)}\,\delta_{\mu\nu} + L^{(s)}\delta_{\mu\nu}. \tag{77'}$$

Существенно, что при сложении (77') *и* (68) *члены с* $\Phi_\mu s_\nu$ *взаимно уничтожаются.* В отличие от суммы

$$T_{\mu\nu} = T^{(m)}_{\mu\nu} + T^{(s)}_{\mu\nu}, \tag{78}$$

которая вследствие (69) и (71) удовлетворяет закону сохранения (65), подынтегральное выражение в (41), если учесть значение импульса (60) электромагнитного поля при $\nu = 4$, в конечном счете позволяет найти соотношение

$$T^{(s)}_{\mu 4} + T^{(m)}_{\mu 4} - \left(\sum_\alpha P_{\alpha 4}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\mu} - L\delta_{\mu 4}\right) = +\frac{\partial}{\partial x_\rho}(\Phi_\mu F_{4\rho}) - \\ - \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\Phi_4\,\mathrm{Div}\,\Phi) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_\rho}(\Phi_\rho\,\mathrm{Div}\,\Phi)\,\delta_{\mu 4}.$$

Однако здесь содержатся лишь *пространственные* производные, которые, следовательно, обращаются в нуль при интегрировании по пространственному объему. Для первого члена это тривиально, поскольку $F_{44} = 0$; для двух других усматривается непосредственно при $\mu = 1, 2, 3$, в то время как при $\mu = 4$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_4}(\Phi_4\,\mathrm{Div}\,\Phi) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_\rho}(\Phi_\rho\,\mathrm{Div}\,\Phi) = \varepsilon\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\Phi_k\,\mathrm{Div}\,\Phi).$$

Тем самым требуемое доказательство полностью завершено, и связь между дифференциальной и канонической интегральной формами законов

сохранения в нашем случае установлена. Одновременно еще раз доказан векторный характер величины J_k. Тем не менее следует подчеркнуть, что в приведенном выражении для электромагнитной части энергии и импульса содержится как нулевая энергия излучения, так и собственная энергия электронов и протонов, что не соответствует действительности [23]. В какой мере развитую здесь теорию, несмотря на этот принципиальный недостаток, все же можно применять к конкретным физическим проблемам, будет рассмотрено в следующей главе.

III. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 7. Вывод дифференциальных уравнений для амплитуд вероятности

В этой главе мы будем исходить при вычислениях из функции Гамильтона H, состоящей из двух частей (58′) и (51′), отвечающих излучению и волнам материи. При этом вместо мнимой временно́й координаты целесообразно ввести вещественную координату t по формуле $x_4 = ict$ и в соответствии с этим положить $\Phi_4 = i\Phi_0$. Имея в виду приложения, следует также перейти от единиц Хевисайда обратно к обычным единицам, заменяя величины Φ_μ на $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\Phi_\mu$, а s_μ, наоборот, на $\sqrt{4\pi}\, s_\mu$. Наконец, целесообразно еще ввести потенциалы Φ_μ^0 (C-числа) «приложенных» внешних сил, источник которых не считается принадлежащим системе. Например, имея в виду большую массу атомного ядра, часто удобно учитывать его действие в Φ_μ^0 и таким образом пренебрегать обратным действием.

С введением импульсов

$$\Pi_k = -\frac{1}{4\pi c}\mathfrak{E}_k = +\frac{1}{4\pi c}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_k}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_k}\right),$$
$$\Pi_0 = \frac{\varepsilon}{4\pi c}\operatorname{Div}\Phi = \frac{\varepsilon}{4\pi c}\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_k} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}\right), \tag{60′}$$

сопряженных по отношению к потенциалам Φ_μ, измеренным в обычных единицах, для которых п.с. имеют вид

$$[\Pi_\rho, \Phi'_\sigma] = \frac{h}{2\pi i}\delta_{\rho\sigma}\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'), \tag{61′}$$

[23] Как известно, Клейн и Иордан в своей теории с помощью перестановки некоторых сомножителей в выражении для энергии сумели исключить собственную энергию электронов. Эта перестановка эквивалентна добавлению к плотности энергии некоторых членов, содержащих коммутаторы $[\Phi_k, \psi]$. В нашей теории, где Φ_k и ψ в одной и той же временно́й точке коммутируют друг с другом, по-видимому, не существует простой аналогии искусственного приема Клейна — Иордана.

та часть функции Гамильтона, которая соответствует излучению, примет вид

$$\overline{H}^{(s)} = \int dV \left\{ \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right)^2 + 2\pi c^2 \Pi_k^2 - c \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_k} \Pi_k + \frac{2\pi c^2}{\varepsilon} \Pi_0^2 - c \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} \Pi_0 \right\}. \tag{79}$$

Та же часть функции Гамильтона, которая отвечает материи, соответственно будет

$$\overline{H}^{(m)} = \\ = \int dV \left[\frac{hc}{2\pi i} \alpha_{\rho\sigma}^k \psi_\rho^* \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + mc^2 \alpha_{\rho\sigma}^4 \psi_\rho^* \psi_\sigma + e(\Phi_k^0 + \Phi_k) \alpha_{\rho\sigma}^k \psi_\rho^* \psi_\sigma - e(\Phi_0^0 + \Phi_0) \psi_\rho^* \psi_\rho \right]. \tag{79a}$$

Как и прежде, соответствующие п.с. определяются формулами (57) и (57а):

а) для статистики Бозе — Эйнштейна

$$\psi_\rho(\mathfrak{r}) \psi_\sigma^*(\mathfrak{r}') - \psi_\sigma^*(\mathfrak{r}') \psi_\rho(\mathfrak{r}) = \delta_{\rho\sigma} \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'); \tag{57}$$

б) для принципа запрета (запрет тождественности)

$$\psi_\rho(\mathfrak{r}) \psi_\sigma^*(\mathfrak{r}') + \psi_\sigma^*(\mathfrak{r}') \psi_\rho(\mathfrak{r}) = \delta_{\rho\sigma} \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'). \tag{57a}$$

Чтобы получить решение квантовотеоретической проблемы, определяемой равенством (79а), ψ и Φ целесообразно разложить по соответствующим ортогональным системам. Для таких разложений естественно использовать классические решения тех уравнений поля, которые получаются при вычеркивании из (79а) членов, описывающих взаимодействия (т. е. членов вида $\psi^* \alpha \psi \Phi$).

Пусть требуется проинтегрировать уравнения Дирака для волн материи с потенциалами Φ_μ^0, которые, по предположению, должны быть постоянны по времени. [Если Φ_μ^0 содержит часть, переменную во времени, то этот член можно выделить особо и рассматривать его вместе с членами в равенстве (79), описывающими взаимодействие.] Каждому собственному значению E^s решенной «невозмущенной» задачи отвечает система собственных функций ($\rho = 1, 2, 3, 4$), нормированных в соответствии с равенством

$$\int dV u_\rho^{*r} u_\rho^s = \delta_{rs}. \tag{80}$$

Кроме того, выполняются «обратные» соотношения ортогональности

$$\sum_s u_\rho^{*s}(\mathfrak{r}) u_\sigma^s(\mathfrak{r}') = \delta_{\rho\sigma} \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'). \tag{80'}$$

Пусть тогда

$$\psi_\rho = \sum_s a_s u_\rho^s, \qquad \psi_\rho^* = \sum_s a_s^* u_\rho^{*s}. \tag{81}$$

Величины a удовлетворяют п.с.:

$$\begin{aligned} &\text{для статистики Бозе — Эйнштейна } a_s a_t^{+} - a_t^{+} a_s = \delta_{st}, \\ &\text{для принципа запрета } a_s \overset{*}{a}_t + \overset{*}{a}_t a_s = \delta_{st}. \end{aligned} \qquad (82)$$

Применим тот же метод к излучению в полости без взаимодействия с материей. По причинам, которые будут объяснены позднее, мы исходим при этом не из функции Гамильтона (79), а из несколько модифицированной функции (по индексам, встречающимся дважды, в дальнейшем всегда будет предполагаться суммирование)

$$H_0^{(s)} = \int dV \left\{ \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right)^2 + 2\pi c^2 \Pi_k^2 - c \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_k} \Pi_k + \frac{2\pi c^2}{\varepsilon + \delta} \Pi_0^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon c}{\varepsilon + \delta} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} \Pi_0 - \frac{\varepsilon \delta}{8\pi (\varepsilon + \delta)} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\delta}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_k} \right)^2 \right\}. \qquad (83)$$

Здесь δ — малый параметр. Попытаемся теперь найти решения классической волновой задачи, соответствующей п.с. (82). Для этого воспользуемся известными выражениями:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}}\, q_1^r \cos\frac{\pi}{L}\varkappa_r x \cdot \sin\frac{\pi}{L}\lambda_r y \cdot \sin\frac{\pi}{L}\mu_r z, \\ \Phi_2 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}}\, q_2^r \sin\frac{\pi}{L}\varkappa_r x \cdot \cos\frac{\pi}{L}\lambda_r y \cdot \sin\frac{\pi}{L}\mu_r z, \\ \Phi_3 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}}\, q_3^r \sin\frac{\pi}{L}\varkappa_r x \cdot \sin\frac{\pi}{L}\lambda_r y \cdot \cos\frac{\pi}{L}\mu_r z, \\ \Phi_0 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}}\, q_0^r \sin\frac{\pi}{L}\varkappa_r x \cdot \sin\frac{\pi}{L}\lambda_r y \cdot \sin\frac{\pi}{L}\mu_r z. \end{aligned} \qquad (84)$$

Здесь L — длина ребра полости (имеющей, по предположению, форму куба); $\varkappa_r$, λ_r, μ_r — целые числа, отвечающие колебанию с индексом r. Точно так же введем величины:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}}\, p_1^r \cos\frac{\pi}{L}\varkappa_r x \cdot \sin\frac{\pi}{L}\lambda_r x \cdot \sin\frac{\pi}{L}\mu_r z, \\ \Pi_2 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}}\, p_2^r \sin\frac{\pi}{L}\varkappa_r x \cdot \cos\frac{\pi}{L}\lambda_r y \cdot \sin\frac{\pi}{L}\mu_r z, \\ \Pi_3 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}}\, p_3^r \sin\frac{\pi}{L}\varkappa_r x \cdot \sin\frac{\pi}{L}\lambda_r y \cdot \cos\frac{\pi}{L}\mu_r z, \\ \Pi_0 &= \sqrt{\frac{8}{L^3}}\, p_0^r \sin\frac{\pi}{L}\varkappa_r x \cdot \sin\frac{\pi}{L}\lambda_r y \cdot \sin\frac{\pi}{L}\mu_r z. \end{aligned} \qquad (85)$$

При этом функция Гамильтона перейдет в

$$\bar{H}^{(s)} = 2\pi c^2\left(p_1^{r\,2} + p_2^{r\,2} + p_3^{r\,2} + \frac{1}{\varepsilon+\delta}p_0^{r\,2}\right) - \frac{c\pi}{L}q_0^r(\varkappa_r p_1^r + \lambda_r p_2^r + \mu_r p_3^r) +$$
$$+ \frac{\varepsilon c\pi}{L(\varepsilon+\delta)}p_0^r(q_1^r\varkappa_r + q_2^r\lambda_r + q_3^r\mu_r) - \frac{\pi}{8L^2}(q_1^r\varkappa_r + q_2^r\lambda_r + q_3^r\mu_r)^2\frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon+\delta} +$$
$$+ \frac{\delta\pi}{8L^2}q_0^{r\,2}(\varkappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2) +$$
$$+ \frac{\pi}{8L^2}[(q_1^r\lambda_r - q_2^r\varkappa_r)^2 + (q_1^r\mu_r - q_3^r\varkappa_r)^2 + (q_2^r\mu_r - q_3^r\lambda_r)^2]. \qquad (86)$$

Этой функции соответствуют канонические уравнения, которые после исключения p принимают вид:

$$\left(\frac{L}{c\pi}\right)^2\ddot{q}_1^r + (\varkappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2)q_1^r = (1+\varepsilon)\left(-\frac{L}{c\pi}\dot{q}_0^r + \varkappa_r q_1^r + \lambda_r q_2^r + \mu_r q_3^r\right)\varkappa_r,$$
$$\left(\frac{L}{c\pi}\right)^2\ddot{q}_2^r + (\varkappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2)q_2^r = (1+\varepsilon)\left(-\frac{L}{c\pi}\dot{q}_0^r + \varkappa_r q_1^r + \lambda_r q_2^r + \mu_r q_3^r\right)\lambda_r,$$
$$(87)$$
$$\left(\frac{L}{c\pi}\right)^2\ddot{q}_3^r + (\varkappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2)q_3^r = (1+\varepsilon)\left(-\frac{L}{c\pi}\dot{q}_0^r + \varkappa_r q_1^r + \lambda_r q_2^r + \mu_r q_3^r\right)\mu_r,$$
$$(1-\delta)\left[\left(\frac{L}{c\pi}\right)^2\ddot{q}_0^r + (\varkappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2)q_0^r\right] =$$
$$= -(1+\varepsilon)\left(-\frac{L}{c\pi}\ddot{q}_0^r + \varkappa_r\dot{q}_1^r + \lambda_r\dot{q}_2^r + \mu_r\dot{q}_3^r\right)$$

Уравнения (87) при каждом значении r (т. е. для каждого набора значений $\varkappa_r$, λ_r, μ_r) описывают движения связанных осцилляторов. Классическое решение этой задачи мы найдем, положив:

$$q_0^r = b_0\cos 2\pi\nu_r t, \qquad q_1^r = b_1\sin 2\pi\nu_r t,$$
$$q_2^r = b_2\sin 2\pi\nu_r t, \qquad q_3^r = b_3\sin 2\pi\nu_r t.$$

Тогда уравнение (87) перейдет в систему линейных уравнений с определителем (здесь $\frac{2L}{c}\nu_r = \nu_r'$, $X_r = \varkappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2 - \nu_r'^2$):

$$\begin{vmatrix} \frac{X_r}{1+\varepsilon} - \varkappa_r^2 & -\varkappa_r\lambda_r & -\varkappa_r\mu_r & -\varkappa_r\nu_r' \\ -\lambda_r\varkappa_r & \frac{X_r}{1+\varepsilon} - \lambda_r^2 & -\lambda_r\mu_r & -\lambda_r\nu_r' \\ -\mu_r\varkappa_r & -\mu_r\lambda_r & \frac{X_r}{1+\varepsilon} - \mu_r^2 & -\mu_r\nu_r' \\ +\nu_r'\varkappa_r & \nu_r'\lambda_r & \nu_r'\mu_r & \frac{X_r(1-\delta)}{1+\varepsilon} + \nu_r'^2 \end{vmatrix}. \qquad (88)$$

Полагая его равным нулю, находим тройной корень $\nu_r'^2 = \varkappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2$

и простой корень

$$\nu_r'^2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon\delta}{\varepsilon + \delta}(\varkappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2).$$

Обозначим эти четыре корня через $\nu_{r,1}$, $\nu_{r,2}$, $\nu_{r,3}$, $\nu_{r,0}$. Трехкратному корню $\nu_{r,1} = \nu_{r,2} = \nu_{r,3}$ отвечают три линейно-независимых решения, удовлетворяющих условию

$$b_1\varkappa_r + b_2\lambda_r + b_3\mu_r + b_0\nu'_{r,1} = 0. \tag{89}$$

Корню $\nu_{r,0}$ отвечает (ненормированное) решение

$$b_1 = \varkappa_r, \qquad b_2 = \lambda_r, \qquad b_3 = \mu_r, \qquad b_0 = -\frac{\nu_{r,0}}{1-\delta}. \tag{90}$$

В пределе при $\delta = 0$ будет выполняться равенство $\nu_{r,0} = \nu_{r,1}$, и четвертое решение не будет более линейно-независимым от первых трех. Следовательно, в этом случае существует лишь три собственных линейно-независимых периодических решения системы (87). Четвертое линейно-независимое решение системы (87) непериодично и может быть получено с помощью предельного перехода $\delta \to 0$ следующим образом. При $\delta \neq 0$ составим разность двух решений:

$$\begin{aligned}
q_1^r &= \varkappa_r \sin 2\pi\nu_{r,1}t, & q_1^r &= \varkappa_r \sin 2\pi\nu_{r,0}t,\\
q_2^r &= \lambda_r \sin 2\pi\nu_{r,1}t, & q_2^r &= \lambda_r \sin 2\pi\nu_{r,0}t,\\
q_3^r &= \mu_r \sin 2\pi\nu_{r,1}t, & q_3^r &= \mu_r \sin 2\pi\nu_{r,0}t,\\
q_0^r &= -\nu'_{r,1}\cos 2\pi\nu_{r,1}t, & q_0^r &= -\frac{\nu'_{r,0}}{1-\delta}\cos 2\pi\nu_{r,0}t,
\end{aligned}$$

в виде одного колебания:

$$\begin{aligned}
q_1^r &= 2\varkappa_r \cos 2\pi\frac{\nu_{r,1}+\nu_{r,0}}{2}t \sin 2\pi\frac{\nu_{r,1}-\nu_{r,0}}{2}t,\\
q_2^r &= 2\lambda_r \cos 2\pi\frac{\nu_{r,1}+\nu_{r,0}}{2}t \sin 2\pi\frac{\nu_{r,1}-\nu_{r,0}}{2}t,\\
q_3^r &= 2\mu_r \cos 2\pi\frac{\nu_{r,1}+\nu_{r,0}}{2}t \sin 2\pi\frac{\nu_{r,1}-\nu_{r,0}}{2}t,\\
q_0^r &= 2\nu'_{r,1} \sin 2\pi\frac{\nu_{r,1}+\nu_{r,0}}{2}t \sin 2\pi\frac{\nu_{r,1}-\nu_{r,0}}{2}t - \left(\nu'_{r,1} - \frac{\nu'_{r,0}}{1-\delta}\right)\cos 2\pi\nu_{r,0}t.
\end{aligned} \tag{91}$$

В пределе при $\delta \to 0$ корень $\nu_{r,0} = \nu_{r,1}\left(1 - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2\varepsilon}\right)$. Если величины q умножить на ε/δ и перейти к $\delta = 0$, то

$$\begin{aligned}
q_1^r &= 2\pi(1+\varepsilon)\nu_r t \cdot \varkappa_r \cos 2\pi\nu_r t,\\
q_2^r &= 2\pi(1+\varepsilon)\nu_r t \cdot \lambda_r \cos 2\pi\nu_r t,\\
q_3^r &= 2\pi(1+\varepsilon)\nu_r t \cdot \mu_r \cos 2\pi\nu_r t,\\
q_0^r &= 2\pi(1+\varepsilon)\nu_r t \cdot \nu'_r \sin 2\pi\nu_r t - (1-\varepsilon)\nu'_r \cos 2\pi\nu_r t.
\end{aligned} \tag{92}$$

Таким образом, при $\delta = 0$ система (87) имеет непериодическое решение. Если выписать соответствующие парциальные колебания напряженностей поля, то получим уравнения:

$$\begin{gathered} q_1^r \lambda_r - q_2^r \varkappa_r = 0, \ \ldots, \\ q_0^r \varkappa_r + \frac{L}{c\pi} q_1^r = 2\varepsilon \nu_r' \varkappa_r \cos 2\pi \nu_r t, \ \ldots \end{gathered} \tag{93}$$

Следовательно, непериодическим изменениям потенциалов отвечают периодические колебания напряженностей поля, которые, помимо всего, обращаются в нуль при $\varepsilon \to 0$. Обсуждаемые здесь апериодические решения можно рассматривать и как простую форму п. с. (61'); они гарантируют перестановочность Φ_0 и Φ_k. Однако предельный переход $\varepsilon \to 0$ во всех физических постановках задач выполняется без труда, так как для напряженностей поля не существует апериодических решений типа (92).

Все же в вычислениях было бы неудобно исходить из таких непериодических решений; поэтому мы и присоединили к функции $\overline{H}_0^{(s)}$ члены с δ. Таким образом, введение δ-членов имеет тот же смысл, что и введение полости: и то и другое служит для того, чтобы сделать спектр собственных значений дискретным. Впрочем, полость и δ-члены нарушают инвариантность уравнений относительно пространственных и временны́х преобразований. Однако в пределе, когда мы переходим к бесконечно большой полости, и в пределе $\delta = 0$ инвариантность снова восстанавливается.

Переход к квантовотеоретическому решению уравнения (86) осуществляется заменой величин p^r, q^r импульсами и координатами P^r, Q^r главных колебаний (по четыре для каждого значения r). Выкладки элементарны и проводятся по следующей схеме:

$$\frac{1}{\sqrt{4cL}} q_1^r = \frac{\lambda_r}{\sqrt{\nu_{r,1}'(\lambda_r^2 + \varkappa_r^2)}} Q_1^r + \frac{\mu_r \varkappa_r}{\nu_{r,1}' \sqrt{\nu_{r,1}'(\lambda_r^2 + \varkappa_r^2)}} Q_2^r + \frac{\varkappa_r}{\sqrt{\delta \nu_{r,1}'^3}} Q_3^r + \frac{\varkappa_r \sqrt{1-\delta}}{\sqrt{\delta \nu_{r,1}'^2 \nu_{r,0}'}} P_0^r,$$

$$\frac{1}{\sqrt{4cL}} q_2^r = -\frac{\varkappa_r}{\sqrt{\nu_{r,1}'(\lambda_r^2 + \varkappa_r^2)}} Q_1^r + \frac{\mu_r \lambda_r}{\nu_{r,1}' \sqrt{\nu_{r,1}'(\lambda_r^2 + \varkappa_r^2)}} Q_2^r + \frac{\lambda_r}{\sqrt{\delta \nu_{r,1}'^3}} Q_3^r + \frac{\lambda_r \sqrt{1-\delta}}{\sqrt{\delta \nu_{r,1}'^2 \nu_{r,0}'}} P_0^r, \tag{94}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4cL}} q_3^r = -\frac{\sqrt{\lambda_r^2 + \varkappa_r^2}}{\nu_{r,1}' \sqrt{\nu_{r,1}'}} Q_2^r + \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta \nu_{r,1}'^3}} Q_3^r + \frac{\mu_r \sqrt{1-\delta}}{\sqrt{\delta \nu_{r,1}'^2 \nu_{r,0}'}} P_0^r,$$

$$\frac{1}{\sqrt{4cL}} q_0^r = -\frac{\nu'_{r,1}}{\sqrt{\delta\nu'^3_{r,1}}} P_3^r - \frac{\nu'_{r,0}}{\sqrt{(1-\delta)\,\delta\nu'_{r,0}\nu'^2_{r,1}}} Q_0^r,$$

$$\sqrt{4cL}p_1^r = \lambda_r \sqrt{\frac{\nu'_{r,1}}{\lambda_r^2+\varkappa_r^2}} P_1^r + \frac{\mu_r\varkappa_r}{\sqrt{\nu'_{r,1}(\lambda_r^2+\varkappa_r^2)}} P_2^r - \varkappa_r \sqrt{\frac{\delta\nu'_{r,0}}{(1-\delta)\,\nu'^2_{r,1}}} Q_0^r, \tag{94}$$

$$\sqrt{4cL}p_2^r = -\varkappa_r \sqrt{\frac{\nu'_{r,1}}{\lambda_r^2+\varkappa_r^2}} P_1^r + \frac{\mu_r\lambda_r}{\sqrt{\nu'_{r,1}(\lambda_r^2+\varkappa_r^2)}} P_2^r - \lambda_r \sqrt{\frac{\delta\nu'_{r,0}}{(1-\delta)\,\nu^2_{r,1}}} Q_0^r,$$

$$\sqrt{4cL}p_3^r = -\frac{\sqrt{\lambda_r^2+\varkappa_r^2}}{\sqrt{\nu'_{r,1}}} P_2^r - \mu_r \sqrt{\frac{\delta\nu'_{r,0}}{(1-\delta)\,\nu'^2_{r,1}}} Q_0^r,$$

$$\sqrt{4cL}p_0^r = \sqrt{\delta\nu'_{r,1}}\, Q_3^r.$$

При этом

$$P_1^r = \frac{1}{2\pi\nu_{r,i}} \dot{Q}_i^r, \qquad P_0^r = -\frac{1}{2\pi\nu_{r,0}} \dot{Q}_0^r,$$

и выполняются п. с.

$$[P_i^r, Q_k^s]_- = \delta_{ik}\delta_{rs}\frac{h}{2\pi i}; \qquad [P_i^r, P_k^s]_- = 0, \qquad [Q_i^r, Q_k^s]_- = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 0;\ k = 1, 2, 3, 0).$$

Уравнение $P_0^r = -\frac{1}{2\pi\nu_{r,0}}\dot{Q}_0^r$ показывает, что функция Гамильтона содержит $(P_0^r)^2$ и $(Q_0^r)^2$ со знаком минус:

$$H_0 = 2\pi\nu_{r,1}\frac{1}{2}[(P_1^r)^2+(Q_1^r)^2] + 2\pi\nu_{r,2}\frac{1}{2}[(P_2^r)^2+(Q_2^r)^2] + $$
$$+ 2\pi\nu_{r,3}\frac{1}{2}[(P_3^r)^2+(Q_3^r)^2] - 2\pi\nu_{r,0}\frac{1}{2}[(P_0^r)^2+(Q_0^r)^2]. \tag{95}$$

Чтобы не выделять всякий раз главное колебание индексом 0, введем обозначения:

$$\nu_{r,4} = -\nu_{r,0},$$
$$P^{r,4} = -Q_0^r, \qquad Q^{r,4} = P_0^r. \tag{96}$$

Будем впредь нумеровать главные колебания индексом λ, принимающим значения от 1 до 4:

$$Q^{r\lambda}\,(Q_1^r, Q_2^r, Q_3^r, P_0^r),$$
$$P^{r\lambda}\,(P_1^r, P_2^r, P_3^r, -Q_0^r).$$

С помощью формул (94) и (84) мы можем теперь записать потенциалы в

форме, аналогичной (81):

$$\begin{aligned} \Phi_i &= Q^{r\lambda} v_i^{r\lambda}, & \Phi_0 &= P^{r\lambda} v_0^{r\lambda}, \\ \Pi_i &= \frac{1}{4cL} P^{r\lambda} w_i^{r\lambda}, & \Pi_0 &= \frac{1}{4cL} Q^{r\lambda} w_0^{r\lambda}, \end{aligned} \tag{97}$$

здесь $v_i^{r\lambda}$ и $w_i^{r\lambda}$ означают ортогональную систему собственных функций полости.

Вместо коэффициентов a, a^* в разложениях (81) и P, Q в разложениях (97) введем теперь в качестве переменной число частиц, находящихся в данном квантовом состоянии. Впервые этот метод был применен Дираком в теории излучения. Пусть число электронов в состоянии s равно N_s, а число световых квантов в состоянии r равно M_r. Канонически-сопряженные углы обозначим соответственно Θ_s и χ_r. Тогда будем иметь [24]:

$$\left.\begin{aligned} &\text{для статистики Бозе — Эйнштейна} \\ &a_s = e^{-\frac{2\pi i}{h}\Theta_s} N_s^{1/2}, \qquad a_s^* = N_s^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h}\Theta_s}; \\ &\text{для принципа запрета} \\ &a_s = \nu_s e^{-\frac{2\pi i}{h}\Theta_s} N_s^{1/2}, \qquad a_s^* = N_s^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h}\Theta_s} \nu_s; \\ &\text{для излучения} \\ &P^{r\lambda} = \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \left(M_{r\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h}\chi_{r,\lambda}} + e^{-\frac{2\pi i}{h}\chi_{r,\lambda}} M_{r\lambda}^{1/2} \right), \\ &Q^{r\lambda} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \left(M_{r\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h}\chi_{r,\lambda}} - e^{-\frac{2\pi i}{h}\chi_{r,\lambda}} M_{r\lambda}^{1/2} \right). \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Величины ν_s означают введенные Иорданом и Вигнером функции

$$\nu_s = \prod_{t \leqslant s} (1 - 2N_t). \tag{99}$$

Экспоненты фазовых углов можно рассматривать как операторы. В этом случае они будут обладать следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &\text{статистика Бозе — Эйнштейна} \\ &e^{\frac{2\pi i}{h}\Theta_s} \quad \text{превращает} \quad N_s \text{ в } N_s - 1; \\ &\text{принцип запрета} \\ &e^{\frac{2\pi i}{h}\Theta_s} \quad \text{»} \quad N_s \text{ в } 1 - N_s; \\ &\text{излучение} \\ &e^{\frac{2\pi i}{h}\chi_r} \quad \text{»} \quad M_r \text{ в } M_r - 1. \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

[24] См. также неоднократно цитировавшуюся работу Иордана и Вигнера (прим. 6.— *Ред.*).

Перейдем теперь к выводу уравнения Шредингера, отвечающего функции Гамильтона (79) и (79а). Амплитуда вероятности φ должна зависеть от переменных N_s и M_r; следовательно, величина $|\varphi|^2$ должна задавать вероятность того, что N_s электронов находятся в состоянии s, а M_r световых квантов — в состоянии r. Дифференциальное уравнение для φ получают следующим образом: функцию H [формулы (79) и (79а)] с помощью соотношений (81), (97) и (98) выражают через N, Θ и M, χ, рассматривают углы как операторы и полагают $(H - E)\varphi = 0$ (E — полная энергия системы). При этом используют то обстоятельство, что решения u_s и $v_{r\lambda}$ уравнения Гамильтона (79) и (79а) не содержат членов, описывающих взаимодействия. В результате «невозмущенная» энергия записывается просто в виде

$$E = \sum_s E_s N_s + \sum_{r,\lambda} \left(M_{r,\lambda} + \frac{1}{2}\right) h\nu_{r\lambda}.$$

Член $\frac{1}{2}\sum h\nu$ означает бесконечную аддитивную нулевую энергию излучения в полости. Поскольку в полную энергию этот член входит лишь как аддитивная постоянная, он не имеет никакого физического смысла и поэтому может быть отброшен (см. стр. 81). Если члены H, описывающие взаимодействия, выразить через u и v, то появятся следующие интегралы:

$$\begin{aligned} c_{st}^{r\lambda} &= \int u_\rho^{*s} \alpha_{\rho\sigma}^i u_\sigma^t v_i^{r\lambda} dV, \\ d_{st}^{r\lambda} &= \int u_\rho^{*s} u_\rho^t v_0^{r\lambda} dV. \end{aligned} \tag{101}$$

Таким образом, в окончательном варианте дифференциальное уравнение для амплитуды вероятности ρ (N_1, N_2, . . .; M_1, M_2, . . .) имеет вид (в дальнейшем мы снова будем явно указывать суммирование):

а) в случае статистики Бозе — Эйнштейна для материи

$$\begin{aligned} &\left(-E + \sum_s N_s E_s + \sum_r M_{r\lambda} h\nu_{r\lambda}\right) \varphi(N_1, N_2, \ldots; M_1, M_2, \ldots) = \\ &= e\sqrt{\frac{h}{4\pi}} \sum_{s,t,r,\lambda}' N^{1/2} (N_t + 1)^{1/2} [M_{r\lambda}^{1/2} (d_{st}^{r\lambda} - ic_{st}^{r\lambda}) \times \\ &\quad \times \varphi(N_1, \ldots, N_{s-1}, \ldots, N_t + 1, \ldots; M_1, \ldots, M_{r\lambda} - 1, \ldots) + (M_{r\lambda} + 1)^{1/2} \times \\ &\times (d_{st}^{r\lambda} + ic_{st}^{r\lambda}) \varphi(N_1, \ldots, N_s - 1, \ldots, N_t + 1, \ldots; M_1, \ldots M_{r\lambda} + 1, \ldots)] + \\ &\quad + e\sqrt{\frac{h}{4\pi}} \sum_s N_s [M_{r\lambda}^{1/2} (d_{ss}^{r\lambda} - ic_{ss}^{r\lambda}) \varphi(N_1, \ldots; M_1, \ldots, M_{r\lambda} - 1, \ldots) + \\ &\quad + (M_{r\lambda} + 1)^{1/2} (d_{ss}^{r\lambda} + ic_{ss}^{r\lambda}) \varphi(N_1, \ldots; M_1, \ldots, M_{r\lambda} + 1, \ldots)]; \end{aligned} \tag{102}$$

б) в случае принципа запрета для материи

$$\Big(-E+\sum_s E_s N_s+\sum_r M_{r\lambda}h\nu_{r\lambda}\Big)\varphi(N_1, N_2, \ldots; M_1, M_2, \ldots)=$$

$$=e\sqrt{\frac{h}{4\pi}}\sum_{s,t,r,\lambda}{}' \nu_s(N_1, \ldots, 1-N_s, \ldots)\,\nu_t(N_1, \ldots, 1-N_t, \ldots)\times$$

$$\times[M_{r\lambda}^{1/2}(d_{st}^{r\lambda}-ic_{st}^{r\lambda})\varphi(N_1, \ldots, 1-N_s, \ldots; M_1, \ldots, M_{r\lambda}-1, \ldots)+$$

$$+(M_{r\lambda}+1)^{1/2}(d_{st}^{r\lambda}+ic_{st}^{r\lambda})\times$$

$$\times\varphi(N_1, \ldots, 1-N_s, 1-N_t, \ldots; M_1, \ldots, M_{r\lambda}+1, \ldots)]+$$

$$+e\sqrt{\frac{h}{4\pi}}\sum_s N_s[M_{r\lambda}^{1/2}(d_{ss}^{r\lambda}-ic_{ss}^{r\lambda})\varphi(N_1, \ldots; M_1, \ldots, M_{r\lambda}-1, \ldots)+$$

$$+(M_{r\lambda}+1)^{1/2}(d_{ss}^{r\lambda}+ic_{ss}^{r\lambda})\varphi(N_1, \ldots; M_1, \ldots, M_{r\lambda}+1, \ldots)]. \qquad (103)$$

В суммах Σ' опущено слагаемое $r = s$.

§ 8. Вычисление возмущенных собственных значений с точностью до второго порядка по взаимодействию

Если в уравнениях (102), (103) члены, описывающие взаимодействие, рассматривать как малое возмущение, то можно попытаться проинтегрировать эти уравнения методом последовательных приближений. Пусть в невозмущенной системе имеется N_s^0 электронов в состоянии s, но вообще нет световых квантов. Этим выбором начального решения мы исключили процессы дисперсии и поглощения, которые пока нас не интересуют. Невозмущенная амплитуда вероятности имеет вид:

$$\varphi_0(N_1, \ldots; M_1, \ldots)=\delta_{N_1,N_1^0}\delta_{N_2,N_2^0}\cdots\delta_{M_1,0}\,\delta_{M_2,0}\ldots,$$

$$\delta_{N_1 N_1^0}=\begin{cases}1 \text{ при } N_1=N_1^0,\\ 0 \text{ при } N_1\neq N_1^0.\end{cases} \qquad (104)$$

Это значение φ_0 мы подставляем в члены уравнений (102) и (103), описывающие взаимодействие, и находим первое приближение φ_1 возмущенной амплитуды вероятности $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots$ Тогда имеем:

а) для статистики Бозе — Эйнштейна

$$\varphi_1(N_1^0, \ldots, N_s^0+1, \ldots, N_t^0-1, \ldots; 0, 0, \ldots, \overset{r\lambda}{1}, 0, 0)=$$

$$=\frac{e\sqrt{h/4\pi}}{E_s-E_t+h\nu_{r\lambda}}(N_s^0+1)^{1/2}N_t^{0\,1/2}(d_{st}^{r\lambda}-ic_{st}^{r\lambda}),$$

$$\varphi_1(N_1^0, \ldots; 0, 0, \ldots, \overset{r\lambda}{1}, 0, 0)=\frac{e\sqrt{h/4\pi}}{h\nu_{r\lambda}}\sum_s N_s^0(d_{ss}^{r\lambda}-ic_{ss}^{r\lambda}); \qquad (105)$$

б) для принципа запрета

$$\varphi_1(N_1^0, \ldots, 1-N_s^0, \ldots, 1-N_t^0, \ldots; 0, 0, \ldots, \overset{r\lambda}{1}, 0, \ldots) =$$
$$= \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{E_s - E_t + h\nu_{r\lambda}} \nu_s(N_1^0, \ldots, 1-N_t^0, \ldots)\nu_t(N_1^0, \ldots, 1-N_t^0, \ldots) \times$$
$$\times N_t^0(1-N_s^0)(d_{st}^{r\lambda} - ic_{st}^{r\lambda}) + \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{E_t - E_s + h\nu_{r\lambda}} \nu_t(N_1^0, \ldots, 1-N_s^0, \ldots)\times$$
$$\times \nu_s(N_1^0, \ldots, 1-N_s^0, \ldots)N_s^0(1-N_t^0)(d_{ts}^{r\lambda} - ic_{ts}^{r\lambda}),$$
$$\varphi_1(N_1^0, \ldots; 0, \ldots, \overset{r\lambda}{1}, 0, \ldots) = \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{h\nu_{r\lambda}} \sum_s N_s^0(d_{ss}^{r\lambda} - ic_{ss}^{r\lambda}). \qquad (106)$$

Во всех других точках N_1-, N_2-, . . .-пространств $\varphi_1 = 0$. Подставляя φ_1 из формул (105) и (106) в (102) и (103), находим возмущение собственного значения $E^{(2)}$ ($E = E^0 + E^{(1)} + E^{(2)} + \ldots$), если уравнение записано для точки $N_1^0, N_2^0, \ldots; 0 \ldots$ Среднее по времени значение возмущающего члена, а следовательно и возмущения энергии $E^{(1)}$, обращается в нуль.

В результате вычислений получаем:

а) для статистики Бозе — Эйнштейна

$$-E^{(2)} = \sum_{st,\, r\lambda}' \frac{e^2 \frac{h}{4\pi}}{E_s - E_t + h\nu_{r\lambda}} (N_s^0 + 1) N_t^0 (d_{st}^{r\lambda} - ic_{st}^{r\lambda})(d_{ts}^{r\lambda} + ic_{ts}^{r\lambda}) +$$
$$+ \sum_{st,\, r\lambda} \frac{e^2}{4\pi\nu_{r\lambda}} N_s^0 (d_{ss}^{r\lambda} - ic_{ss}^{r\lambda}) N_t^0 (d_{tt}^{r\lambda} + ic_{tt}^{r\lambda}); \qquad (107)$$

б) для принципа запрета

$$-E^{(2)} = \sum_{st,\, r\lambda}' \frac{e^2 \frac{h}{4\pi}}{E_s - E_t + h\nu_{r\lambda}} N_t^0 (1 - N_s^0)(d_{st}^{r\lambda} - ic_{st}^{r\lambda})(d_{ts}^{r\lambda} + ic_{ts}^{r\lambda}) +$$
$$+ \sum_{st,\, r\lambda} \frac{e^2}{4\pi\nu_{r\lambda}} N_s^0 (d_{ss}^{r\lambda} - ic_{ss}^{r\lambda}) N_t^0 (d_{tt}^{r\lambda} + ic_{tt}^{r\lambda}). \qquad (108)$$

В правых частях формул (105) — (108) может встретиться малый знаменатель вида $E_s - E_t + h\nu$, нарушающий сходимость метода. Он имеет следующий физический смысл: поскольку выражение $E_s - E_t + h\nu_{r\lambda}$ мало́, разность $E_t - E_s$ должна быть $\sim h\nu_{r\lambda}$, т. е. невозмущенная система может совершать переход из состояния t в состояние s, испуская квант света $h\nu_{r\lambda}$. Дальнейшее обсуждение малых знаменателей происходило бы в точности так же, как в дираковской теории излучения. Поскольку нас будут больше интересовать возмущения собственных значений, мы будем предполагать, что соответствующие члены оказывают на результат лишь несущественное влияние. Именно так обстоит дело, например, с основным

состоянием атома, в котором излучение невозможно. Однако в самих возбужденных состояниях имеет смысл учитывать взаимодействие электронов и пренебрегать воздействием излучения. Следовательно, поскольку наша цель состоит в вычислении взаимодействия, на малые знаменатели можно не обращать внимания.

Ниже будет доказано, что возмущение собственных значений, вычисленное по формулам (107) и (108), в некотором приближении совпадает со вторым порядком возмущений собственных значений, которые находят, вводя обычное электростатическое взаимодействие между электронами и решая уравнение Шредингера в конфигурационном пространстве. В этой связи заметим, что величины $c_{st}^{r\lambda}$ относятся к токам и тем самым к магнитным взаимодействиям электронов, в то время как величины $d_{st}^{r\lambda}$ относятся к электрическим взаимодействиям. Поскольку магнитные взаимодействия по величине того же порядка, что и релятивистские эффекты, которые нельзя рассматривать в конфигурационном пространстве, мы будем при доказательстве пренебрегать членами с $c_{st}^{r\lambda}$. Остается вычислить суммы вида

$$\sum_{r,\lambda} \frac{1}{E_s - E_t + h\nu_{r\lambda}} d_{st}^{r\lambda} d_{ts}^{r\lambda}. \tag{109}$$

Интегралы $d_{st}^{r\lambda}$ $(r \neq t)$ заметно отличны от нуля лишь для тех $\nu_{r\lambda}$, для которых длина световой волны сравнима с размерами атома, следовательно, при очень больших $\nu_{r\lambda}$. Поскольку с ростом $\nu_{r\lambda}$ число собственных колебаний возрастает весьма быстро, предположим, что главный вклад в сумму вносят очень большие значения ν. При этом, по-видимому, в первом приближении вместо (109) с полным основанием можно рассматривать

$$\sum_{r,\lambda} \frac{1}{h\nu_{r\lambda}} d_{st}^{r\lambda} d_{ts}^{r\lambda}. \tag{110}$$

Как показывает оценка, совершаемая при этом ошибка не больше, чем при отбрасывании $c_{st}^{r\lambda}$. Сумма (110) легко вычисляется; находят несколько более общую сумму

$$\sum_{r,\lambda} \frac{1}{h\nu_{r\lambda}} d_{st}^{r\lambda} d_{nm}^{r\lambda} = \sum_{r,\lambda} \int dV\, dV' \,(u_\rho^{*s} u_\rho^t v_0^{r\lambda})_P \,(u_\sigma^{*n} u_\sigma^m v_0^{r\lambda})_{P'} \frac{1}{h\nu_{r\lambda}} \tag{111}$$

(здесь P и P' играют роль индексов для точек, принадлежащих рассматриваемым объемам).

В это выражение входит сумма

$$\sum_{r,\lambda} \frac{v_0^{r\lambda}(P)\, v_0^{r\lambda}(P')}{\nu_{r\lambda}} = G(P, P').$$

Чтобы вычислить ее, образуем $\Delta_P G(P, P')$. Из (94) и (84) получаем

$$\Delta_P G(P, P') = \sum_{r,\lambda} \frac{\Delta v_0^{r\lambda}(P)\, v_0^{r\lambda}(P)}{\nu_{r\lambda}} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{r,\lambda} \frac{-(\nu'_{r,1})^2\, v_0^{r\lambda}(P)\, v_0^{r\lambda}(P')}{\nu_{r\lambda}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{8}{L^3} 4cL \left[-\frac{1}{\delta} + \frac{1}{(1-\delta)\delta}\right] \frac{2L}{c} \sum_r \sin\frac{\pi}{L}\varkappa_r x_P \sin\frac{\pi}{L}\lambda_r y_P \times$$

$$\times \sin\frac{\pi}{L}\mu_r z_P \sin\frac{\pi}{L}\varkappa_r x_{P'} \cdot \sin\frac{\pi}{L}\lambda_r y_{P'} \cdot \sin\frac{\pi}{L}\mu_r z_{P'} =$$

$$= \frac{8\pi^2}{1-\delta}\delta(P - P'). \qquad (112)$$

Здесь $\delta(P - P')$ — δ-функция Дирака, зависящая от точек P и P'. Если полость достаточно велика, то решение дифференциального уравнения (112) для $G(P, P')$ имеет вид

$$G(P, P') = -\frac{2\pi}{1-\delta}\frac{1}{r_{PP'}}. \qquad (113)$$

Отсюда в пределе при $\delta = 0$ следует, что

$$-\sum_{r,\lambda} \frac{1}{2\pi\nu_{r\lambda}} d_{st}^{r\lambda} d_{nm}^{r\lambda} = A_{st,nm} = \int dV dV' \frac{u_\rho^{*s}(P)\, u_\rho^{*t}(P)\, u_\sigma^{*n}(P')\, u_\sigma^{*m}(P')}{r_{PP'}}. \qquad (114)$$

Таким образом, интегралы $A_{st,nm}$ оказываются известными обменными интегралами, встречающимися в теории излучения при обычном квантовомеханическом подходе к проблеме многих тел. С точностью до членов порядка δ окончательный результат для возмущения энергии $E^{(r)}$ имеет вид:

а) для статистики Бозе — Эйнштейна

$$E^{(2)} = \frac{e^2}{2}\left[\sum_{st}{}' (N_s^0 + 1) N_t^0 A_{st,ts} + \sum_{st} N_s^0 N_t^0 A_{ss,tt}\right];$$

б) для принципа запрета

$$E^{(2)} = \frac{e^2}{2}\left[\sum_{st}{}' N_t^0 (1 - N_s^0) A_{st,ts} + \sum_{st} N_s^0 N_t^0 A_{ss,tt}\right].$$

Выписанные здесь члены содержат еще бесконечные суммы вида

$$\sum_s A_{st,ts} = S_t.$$

Из (114) имеем

$$S_t = \sum_s A_{st,ts} = \int \sum_s \frac{u_\rho^{*s}(P)\, u_\rho^t(P)\, u_\sigma^{*t}(P')\, u_\sigma^s(P')}{r_{PP'}} dV dV' =$$

$$= \int \frac{u_\rho^t(P)\, u_\sigma^{*t}(P')\, \delta(P - P')\, \delta_{\rho\sigma}}{r_{PP'}} dV dV' = \int \frac{(u_\rho^{*t} u_\rho^t)_P}{r_{PP}} dV =$$

$$= \frac{1}{r_{PP}} \int u_\rho^{*t} u_\rho^t dV = \frac{1}{r_{PP}}. \qquad (115)$$

Таким образом, величина S_t соответствует рассмотренному Иорданом и Клейном взаимодействию частиц с самими собой и является бесконечно большой. S_t не зависит от состояния t, т. е. взаимодействие электрона с самим собой во всех состояниях одинаково. Поэтому S_t так же, как и нулевая энергия излучения, означает бесконечную аддитивную константу в полной энергии. В рассматриваемой нами теории не встречается процессов, при которых число электронов изменялось бы. Следовательно, если интересоваться лишь разностями энергий, то аддитивные добавочные члены не будут испытывать возмущений. Поэтому мы вычеркнем из $E^{(2)}$ взаимодействие электрона с самим собой и получим:

а) для статистики Бозе — Эйнштейна

$$E^{(2)} = e^2 \sum_{s>t} N_s^0 N_t^0 (A_{st,ts} + A_{ss,tt}) + e^2 \sum_s \frac{N_s^0 (N_s^0 - 1)}{2} A_{ss,ss} + \text{const}; \tag{116}$$

б) для принципа запрета

$$E^{(2)} = e^2 \sum_{s>t} N_s^0 N_t^0 (- A_{st,ts} + A_{ss,tt}) + e^2 \sum_s \frac{N_s^0 (N_s^0 - 1)}{2} A_{ss,ss} + \text{const}. \tag{117}$$

В точности к таким же формулам приводит обычная квантовая механика, если в первом приближении учесть электростатическое взаимодействие электронов. Разумеется, наша теория позволяет получать эти формулы лишь при определенных допущениях, на которых мы сейчас кратко остановимся.

Будем пренебрегать магнитными членами $c_{st}d_{ts}$ и $c_{st}c_{ts}$. Поскольку, как показывают вычисления, сумма

$$\sum_{r,\lambda} \frac{1}{h\nu_{r\lambda}} c_{st} d_{nm},$$

аналогичная сумме (110), обращается в нуль, при магнитных взаимодействиях основную роль играют члены $c_{st}c_{ts}$, которые обусловливают появление обменных членов вида

$$\int \frac{u_\rho^{*s}(P)\, \alpha_{\rho\sigma}^i u_\sigma^t(P) \cdot u_\mu^{*t}(P')\, \alpha_{\mu\nu}^i u_\nu^s(P')}{r_{PP'}}\, dV dV'.$$

В $E^{(2)}$ они дают вклад порядка $(v/c)^2$. Кроме того, точная формула (107) и соответственно (108) содержат еще и добавочные члены вида $\sum \frac{E_s - E_t}{(E_s - E_t + h\nu_{r\lambda})\, h\nu_r} d_{st} d_{ts}$, которые были отброшены при переходе от (109) к (110) и связаны с запаздыванием потенциалов. Наконец, $E^{(2)}$ еще не позволяет получить точные собственные значения, вследствие чего приходится учитывать в E более высокие приближения $E^{(3)}$, $E^{(4)}$ и т. д. Во многих случаях $E^{(3)}$ оказывается больше тех членов, которыми мы до сих пор пренебрегали. Однако вычисление $E^{(3)}$ и сравнение полученного значения с соответствующим членом, найденным по теории возмущений в конфигу-

рационном пространстве, привело бы к исключительно громоздким вычислениям. Было бы весьма желательно разработать другой метод интегрирования основных уравнений теории, который не требовал бы предположений о малости взаимодействия между электронами и допускал разложение по степеням $1/c$. Было бы важно исследовать более подробно, какую роль играет собственная энергия электронов в членах порядка $(v/c)^2$.

§ 9. О предсказываемом теорией световом излучении, возникающем при прохождении электронов через потенциальный барьер

Вычисления, произведенные в предыдущем параграфе, должны были показать, что наша теория содержит в качестве частных случаев результаты прежних теорий. Аналогичное утверждение легко доказать и для явлений излучения, для которых уравнения (102) и (103) приводят по существу к тем же результатам, что и теория излучения Дирака. Не возникает ничего нового и в связи с вопросом о точном определении энергии в стационарных состояниях.

Теперь мы хотим обсудить некоторые эксперименты, которые нельзя было бы интерпретировать с точки зрения прежней теории [25]. Для конкретности рассмотрим пример. Атом гелия в нормальном состоянии помещен в сильное электрическое поле, которое с известной вероятностью может вызвать ионизацию этого атома (как известно, в теории Гамова — Герни — Кондона закона Гейгера — Нэтолла аналогичным образом возникает определенная вероятность того, что α-частица после преодоления потенциального барьера покинет ядро). Согласно квантовой механике, такой переход происходит таким образом, что электрон покидает свой атом с вполне определенной энергией, равной разности первоначальной энергии нормального состояния гелия и оставшейся энергии положительного иона гелия. Если же учесть взаимодействие материи и излучения так, как это было предложено выше, то возникает некоторая вероятность испускания электронов со значительно меньшей энергией, причем закон сохранения энергии остается в силе, поскольку одновременно происходит испускание соответствующего светового кванта. Неопределенность в энергии испущенных электронов в этом случае не имеет ничего общего с временем жизни соответствующих состояний, поскольку явление протекает совершенно независимо от вероятности ионизации. Кроме того, наша теория позволяет предсказывать совершенно аналогичные результаты (mutatis mutandis) и для скачков Оже.

При построении математической теории названные эффекты можно объединить под общим названием «переходы в состояния с равной энер-

[25] Если ограничиваться (как это и будет сделано в дальнейшем) первым приближением, то получаются результаты, которые можно вывести и из теории излучения Дирака. Однако в следующих приближениях такого совпадения не будет, поскольку для этого требовалась единая теория взаимодействий и излучения, не содержащаяся в теории Дирака.

гией». Мы исходим из предположения, будто в невозмущенной системе имеется дискретное состояние атома (основное состояние или метастабильные состояния), в котором атом не излучает, а в окрестности этого значения энергии имеется еще континуум промежуточных состояний, превращающийся при квантовании в серию дискретных термов, расположенных очень близко друг к другу. Если эту задачу сначала рассмотреть с позиций обычной квантовой механики, то исходному дискретному состоянию атома будет соответствовать некоторая собственная функция φ^a координат электронов. Отдельным переходным состояниям отвечают собственные функции φ^t, которые в достаточно хорошем приближении можно представить в виде произведения собственной функции иона и промежуточной собственной функции (плоской волны) отдельного электрона. Если обозначить через E_t кинетическую энергию электрона, то среднее расстояние между двумя соседними промежуточными состояниями с энергией E_t составит

$$\Delta E_t = \frac{h^3}{16\pi(2m)^{3/2}L^3E_t^{1/2}} \tag{118}$$

(L — длина ребра полости).

Вероятность перехода для рассматриваемого процесса, т. е. перехода электрона из связанного состояния в атоме в соответствующие по энергии промежуточные состояния, согласно Дираку [26], дается формулой

$$|\Phi^0_{at}|^2 \frac{4\pi^2}{h\Delta E_t} = |\Phi^0_{at}|^2 \frac{64\pi^3}{h^4}(2m)^{3/2}L^3E_t^{1/2}. \tag{119}$$

Здесь Φ^0_{at} — матричный элемент возмущающего потенциала, соответствующего рассматриваемому переходу. Следовательно,

$$\Phi^0_{at} = -e\int \varphi^{*a}\Phi^0\varphi^t d\Omega, \tag{120}$$

где $d\Omega$ — элемент объема в конфигурационном пространстве. В случае переходов Гамова в качестве возмущающего потенциала фигурирует по существу сам потенциальный барьер, причем малость Φ^0_{at} связана с тем, что произведение $\varphi^{*a}\varphi^t$ вообще мало́. (Собственные промежуточные функции и собственные функции атома внутри барьера спадают экспоненциально.) В случае фотоэффекта Φ^0 означает потенциал возмущающей внешней световой волны [27], в случае эффекта Оже — кулоновское взаимодействие электронов. Поскольку собственная функция φ^t, рассматриваемая как функция координат электрона, нормирована во всей полости, нетрудно видеть, что Φ^0_{at} зависит от L как $L^{3/2}$. Следовательно, вероятность перехода (119), как это и должно быть, не зависит от L.

---

[26] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc., 1927, 114, 243; в особенности см. с. 264, уравнение (32).

[27] См. также *G. Wentzel.* Phys. Z., 1928, 29, 321.

Соотношение (120) особенно просто выглядит в том случае, когда взаимодействие электронов вообще можно считать малым. Тогда в наиболее грубом приближении в случае принципа запрета имеем

$$\Phi^0_{at} = -e\int dV u^{a*}\Phi^0 u^t,$$

причем u^a — собственная функция того состояния, из которого исчезает электрон при переходе, u^t — промежуточная собственная функция; интеграл берется лишь по трехмерному пространству — по координатам *одного* электрона.

Если ту же проблему рассмотреть с помощью методов, описанных в этой работе, то вместо возмущающего потенциала V в функцию Гамильтона войдет возмущающий член вида — $e\Phi^0\psi^*\psi$. Если $\overset{*}{\psi}_\rho$ и ψ_ρ снова выразить через N_s и Θ_s, то согласно (98) в случае принципа запрета получим

$$H_1 = -e\Phi^0\overset{*}{\psi}_\rho\psi_\rho = N_1(1-N_t)\,\nu_s(N_1,\ldots,1-N_s,\ldots)\times$$
$$\times\,\nu_t(N_1,\ldots,1-N_s,\ldots)\,e^{\frac{2\pi i}{h}(\Theta_s-\Theta_t)}a_{st}\ldots, \tag{121}$$

где

$$a_{st} = -e\int\Phi^0\overset{*s}{u}_\rho\overset{t}{u}_\rho dV. \tag{121a}$$

Мы можем снова воспользоваться уравнением Дирака для вероятностей переходов (119), причем на этот раз для Φ^0_{at} будет выполняться соотношение

$$\Phi^0_{at} = \sum_{N_1,N_2,\ldots,M_1,M_2}\varphi^{*a}(N_1,\ldots,M_1,\ldots)\,H_1\varphi^t, \tag{122}$$

а φ^a и φ^t будут означать амплитуды вероятности начального и конечного состояний в $N_1,\ldots,M_1,\ldots$-пространстве. Если сначала рассматривать переходы без испускания световых квантов, то

$$\varphi^a = \delta_{N_1,N_1^0}\delta_{N_2,N_2^0}\ldots\delta_{N_a,1}\ldots\delta_{N_t,0}\ldots\delta_{M_1,0}\ldots + \text{члены более высокого порядка},$$
$$\varphi^t = \delta_{N_1,N_1^0}\ldots\delta_{N_a,0}\ldots\delta_{N_t,1}\ldots\delta_{M_1,0}\ldots + \text{члены более высокого порядка}. \tag{123}$$

Величину H_1 в (122) следует считать оператором [ср. формулы (100)]. В нулевом приближении

$$\Phi^0_{at} = a_{at} = -e\int dV\Phi^0\overset{*a}{u}_\rho\overset{t}{u}_\rho \tag{124}$$

в полном соответствии с ранее полученными результатами.

Однако существуют и переходы с испусканием световых квантов ($h\nu_{r\lambda}$). В этом случае собственная функция для состояния a остается такой же, как и раньше, но только φ^a следует вычислять с точностью до членов первого порядка, указанных в формулах (106). Напротив, для состояния t

собственная функция в нулевом приближении имеет вид

$$\varphi^t = \delta_{N_1, N_1^0} \ldots \delta_{N_a,0} \ldots \delta_{N_t,1} \ldots \delta_{M_{1,0}} \ldots \delta_{M_{2\lambda,1}} \ldots$$

Возмущающий член первого порядка в φ^t аналогичен членам в (106):

$$(N_t^0 = 0, N_a^0 = 1),$$

$$\begin{aligned} &\varphi_1 (N_t^0, \ldots, 1 - N_a^0, \ldots, 1 - N_s^0, \ldots, N_t^0, \ldots, 0, \ldots, 1^2, \ldots) = \\ &= \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}} \nu_s (N_1^0, \ldots, N_t^0, \ldots) \nu_t (N_1^0, \ldots, N_t^0, \ldots) \times \\ &\times (1 - N_s^0 + \delta_{as} - \delta_{st}) (d_{st}^{r\lambda} + ic_{st}^{r\lambda}), \end{aligned} \tag{125}$$

$$\varphi_1 (N_1^0, \ldots, N_t^0, \ldots, 0, 0, \ldots) = \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{-h\nu_{r\lambda}} \sum (N_s^0 - \delta_{as} + \delta_{st})(d_{ss}^{r\lambda} + ic_{ss}^{r\lambda}).$$

В других точках пространства $N_1, \ldots, M_1, \ldots$, которые нас не интересуют, поскольку они не входят в сумму (122), функция φ_1 может принимать и другие значения.

Итак, в первом приближении (члены нулевого порядка здесь выпадают)

$$\begin{aligned} \Phi^0_{at, h\nu_{r\lambda}} &= \sum_{N, \ldots, M, \ldots} \varphi^{*a} (N_1, \ldots, M_1, \ldots) H_1 \varphi^{th\nu_{r\lambda}} = \\ &= \sum_s \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{E_s - E_a + h\nu_{r\lambda}} \nu_s (N_1^0, \ldots, 1 - N_a^0, \ldots) \times \\ &\times \nu_a (N_1^0, \ldots, 1 - N_a^0, \ldots) (1 - N_s^0) (d_{as}^{r\lambda} + ic_{as}^{r\lambda}) \times \\ &\times \nu_s (N_1^0, \ldots, 1 - N_a^0 \ldots) \nu_t (N_1^0, \ldots, 1 - N_a^0, \ldots) a_{st} + \\ &+ \sum \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{h\nu_{r\lambda}} N_s^0 (d_{ss}^{r\lambda} + ic_{ss}^{r\lambda}) a_{at} \nu_a (N_1^0, \ldots, 1 - N_a^0) \times \\ &\times \nu_t (N_1^0, \ldots, 1 - N_a^0, \ldots) + \sum a_{as} \nu_a (N_1^0, \ldots, 1 - N_a^0, \ldots) \times \\ &\times \nu_s (N_1^0, \ldots, 1 - N_a^0, \ldots) \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}} \nu_s (N_1, \ldots, 1 - N_a^0, \ldots) \times \\ &\times \nu_t (N_1, \ldots, 1 - N_a^0, \ldots) (1 - N_s^0 + \delta_{as} - \delta_{st}) (d_{st}^{r\lambda} + ic_{st}^{r\lambda}) + \\ &+ a_{at} \nu_a (N_1^0, \ldots, 1 - N_a^0) \nu_t (N_1^0, \ldots, 1 - N_a^0, \ldots) \times \\ &\times \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{-h\nu_{r\lambda}} \sum (N_s^0 - \delta_{as} + \delta_{st}) (d_{ss}^{r\lambda} + ic_{ss}^{r\lambda}). \end{aligned} \tag{126}$$

Здесь мы воспользовались соотношением $d_{st}^* = d_{ts}$. Объединяя различные

члены, получаем

$$\Phi^0_{at,h\nu_{r\lambda}} = \nu_a(N^0_1, \ldots, 1 - N^0_a)\,\nu_t(N^0_1, \ldots, 1 - N^0_a, \ldots) \times$$
$$\times \left[a_{at}\frac{e\sqrt{h/4\pi}}{h\nu_{r\lambda}}(d_{aa} + ic_{aa} - d_{tt} - ic_{tt}) + \right.$$
$$+ \sum_s \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{E_s - E_a + h\nu_{r\lambda}}(1 - N^0_s)(d^{r\lambda}_{as} + ic^{r\lambda}_{as})\,a_{st} +$$
$$\left. + \sum_s \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}}(1 - N^0_s + \delta_{as} - \delta_{st})(d^{r\lambda}_{st} + ic^{r\lambda}_{st})a_{as}\right] =$$
$$= \nu_a(N^0_1, \ldots, 1 - N^0_a, \ldots)\,\nu_t(N^0_1, \ldots, 1 - N^0_a, \ldots) \times$$
$$\times \left[\sum_s \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{E_s - E_a + h\nu_{r\lambda}}(1 - N^0_s + \delta_{as})(d^{r\lambda}_{as} + ic^{r\lambda}_{as})\,a_{st} + \right.$$
$$\left. + \sum_s \frac{e\sqrt{h/4\pi}}{E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}}(1 - N^0_s + \delta_{as})(d^{r\lambda}_{st} + ic^{r\lambda}_{st})\,a_{as}\right]. \qquad (127)$$

Подставляя $\Phi^0_{at,n\nu_r\lambda}$ в (119), находим вероятность перехода из состояния a в состояние с *равной энергией*, при котором испускается квант света $h\nu_{r\lambda}$, а электрон оказывается в состоянии E_t. При $\lambda = 1, 2$ энергия конечного состояния лишь незначительно отличается от суммы:

$h\nu_{r\lambda}$ + энергия атомной системы в состоянии t в отсутствие световых квантов (равная $E_{\text{ион}} + E_t + h\nu_{r\lambda}$).

Однако при $\lambda = 3$ или 4 энергия конечного состояния отличается от соответствующей суммы на величину порядка $1/\delta$, что можно установить, рассматривая соотношения, аналогичные (104)—(108). Если энергия конечного состояния должна быть равной энергии начального состояния, то при $\lambda = 3$ или 4 и малом δ либо $h\nu_{r\lambda}$, либо E_t должны быть очень большими; тогда соответствующая вероятность перехода будет очень малой, и в пределе при $\delta = 0$ вкладом от $\lambda = 3$ и $\lambda = 4$ можно пренебречь.

Таким образом, полная вероятность испускания светового кванта с частотой, лежащей между ν и $\nu + \Delta\nu$, и одновременного перехода электрона в состояние с «соответствующей» энергией

$$E_t = E_a - E_{\text{ион}} - h\nu \qquad (128)$$

согласно (119) оказывается равной

$$\frac{4\pi^2}{h\Delta E_t}\sum_{\lambda=1,2}\sum_{r=\nu}^{\nu+\Delta\nu}\left|\sum_s \frac{e\sqrt{h/4\pi}\,(d^{r\lambda}_{as} + ic^{r\lambda}_{as})\,a_{st}}{E_s - E_a + h\nu}(1 - N^0_s + \delta_{as}) + \right.$$
$$\left. + \sum_s \frac{e\sqrt{h/4\pi}\,a_{as}(d^{r\lambda}_{st} + ic^{r\lambda}_{st})}{E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}}(1 - N^0_s + \delta_{as})\right|^2. \qquad (129)$$

Поскольку λ может принимать лишь значения 1 и 2, величина v_0, а поэтому и d_{as} согласно уравнению (94) обращаются в нуль. Следовательно, суммы, заключенные между вертикальными чертами, превращаются в

$$\left|\sum_s e\sqrt{\frac{h}{4\pi}}(1-N_s^0+\delta_{as})\left[\frac{c_{as}^{r\lambda}a_{st}}{E_s-E_a+h\nu_{r\lambda}}+\frac{a_{as}c_{st}^{r\lambda}}{E_s-E_t-h\nu_{r\lambda}}\right]\right|. \quad (130)$$

Если длина волны, соответствующая кванту $h\nu_{r\lambda}$, велика по сравнению с размерами атома, то можно положить

$$c_{mn}^{r\lambda}=\sum_l\int u_\rho^{*m}\alpha_{\rho\sigma}^l u_\sigma^n v_l^{r\lambda}=\sum_l (v_l^{r\lambda})_A\frac{1}{c}\dot{x}_l^{nm}. \quad (131)$$

Индекс A означает здесь, что значение функции координат следует брать в той точке, где находится атом. Если произвести суммирование по r, λ между ν и $\nu+\Delta\nu$, то с учетом (84) и (94) для вероятности перехода (129) получим

$$\frac{1}{\Delta E_t}\frac{16\pi^2e^2}{3c^3}\nu\Delta\nu\sum_l\left|\sum_s(1-N_s+\delta_{as})\left[\frac{\dot{x}_l^{as}a_{st}}{E_s-E_a+h\nu}+\frac{a_{as}\dot{x}_l^{st}}{E_s-E_t-h\nu}\right]\right|^2. \quad (132)$$

Если бы матрицы a_{st} и $\dot{x}_l^{st}$ вычислялись с помощью собственных функций, нормированных в шкале dE_t, множитель $1/\Delta E_t$ не входил бы в (132).

Если ν и $\Delta\nu$ — величины порядка E/h, то относительная частота переходов с испусканием квантов света составляет от частоты обычных переходов долю порядка

$$\sim\frac{e^2}{hc}\left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2. \quad (133)$$

Следовательно, вероятность рассмотренных здесь переходов по сравнению с вероятностью обычных процессов имеет тот же порядок малости, что и вероятность процессов излучения.

Применив этот результат к теории радиоактивного распада ядра, предложенной Гамовым — Герни — Кондоном, мы придем к выводу о том, что спектр первичного β-излучения должен быть размазанным, поскольку все эффекты, связанные с испусканием электронов из ядра, имеют одинаковый порядок. Правда, согласно теории этих авторов, должен был бы существовать еще и непрерывный спектр γ-лучей, поскольку их теория исходит из предположения о том, что закон сохранения энергии выполняется всегда. Поэтому их теория не дает никаких объяснений по поводу трудностей, связанных с тем, что спектр γ-излучения, по-видимому, отсутствует.

Наше объяснение сплошного спектра первичного β-излучения имеет некоторое сходство с рассуждениями Росселанда [28], согласно которым

[28] *S. Rosseland.* Z. Phys., 1923, 14, 173.

электроны, покидая ядро, получают ускорение и должны испускать излучение. Однако при более глубоком сравнении теории выявляются и различия. В суммы (129) могут входить лишь те члены, соответствующие переходам Росселанда, для которых разность $E_s - E_t - h\nu_{r\lambda}$ очень мала. В общий результат эти члены ввиду малости коэффициентов d_{st}, c_{st} вносят лишь незначительный вклад.

Уравнение (129) применимо и к фотоэлектрическому эффекту. Однако в этом случае оно не дает ничего нового, а лишь приводит к известной формуле вероятности эффекта Комптона. Если бы состояние t выбиралось из дискретного спектра, то из (129) можно было бы получить новый вывод дисперсионной формулы Ладенбурга — Крамерса.

Из окончательной формулы (132) можно видеть, что она содержит и скачки $+mc^2 \to -mc^2$, обсуждавшиеся Дираком, которые, несомненно, сказываются на результате. Поскольку нет никаких сомнений в том, что в действительности такие скачки не происходят, мы не останавливались на них при обсуждении формулы (132). В этом проявляется непоследовательность нашей теории, которую следует иметь в виду, поскольку указанная Дираком трудность остается не преодоленной.

Поступила 19 марта 1929 г.

К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ. II*

(Совместно с В. Гейзенбергом)

Исследуется распад системы на некомбинирующиеся подсистемы в случае квантовой теории волновых полей. Интегралы уравнений движения выводятся из свойств инвариантности функции Гамильтона; рассмотрение градиентной инвариантности позволяет дать удовлетворительную формулировку электродинамики без добавочных членов. Обсуждается математическая взаимосвязь волновой теории и теории частиц.

Введение

Существующий в настоящее время релятивистский вариант [1] квантовой теории волновых полей наталкивается на весьма серьезные возражения. До сих пор взаимодействие электронов с самими собой в ряде случаев делает невозможным применение этой теории. Таким образом, мы еще далеки от окончательной формулировки теории. Несмотря на это, хотелось бы надеяться, что дальнейший прогресс в квантовой теории, а именно построение волновой теории, непременно будет достигнут.

В обычной квантовой механике существенных продвижений вперед удалось добиться за счет изучения инвариантных свойств [2] функции Гамильтона. Свойства инвариантности позволяют делать выводы о распаде системы термов на некомбинирующиеся группы. Простые интегралы уравнений движения также зависят от свойств инвариантности функции Гамильтона. В своих рассуждениях мы будем использовать и свойства инвариантности волновых уравнений.

§ 1. Общий метод и закон сохранения импульса

Основная идея метода в общих чертах сводится к следующему. Если функция Гамильтона $\overline{H}$ инвариантна относительно какой-то операции, то это означает, что существует некоторый оператор (линейный во всех важных для нас случаях), оставляющий $\overline{H}$ неизменной, т. е. коммутирующий с $\overline{H}$. Если этот оператор выбрать в качестве квантовотеоретической переменной [3], то окажется, что эта переменная постоянна по времени, и мы получим некоторый интеграл уравнений. Если же упомянутая инвариант-

---

* *Zur Quantentheorie der Wellenfelder. II.* (Mit W. Heisenberg).— Z. Phys., 1930, 59, H. 3 und 4, S. 168—190.

[1] *W. Heisenberg, W. Pauli.* Z. Phys., 1929, 56, 1. (Русск. пер. см. предыдущую статью настоящего тома.— *Ред.*) В дальнейшем ссылки на эту работу будут обозначаться I.

[2] Подробное изложение этих результатов см. в кн.: *H. Weyl.* Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig, 1928.

[3] См. по этому поводу: *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc. London, 1929, **A123**, 714.

ность продолжает существовать при любых изменениях или возмущениях системы, то изменить значение переменной оказывается вообще невозможным, и, следовательно, каждое значение оператора представляет подсистему термов, не комбинирующуюся с остальными термами.

В качестве простейшего примера рассмотрим инвариантность функции Гамильтона относительно трансляции всего волнового поля в пространстве. Все обозначения в приводимых ниже формулах заимствованы из работы I. Переносу $x_i \to x_i + \delta x_i$ соответствует преобразование волновых функций Q_α (см. I, стр. 20)

$$Q_\alpha \to Q_\alpha - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i. \tag{1}$$

Тогда функционал F от Q_α переходит в

$$F \to F - \int dV \sum_\alpha \frac{\delta F}{\delta Q_\alpha} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i = \left(1 - \delta x_i \int dV \sum_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \frac{\delta}{\delta Q_\alpha}\right) F. \tag{2}$$

Следовательно, переносу на δx_i отвечает оператор

$$1 - \delta x_i \int dV \sum_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \frac{\delta}{\delta Q_\alpha}. \tag{3}$$

Поскольку функция Гамильтона $\overline{H}$ инвариантна относительно трансляции, оператор (3) должен коммутировать с $\overline{H}$. Следовательно, соответствующая ему квантовотеоретическая переменная постоянна по времени. Так как оператору $\delta/\delta Q_\alpha$ отвечает переменная $\frac{2\pi i}{h} P_\alpha$ [I, соотношение (20)], то из (3) следует закон сохранения импульса [I, уравнение (24)]

$$\int dV \sum_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} P_\alpha = \text{const}. \tag{4}$$

§ 2. Сохранение заряда

Специальная функция Гамильтона для электронов (ψ_ρ) и излучения (Φ_ν) инвариантна относительно преобразования

$$\psi_\rho \to \psi_\rho e^{i\alpha}, \qquad \overset{*}{\psi}_\rho \to \overset{*}{\psi}_\rho e^{-i\alpha}, \tag{5}$$

где α — некоторая постоянная, или относительно соответствующего бесконечно малого преобразования

$$\psi_\rho \to \psi_\rho + i\delta\alpha\psi_\rho, \qquad \overset{*}{\psi}_\rho \to \overset{*}{\psi}_\rho - i\delta\bar{\alpha}\overset{*}{\psi}_\rho. \tag{6}$$

Так как $\overset{*}{\psi}_\rho$ означают импульсы, канонически-сопряженные с ψ_ρ, то достаточно рассматривать только ψ_ρ. Функционал от ψ_ρ переходит в

$$F \to F + i\delta\alpha \int dV \frac{\delta F}{\delta \psi_\rho} \psi_\rho; \tag{7}$$

поэтому оператор, соответствующий преобразованию (6), имеет вид

$$1 + i\delta\alpha \int dV \psi_\rho \frac{\delta}{\delta\psi_\rho}. \tag{8}$$

Отсюда следует, что

$$\int dV \psi_\rho \psi_\rho^* = \mathrm{const.} \tag{9}$$

Множители в левой части (9) можно переставлять, не нарушая постоянства интеграла по времени. Таким образом, мы получаем закон сохранения заряда. Если функция Гамильтона содержит волны материи для электронов и протонов ($\psi_\rho^{(e)}$ и $\psi_\rho^{(p)}$), то закон сохранения заряда принимает форму

$$\int dV \left(-\psi_\rho^{*(e)}\psi_\rho^{(e)} + \psi_\rho^{*(p)}\psi_\rho^{(p)}\right) = \mathrm{const.} \tag{10}$$

Чтобы это соотношение выполнялось, функция Гамильтона должна быть инвариантной относительно следующего преобразования:

$$\begin{aligned} &\psi_\rho^{(e)} \to \psi_\rho^{(e)} e^{i\alpha}, \qquad \psi_\rho^{*(e)} \to \psi_\rho^{*(e)} e^{-i\alpha}, \\ &\psi_\rho^{(p)} \to \psi_\rho^{(p)} e^{-i\alpha}, \qquad \psi_\rho^{*(p)} \to \psi_\rho^{*(p)} e^{i\alpha}. \end{aligned} \tag{11}$$

Общепринятая в настоящее время форма записи функции Гамильтона содержит два независимых слагаемых, которые, смотря по обстоятельствам, зависят либо только от $\psi_\rho^{(e)}$, либо только от $\psi_\rho^{(p)}$. Такая функция инвариантна относительно преобразования (11), а закон сохранения выполняется даже для протонов и электронов в отдельности. Однако из (11) видно, что в функцию Гамильтона можно включить и члены вида

$$\psi_\rho^{(e)}\psi_\sigma^{(p)} F_{ik} \mathfrak{s}_{\rho\sigma}^{ik} + \psi_\rho^{*(e)}\psi_\sigma^{*(p)} F_{ik} \mathfrak{s}_{\rho\sigma}^{*ik}, \tag{12}$$

не меняя (10) ($\mathfrak{s}^{ik}$ означает компоненты спин-тензора Дирака). Такие добавочные члены делают возможными «процессы превращения излучения», при которых электрон и протон превращаются в световой квант. Таким образом, процессы излучения без труда укладываются в математическую схему волновой квантовой теории, в то время как в теории частиц, им, как известно, места нет.

§ 3. Преобразование $\Phi_\nu \to \Phi_\nu + \frac{\partial\chi}{\partial x_\nu}$, $\psi_\rho \to e^{-\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}\chi}\psi_\rho$

В последующих выкладках для простоты будем предполагать, что имеется только один сорт материи (ψ_ρ). Если отбросить дополнительные члены с ε и δ (стр. 31, работы I), то функция Гамильтона будет инвариантной относительно преобразования [4]

$$\Phi_\nu \to \Phi_\nu + \frac{\partial\chi}{\partial x_\nu}, \quad \psi_\rho \to e^{-\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}\chi}\psi_\rho, \quad \psi_\rho^* \to \psi_\rho^* e^{\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}\chi}, \tag{13}$$

---

[4] В цитированной работе Вейля используется термин «Eichinvarianz». (В русской литературе принят термин «градиентная инвариантность», предложенный В. А. Фоком.— *Ред.*).

где χ — произвольная функция пространства и времени (χ должна коммутировать со всеми переменными ψ_ρ, Φ_α и, кроме того, значения χ и $\partial\chi/\partial t$ в различных точках пространства также должны коммутировать между собой). Известно, что добавочные члены с ε и δ нарушают градиентную инвариантность. В этом заключается недостаток теории, по-видимому, неизбежный, если переносить уравнения Максвелла в квантовую теорию так, как это обычно делается. Однако если рассмотреть интегралы, соответствующие преобразованию (13), то возникнет возможность вообще избежать появления добавочных членов [5].

---

[5] В появившейся недавно работе Ферми [*E. Fermi*. Rendiconti R. Accad. Lincei (6), 1929, 9, H. 1, 881. (Русск. пер. в кн.: *Э. Ферми*. Научные труды, т. 1. М., «Наука», 1971, с. 302.— *Ред.*)] предлагается еще один интересный метод квантования, при котором нарушение градиентной инвариантности обусловливается не добавочными членами, а дополнительными условиями. С точки зрения, принятой в этой работе, метод Ферми можно охарактеризовать следующим образом. Пусть та часть функции Лагранжа, которая отвечает излучению, имеет вид

$$\overline{L}^{(s)} = \int \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} \left(\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}\right)^2 dV;$$

тогда, варьируя Φ_ν, приходим к уравнениям поля

$$-\sum_\nu \frac{\partial^2 \Phi_\nu}{\partial x_\nu^2} = s_\mu.$$

Из этих уравнений в силу того, что $\sum\limits_\mu \frac{\partial s_\mu}{\partial x_\mu} = 0$, для величины

$$K = \sum_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu}$$

вытекает соотношение

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_\nu^2} = 0.$$

Чтобы добиться совпадения результатов, следующих из этих уравнений поля и уравнений Максвелла, Ферми известным образом налагает на сечение $t = \text{const}$ два дополнительных условия

$$K = 0 \text{ и } \dot{K} = 0,$$

которые с течением времени изменяются так, как это следует из уравнений поля В квантовой электродинамике эти дополнительные условия интерпретируют не как соотношения между q-числами, а в том же смысле, в каком понимается уравнение (25), которое будет выведено в нашей работе позднее. Уравнения своей квантовой электродинамики Ферми получает, используя для электромагнитного поля разложение Фурье, а для поля материи — конфигурационное пространство (ср. § 7 данной работы). Ферми не рассматривал особо вопрос о релятивистской инвариантности канонических п. с. или соответствующих им операторных методов; однако эта инвариантность непосредственно следует из работы I или из § 4 настоящей работы.

В следующих выкладках мы будем исходить из функции Лагранжа без членов с ε и δ. Та ее часть, которая описывает излучение (в единицах Хевисайда), имеет вид

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2-\mathfrak{H}^2)=-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_\mu}\right)^2.$$

Будем считать, что в этой функции Лагранжа как переменные рассматриваются только Φ_i ($i=1, 2, 3$), тогда как Φ_4 представляют собой произвольно заданную функцию, коммутирующую со всеми остальными переменными. В частности, можно положить Φ_4, например, просто равной нулю. Это отвечает положению вещей в классической теории, в которой в силу преобразования (13) одна из четырех компонент совершенно произвольна. Если компонента Φ_4 фиксирована, то инвариантность относительно преобразования (13) сохранится, если функции χ не будут зависеть от времени. Итак, пусть χ — произвольные функции трех пространственных координат, достаточно быстро обращающиеся в нуль на бесконечности. Требуется найти интегралы, соответствующие преобразованиям (13).

Следует иметь в виду, что при варьировании Φ_i в функции Лагранжа получаются только три пространственные компоненты уравнений Максвелла. Уравнение же

$$\operatorname{div}\mathfrak{E}=\rho \tag{14}$$

выполняться не должно.

Вместо (13) рассмотрим бесконечно малое преобразование

$$\Phi_i\to\Phi_i+\delta\frac{\partial\chi}{\partial x_i},\qquad \psi_\rho\to\psi_\rho-\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}\,\delta\chi\psi_\rho. \tag{15}$$

Функционал F от Φ_i и ψ_ρ переходит при этом в

$$F\to F+\delta\int dV\left(\frac{\delta F}{\delta\Phi_i}\frac{\partial\chi}{\partial x_i}-\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}\frac{\delta F}{\delta\psi_\rho}\psi_\rho\chi\right)=$$
$$=F-\delta\int dV\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\delta F}{\delta\Phi_i}+\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}\frac{\delta F}{\delta\psi_\rho}\psi_\rho\right)\chi. \tag{16}$$

Поэтому оператор

$$\int dV\chi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\delta}{\delta\Phi_i}+\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}\psi_\rho\frac{\delta}{\delta\psi_\rho}\right) \tag{17}$$

соответствует преобразованию (15) и коммутирует с функцией Гамильтона. Следовательно,

$$\int dV\chi\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}_i}{\partial x_i}-\frac{e}{c}\sum_\rho\psi_\rho^*\psi_\rho\right) \tag{18}$$

есть константа. Так как это выполняется при любых функциях пространственных координат χ, то

$$\operatorname{div}\mathfrak{E}+e\sum_\rho\psi_\rho^*\psi_\rho=\text{const}=C. \tag{19}$$

Таким образом, вместо уравнения (14) при перечисленных выше условиях справедливо лишь уравнение (19), в котором C означает произвольную функцию пространственных координат. Однако следует обратить внимание на то, что любой набор значений C представляет собственную систему термов, не комбинирующихся с остальными термами, и что изменить C вообще невозможно, поскольку никакие члены в функции Гамильтона, описывающие взаимодействия или возмущения, не могут нарушить ее инвариантность относительно (15). Заведомо недопустимо использовать для этого добавочные члены типа членов с ε и δ, введенных в работе I. Все же представляется обоснованным предположение о том, что физический смысл имеют лишь те величины, которые инвариантны относительно (13). Следуя Вейлю, мы назовем такие величины градиентно-инвариантными.

Правила коммутации для C проще всего формулируются с помощью величины

$$\overline{C} = \int \chi \left(\operatorname{div} \mathfrak{E} + e \sum_{\rho} \psi_{\rho}^{*} \psi_{\rho} \right) dV = \int \chi C dV, \tag{20}$$

где χ вновь означает произвольную функцию пространственных координат. Из (47) и (57) работы I находим:

$$[\overline{C}, \psi_{\rho}] = -e\chi\psi_{\rho}, \qquad [\overline{C}, \psi_{\rho}^{*}] = e\chi\psi_{\rho}^{*}, \qquad [C, \Phi_{k}] = \frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \chi}{\partial x_{k}}. \tag{21}$$

Но это значит, что при бесконечно малой вариации χ преобразованию (15) отвечает формула

$$f \to f + \frac{2\pi i}{hc} [\delta \overline{C}, f], \tag{22}$$

где вместо f можно подставить любую из величин ψ_{ρ}, ψ_{ρ}^{*}, Φ. Поэтому формула (22) справедлива и для произвольной величины f, преобразующейся по (15). Следует также упомянуть, что обобщением этого соотношения на случай конечного преобразования (13) является

$$f \to e^{\frac{2\pi i}{h} \overline{C}} f e^{-\frac{2\pi i}{h} \overline{C}}. \tag{22'}$$

Для градиентно-инвариантных величин, к которым относятся главным образом

$$F_{\mu\nu}, \quad \psi_{\rho}^{*}\psi_{\sigma}, \quad \psi_{\rho}^{*} \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x} + e\psi_{\sigma}\Phi_{\mu} \right), \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \psi_{\rho}^{*}}{\partial x_{\mu}} - e\Phi_{\mu}\psi_{\rho}^{*} \right) \psi_{\sigma}, \tag{23}$$

имеем

$$[\overline{C}, F] = 0,$$

а также

$$[C, F] = 0, \tag{24}$$

т. е. они коммутируют с C. Если переменные системы представить в виде матриц, то градиентно-инвариантные величины не будут содержать ни одного матричного элемента, отвечающего переходам по C, хотя другие величины, не обладающие градиентной инвариантностью, такие матричные элементы содержат. Поскольку непосредственно измеряемые физические величины всегда градиентно-инвариантны, константе C можно придать любое численное значение. В частности, если выбрать

$$C = 0, \tag{25}$$

то будет выполняться и четвертая компонента уравнений Максвелла, правда, не всегда, как уравнение в q-числах, но лишь для всех градиентно-инвариантных соотношений. Равенство $C = 0$ означает, что оператор (17), будучи примененным к шредингеровскому функционалу $F(\psi_\rho, \Phi)$ любого стационарного состояния системы, дает нуль, т. е. равенством $C = 0$ отбираются те решения, при которых функционалы Шредингера также инвариантны относительно преобразований (15).

Можно задать некоторое число независимых градиентно-инвариантных п. с., из которых будут следовать все остальные градиентно-инвариантные п. с. Таковы по сути дела п. с. величин (23) между собой. Они должны совпадать с теми п. с., которые можно вывести в работе I. Они изменяются со временем согласно уравнению (21) работы I. Однако более целесообразно воспользоваться п. с. между Φ_i и $\mathfrak{E}_i$, т. е. между неградиентно-инвариантными величинами. В проблеме многих тел механики точек этому подходу отвечает использование при выводе формулы $p_k = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}$ соотношений $p_k q_l - q_l p_k = \frac{h}{2\pi i}\delta_{kl}$, хотя в конечном счете выбранная антисимметричная система не позволяет ввести подобные п. с.

Релятивистская инвариантность только что описанной схемы на первый взгляд кажется сомнительной, поскольку величина Φ_4 выделена из Φ_k. Поэтому, прежде чем исследовать этот вопрос (§ 5), мы в следующем параграфе с помощью метода, аналогичного тому, который ранее уже применялся к другим группам, рассмотрим группу Лоренца для случая релятивистски-инвариантной функции Лагранжа и канонических п. с. (например, с использованной в работе I функцией Лагранжа, содержащей ε-члены).

§ 4. Преобразование Лоренца[6]

Инвариантности функции Гамильтона относительно пространственных вращений отвечает закон сохранения момента количества движения. Что же касается собственных преобразований Лоренца, то для них метод, ко-

---

[6] Существенная часть этого параграфа, в частности выражение (30) для Λ и доказательство постоянства интеграла (29) по времени, принадлежит Дж. фон Нейману. Авторы считают своим долгом выразить ему глубокую благодарность за предоставление этих результатов.

торым мы пользовались до сих пор, следует несколько изменить, поскольку относительно этих преобразований инвариантна не сама функция Гамильтона, а функция Гамильтона и компоненты импульса, рассматриваемые вместе как компоненты одного 4-вектора. Однако, как мы увидим, собственным преобразованиям Лоренца отвечают три новых интеграла. И в этом случае достаточно рассмотреть лишь бесконечно малые преобразования [см. работу I, равенства (33′)]

$$\chi_\mu \to x_\mu + \varepsilon s_{\mu\nu} x_\nu \qquad (s_{\mu\nu} = -s_{\nu\mu}). \tag{26}$$

(Здесь и далее по повторяющимся индексам всегда проводится суммирование.) Волновые функции при этом будут изменяться по двум причинам: во-первых, Q_α в общем случае не являются скалярами, следовательно, в данной мировой точке они преобразуются по некоторому наперед заданному закону; во-вторых, изменяется сама мировая точка, с которой связаны Q_α. Поэтому мы получаем в обозначениях работы I [равенства (34′), (35′), (9) работы I]:

$$Q_\alpha \to Q_\alpha + \varepsilon t_{\alpha\beta} Q_\beta - \varepsilon \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\mu} s_{\mu\nu} x_\nu, \tag{27a}$$

$$P_{\alpha 4} \to P_{\alpha 4} - \varepsilon t_{\beta\alpha} P_{\beta 4} - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} s_{4k} x_k - \varepsilon \frac{\partial P_{\alpha 4}}{\partial x_\mu} s_{\mu\nu} x_\nu. \tag{27б}$$

Найдем теперь оператор $\overline{\Lambda}$, такой, что

$$Q_\alpha \to Q_\alpha + \varepsilon \frac{2\pi}{hc} [\overline{\Lambda}, Q_\alpha]. \tag{28a}$$

Его можно задать формулой [ср. соотношение (7) работы I между функциями Гамильтона и Лагранжа]

$$\overline{\Lambda} = \int \Lambda dV, \tag{29}$$

где

$$\Lambda = \left(t_{\alpha\beta} Q_\beta - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} s_{k\nu} x_\nu\right) P_{\alpha 4} - H s_{4k} x_k = \left(t_{\alpha\beta} Q_\beta - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\mu} s_{\mu\nu} x_\nu\right) P_{\alpha 4} + L s_{4k} x_k. \tag{30}$$

Действительно, принимая во внимание п. с.

$$\frac{2\pi}{hc} [\overline{H}, F] = \frac{\partial F}{\partial x_4}, \quad \frac{2\pi}{hc} [P_{\alpha 4}, Q'_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')$$

и подставляя (29) и (30) в (28a), получаем непосредственно выражение, совпадающее с правой частью (27a).

Для того же $\overline{\Lambda}$ выполняется соотношение

$$P_{\alpha 4} \to P_{\alpha 4} + \varepsilon \frac{2\pi}{hc} [\overline{\Lambda}, P_{\alpha 4}]. \tag{28б}$$

Из п. с. (20) работы I следует, что

$$\frac{2\pi}{hc}[\overline{\Lambda}, P_{\alpha 4}] = -\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial Q_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right) =$$

$$= -t_{\beta\alpha}P_{\beta 4} - \frac{\partial}{\partial x_i}(s_{i\nu}x_\nu P_{\alpha 4}) + \frac{\partial H}{\partial Q_\alpha}s_{4k}x_k - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}s_{4k}x_k\right).$$

Подставляя сюда выражение для $\partial P_{\alpha 4}/\partial x_4$ из уравнений поля, получаем в полном соответствии с (27б)

$$\frac{2\pi}{hc}[\overline{\Lambda}, P_{\alpha 4}] = -t_{\beta\alpha}P_{\beta 4} - \frac{\partial P_{\alpha 4}}{\partial x_i}s_{i\nu}x_\nu - \frac{\partial P_{\alpha 4}}{\partial x_4}s_{4k}x_k - \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}}s_{4k}.$$

Из (28а), (28б) по индукции следует, что при инфинитезимальном преобразовании Лоренца любая величина F, не содержащая явно координат, переходит в

$$F \to F + \varepsilon\frac{2\pi}{hc}[\overline{\Lambda}, F]. \tag{31}$$

Для конечных преобразований Лоренца отсюда следует существование оператора S, такого, что

$$F \to SFS^{-1}. \tag{31'}$$

При разложении S по степеням ε линейный член должен иметь вид

$$S = 1 + \varepsilon\frac{2\pi}{hc}\overline{\Lambda} + \ldots \tag{32}$$

Однако нам не удалось найти явное выражение для S в случае неинфинитезимальных преобразований. Функции Шредингера или функционалы φ при преобразованиях Лоренца преобразуются по закону

$$\varphi \to S\varphi,$$

где S следует считать оператором, действующим на переменные, от которых зависит φ.

Мы должны еще ответить на вопрос, зависит ли $\overline{\Lambda}$ от временно́й координаты x_4? Покажем, что ответ отрицателен, если предположить, что величины

$$J_\mu = \int\left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\mu}P_{\alpha 4} - \delta_{\mu 4}L\right)dV$$

образуют компоненты 4-вектора (вектора энергии-импульса, $J_k = -ic\mathfrak{E}_k$, $J_4 = \overline{H}$). Это означает, что для инфинитезимального оператора (26) должно выполняться соотношение

$$J_\mu \to J_\mu + \varepsilon s_{\mu\nu}J_\nu$$

и, в частности,

$$\bar{H} \to \bar{H} + \varepsilon s_{4k} J_k.$$

Отсюда, сравнивая с (31) , получаем

$$\frac{2\pi}{hc}[\bar{\Lambda}, \bar{H}] = s_{4k} J_k. \quad (33)$$

Теперь уже легко вычислить $d\bar{\Lambda}/dx_4$. Для величины F, не содержащей явно x_4, мы имели бы просто

$$\frac{\partial F}{\partial x_4} = -\frac{2\pi}{hc}[F, \bar{H}];$$

однако для $F = \bar{\Lambda}$ к этому выражению необходимо еще прибавить член, возникающий при дифференцировании оператора $\bar{\Lambda}$ по явно содержащейся в нем переменной x_4. Вклад дает второй член в (30) при $\nu = 4$, и мы получаем

$$\frac{d\bar{\Lambda}}{dx_4} = -\frac{2\pi}{hc}[\bar{\Lambda}, \bar{H}] - \int \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_4} P_{\alpha 4} s_{k4} dV = -\frac{2\pi}{hc}[\bar{\Lambda}, \bar{H}] + J_k s_{4k}. \quad (34)$$

Из (33) следует, что это выражение равно нулю, и, таким образом,

$$\bar{\Lambda} = \text{const}. \quad (35)$$

Шести компонентам $s_{\mu\nu} = -s_{\nu\mu}$ ($t_{\alpha\beta}$ однозначно определяются по $s_{\mu\nu}$) в этом равенстве отвечают шесть независимых интегралов, из которых три, соответствующих s_{ik}, можно интерпретировать как законы сохранения момента количества движения, в то время как три других, соответствующих s_{4k}, не имеют столь наглядной интерпретации. В отношении порядка сомножителей в (4) и (30) необходимо еще раз (ср. работу I) подчеркнуть, что, хотя он и играет существенную роль, постоянство интегралов по времени обеспечивается независимо от него.

Инвариантность канонических п. с. относительно преобразований Лоренца следует непосредственно из (31) или (31′). Данное здесь доказательство инвариантности несколько проще того, которое было приведено в работе I. Следует, однако, подчеркнуть, что векторный характер J_ν представляет собой новое предположение, которое нельзя вывести из одной лишь инвариантности функции Лагранжа относительно преобразований Лоренца. Напротив, это предположение оказывается верным, когда дифференциальная форма закона сохранения энергии-импульса принимает вид равенства нулю дивергенции некоторого тензора:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x} = 0.$$

Как следует из работы I, во всех физически важных случаях это условие выполняется.

§ 5. Преобразования Лоренца и градиентная инвариантность

В § 3 мы обсудили метод, согласно которому в некоторой специально выбранной системе координат сначала полагают $\Phi_4 = 0$, а затем используют канонические п. с. При этом уравнение

$$C = \operatorname{div} \mathfrak{E} + e \sum_\rho \psi_\rho^* \psi_\rho = 0 \tag{25}$$

для градиентно-инвариантных величин справедливо лишь как соотношение в q-числах, в то время как другие величины, например ψ и Φ_μ, коммутировать с C не могут. Однако, поскольку C перестановочно с энергией, равенство (25) можно использовать как дополнительное условие для функционалов Шредингера.

Такой метод сам по себе не является релятивистски-инвариантным: в какой-нибудь другой системе отсчета канонические п. с. между градиентно-неинвариантными величинами выполняться не будут. Однако можно показать, что все утверждения относительно градиентно-инвариантных величин, полученные этим методом, удовлетворяют требованию релятивистской инвариантности, если дополнительно наложить условие (25). Для этого мы сначала установим релятивистскую инвариантность функции Гамильтона и прежде всего величины $\overline{\Lambda}$, которая, как показано в предыдущем параграфе, играет решающую роль для преобразований Лоренца. Формулы (45), (51), (51′), (58′) работы I (члены с ε мы опускаем, а для излучения, кроме того, полагаем $P_{44} \equiv 0$) позволяют выписать те части функций Лагранжа и Гамильтона, которые отвечают материи и излучению:

$$L^{(m)} = -\left[\psi_\sigma^* \left(\frac{hc}{2\pi} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4} + ei\psi_\sigma \Phi_4\right) + \alpha_{\rho\sigma}^4 \psi_\rho^* \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + e\psi_\sigma \Phi_k\right) + \right.$$
$$\left. + mc^2 \alpha_{\rho\sigma}^4 \psi_\rho^* \psi_\sigma\right], \tag{36a}$$

$$H^{(m)} = -\frac{hc}{2\pi} \psi_\sigma^* \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4} - L^{(m)} = \alpha_{\rho\sigma}^k \psi_\rho^* \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + e\psi_\sigma \Phi_k\right) +$$
$$+ mc^2 \alpha_{\rho\sigma}^4 \psi_\rho^* \psi_\sigma + ei\psi_\sigma^* \psi_\sigma \Phi_4, \tag{37a}$$

$$L^{(s)} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2), \tag{36б}$$

$$H^{(s)} = -F_{4k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_4} - L^{(s)} = -F_{4k} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_k} - \frac{1}{2} F_{4k} F_{4k} + \frac{1}{4} F_{ik} F_{ik}. \tag{37б}$$

Нетрудно видеть, что $H^{(m)}$ и $H^{(s)}$ в отличие от $L^{(m)}$ и $L^{(s)}$ сами по себе не являются градиентно-инвариантными. Наоборот, полную энергию путем интегрирования по частям можно преобразовать к виду

$$\overline{H} = \int (H^{(m)} + H^{(s)})\, dV = \int \left[\alpha_{\rho\sigma}^k \psi_\rho^* \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k} + e\psi_\sigma \Phi_k\right) + \right.$$
$$\left. + mc^2 \alpha_{\rho\sigma}^4 \psi_\rho^* \psi_\sigma - \frac{1}{2} F_{4k} F_{4k} + \frac{1}{4} F_{ik} F_{ik} + i\Phi_4 C\right] dV. \tag{38}$$

Аналогичное преобразование справедливо и для полного импульса. Таким образом, при $C = 0$ величина $\overline{H}$ градиентно-инвариантна и лишь при $C = 0$ является временнóй компонентой 4-вектора.

Вычисление величины $\overline{\Lambda}$, определяемой формулами (29) и (30), производится аналогично. Однако на этот раз под $t_{\sigma\rho}$ мы понимаем величины, относящиеся к волнам материи, в то время как для Φ_μ, ввиду их векторного характера, соответствующие $t_{\mu\nu}$ тождественны с $s_{\mu\nu}$. Следовательно,

$$\overline{\Lambda} = \int dV \Big[-\frac{hc}{2\pi} \psi_\rho^* \Big(t_{\rho\sigma}\psi_\sigma - \frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_\mu} s_{\mu\nu} x_\nu \Big) + L^{(m)} s_{4k} x_k - \\ - F_{4k} \Big(s_{k\mu}\Phi_\mu - \frac{\partial\Phi_k}{\partial x_\mu} s_{\mu\nu} x_\nu \Big) + L^{(s)} s_{4k} x_k \Big]. \qquad (39)$$

Но

$$\int dV F_{4k} \Big(\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_\mu} s_{\mu\nu} x_\nu - s_{k\mu}\Phi_\mu \Big) = \int dV F_{4k} \Big(F_{\mu k} s_{\mu\nu} x_\nu + \frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_k} s_{\mu\nu} x_\nu + s_{\mu k}\Phi_\mu \Big) = \\ = \int dV F_{4k} \Big[F_{\mu k} s_{\mu\nu} x_\nu + \frac{\partial}{\partial x_k} (\Phi_\mu s_{\mu\nu} x_\nu) \Big] = \\ = \int dV \Big(F_{4k} F_{\mu k} s_{\mu\nu} x_\nu - \frac{\partial F_{4k}}{\partial x_k} \Phi_\mu s_{\mu\nu} x_\nu \Big),$$

причем последнее равенство получается в результате интегрирования по частям. В итоге имеем

$$\overline{\Lambda} = \int dV \Big[-\frac{hc}{2\pi} t_{\rho\sigma}\psi_\rho^*\psi_\sigma + \psi_\rho^* \Big(\frac{hc}{2\pi} \frac{\partial\psi_\rho}{\partial x_\mu} + ie\psi_\rho\Phi_\mu \Big) s_{\mu\nu} x_\nu + \\ + L^{(m)} s_{4k} x_k + F_{4k} F_{\mu k} s_{\mu\nu} x_\nu + L^{(s)} s_{4k} x_k - iC s_{\mu\nu}\Phi_\mu x_\nu]. \qquad (40)$$

Таким образом, величина $\overline{\Lambda}$ при $C = 0$ градиентно-инвариантна.

Из формулы (39), принимая во внимание (31), находим значения всех величин, за исключением Φ_4, если в исходной системе $\Phi_4 = 0$, а п. с. — канонические. Однако, оперируя с градиентно-неинвариантными величинами, следует иметь в виду, что они не коммутируют с C и вследствие этого дают вклад в последний член формулы (40). Его нетрудно найти, сравнивая получающийся результат с (21). Отсюда можно сделать два вывода. Во-первых, выполнимость п. с. для градиентно-инвариантных величин в новой системе отсчета следует из их выполнимости в исходной системе отсчета независимо от того, что можно сказать относительно п. с. для других величин; в самом деле, при доказательстве закона преобразования (31) в случае градиентно-инвариантных величин необходимы лишь первые п. с. Во-вторых, оказывается, что с помощью калибровочного преобразования, использующего подходящую функцию χ, можно и в новой системе отсчета вернуться к условию $\Phi_4 = 0$ и каноническим п. с. При этом функция χ, вообще говоря, должна быть q-числом.

Однако для того, чтобы доказать лоренц-инвариантность всего метода в целом, совсем не обязательно останавливаться на этом калибровочном

преобразовании более подробно. Для этого достаточно лишь установить, что и в новой системе отсчета сохраняются канонические п. с. между величинами ψ_ρ, $\overset{*}{\psi}_\sigma$, Φ_k, F_{i4} и что, как нетрудно вычислить, Φ_4 коммутирует там со всеми Φ_k и ψ_ρ, $\overset{*}{\psi}_\sigma$. Кроме того, в новой системе отсчета пространственные компоненты уравнений Максвелла, рассматриваемые как соотношения между q-числами, не выполняются. Наоборот, можно считать, что нулевое собственное значение их правых частей выделяет некоторую часть членов, не комбинирующихся с остальными, аналогично тому, как в исходной системе отсчета это делает условие $C = 0$. Если к тому же принять во внимание, что Φ_4 при $C = 0$ вообще не входит в функцию Гамильтона и что в остальных уравнениях выражение $\frac{hc}{2\pi}\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_4} + ei\psi_\sigma\Phi_4$ с помощью волновых уравнений для материи можно выразить через ψ_ρ, Φ_k и их пространственные производные, то станет ясно, что схема вычислений в новой системе отсчета тождественна со схемой в исходной системе.

§ 6. Схема вычислений без добавочных членов

Вернемся к вещественному времени $x_4 = ict$ и к обычным единицам для напряженностей поля и вектора тока; введем величины

$$\Pi_k = -\frac{1}{4\pi c}\mathfrak{E}_k, \tag{41}$$

удовлетворяющие каноническим п. с. $[\Pi_i, \Phi'_r] = \frac{h}{2\pi i}\delta_{ik}\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')$ [ср. равенства (60'), (61'), работы I], и положим в выбранной нами системе координат $\Phi_4 = \Phi_0 = 0$. Тогда функция Гамильтона (37а), (37б) будет иметь вид

$$\overline{H} = \int dV\left[\frac{hc}{2\pi i}\alpha^k_{\rho\sigma}\overset{*}{\psi}_\rho\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_k} + mc^2\alpha^4_{\rho\sigma}\overset{*}{\psi}_\rho\psi_\sigma + \frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial\Phi_k}{\partial x_i}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\pi c^2\Pi_k^2 + e\Phi_k\alpha^k_{\rho\sigma}\overset{*}{\psi}_\rho\psi_\sigma\right]. \tag{42}$$

Последний член описывает взаимодействие между излучением и материей и в дальнейшем будет рассматриваться как возмущение. Для применения нашего метода Φ_i так же, как и в работе I, целесообразно разложить по ортогональной системе, которую находят, решая невозмущенную задачу. В отличие от прежних методов, в невозмущенной задаче должны выполняться лишь три пространственных компоненты уравнений Максвелла. Положим снова [ср. формулы (84) работы I]

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1 = \sqrt{\frac{8}{L^3}}\, q_1^r \cos\frac{\pi}{L}\varkappa_r x\cdot\sin\frac{\pi}{L}\lambda_r y\cdot\sin\frac{\pi}{L}\mu_r z \\ \text{(и члены, получаемые циклической перестановкой),} \\ \Pi_1 = \sqrt{\frac{8}{L^3}}\, p_1^r \cos\frac{\pi}{L}\varkappa_r x\cdot\sin\frac{\pi}{L}\lambda_r y\cdot\sin\frac{\pi}{L}\mu_r z.\end{array}\right\} \tag{43}$$

Тогда отвечающая излучению часть функции Гамильтона для каждого собственного колебания будет иметь вид

$$\overline{H_r^{(s)}} = 2\pi c^2\,[(p_1^r)^2 + (p_2^r)^2 + (p_3^r)^2] + \frac{\pi}{8L^3}\,[(q_1^r\lambda_r - q_2^r\varkappa_r)^2 + (q_1^r\mu_r - q_3^r\varkappa_r)^2 + (q_2^r\mu_r - q_3^r\lambda_r)^2]. \qquad (44)$$

Если положить (сначала в классической теории) $q_i^r = b_i^r \sin 2\pi\nu_r t$, то из трех пространственных компонент уравнений Максвелла получатся три линейных уравнения для b_i с определителем:

$$\begin{vmatrix} X_r - \varkappa_r^2 & -\varkappa_r\lambda_r & -\varkappa_r\mu_r \\ -\lambda_r\varkappa_r & X_r - \lambda_r^2 & -\lambda_r\mu_r \\ -\mu_r\varkappa_r & -\mu_r\lambda_r & X_r - \mu_r^2 \end{vmatrix} \qquad (45)$$

(здесь $\nu_r' = \frac{2L}{c}\,\nu_r,\quad X_r = \varkappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2 - \nu_r'^2$).

Полагая его равным нулю, находим один двукратный корень $\nu_r'^2 = \varkappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2$ и один простой $\nu_r' = 0$.

Таким образом, получаем два собственных колебания с частотой

$$\nu_r' = \sqrt{\varkappa_r^2 + \lambda_r^2 + \mu_r^2},$$

соответствующие коэффициенты b_i^r которых должны удовлетворять условию

$$\varkappa_r b_1^r + \lambda_r b_2^r + \mu_r b_3^r = 0. \qquad (46)$$

К ним присоединяется апериодическое решение

$$q_i^r = b_i^r t, \qquad (47)$$

причем

$$\frac{b_1^r}{\varkappa_r} = \frac{b_2^r}{\lambda_r} = \frac{b_3^r}{\mu_r}.$$

Введем координаты P^r, Q^r основных колебаний и получим в качестве возможной схемы следующую:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4cL}}\,q_1^r &= \frac{\lambda_r}{\sqrt{\nu_r'(\varkappa_r^2+\lambda_r^2)}}\,Q_1^r + \frac{\mu_r\varkappa_r}{\nu_r'\sqrt{\nu_r'(\varkappa_r^2+\lambda_r^2)}}\,Q_2^r + \frac{\varkappa_r}{\nu_r'\sqrt{\nu_r'}}\,Q_3^r, \\ \frac{1}{\sqrt{4cL}}\,q_2^r &= -\frac{\varkappa_r}{\sqrt{\nu_r'(\varkappa_r^2+\lambda_r^2)}}\,Q_1^r + \frac{\mu_r\lambda_r}{\nu_r'\sqrt{\nu_r'(\varkappa_r^2+\lambda_r^2)}}\,Q_2^r + \frac{\lambda_r}{\nu_r'\sqrt{\nu_r'}}\,Q_3^r, \\ \frac{1}{\sqrt{4cL}}\,q_3^r &= -\frac{\sqrt{\varkappa_r^2+\lambda_r^2}}{\nu_r'\sqrt{\nu_r'}}\,Q_2^r + \frac{\mu_r}{\nu_r'\sqrt{\nu_r'}}\,Q_3^r, \\ \sqrt{4cL}\,p_1^r &= \lambda_r\sqrt{\frac{\nu_r'}{\varkappa_r^2+\lambda_r^2}}\,P_1^r + \frac{\mu_r\varkappa_r}{\sqrt{\nu_r'(\varkappa_r^2+\lambda_r^2)}}\,P_2^r + \frac{\varkappa_r}{\sqrt{\nu_r'}}\,P_3^r, \end{aligned} \qquad (48)$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{4cL}\, p_2^r &= -\varkappa_r \sqrt{\frac{\nu_r'}{\varkappa_r^2+\lambda_r^2}}\, P_1^r + \frac{\mu_r\lambda_r}{\sqrt{\nu_r'(\varkappa_r^2+\lambda_r^2)}}\, P_2^r + \frac{\lambda_r}{\sqrt{\nu_r'}}\, P_3^r, \\
\sqrt{4cL}\, p_3^r &= \qquad\qquad -\frac{\sqrt{\varkappa_r^2+\lambda_r^2}}{\sqrt{\nu_r'}}\, P_2^r \qquad + \frac{\mu_r}{\sqrt{\nu_r'}}\, P_3^r.
\end{aligned} \tag{48}
$$

В новых переменных соответствующая излучению часть функции Гамильтона примет вид

$$
\bar{H}^{(s)} = \sum_r 2\pi\nu_r \left\{\frac{1}{2}[(P_1^r)^2 + (Q_1^r)^2] + \frac{1}{2}[(P_2^r)^2 + (Q_2^r)^2] + \frac{1}{2}(P_3^r)^2\right\}. \tag{49}
$$

Вместо P_1^r, Q_1^r, P_2^r, Q_2^r в качестве переменных так же, как и в формуле (98) работы I, вводят число $M_{r,1}$ и соответственно $M_{r,2}$ световых квантов и сопряженный ему угол:

$$
\begin{aligned}
Q_\lambda^r &= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{h}{4\pi}}\,\left(M_{r\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h}\chi_{r,\lambda}} - e^{-\frac{2\pi i}{h}\chi_{r,\lambda}} M_{r\lambda}^{1/2}\right), \\
P_\lambda^r &= \sqrt{\frac{h}{4\pi}}\,\left(M_{r\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h}\chi_{r,\lambda}} + e^{-\frac{2\pi i}{h}\chi_{r,\lambda}} M_{r\lambda}^{1/2}\right), \qquad \lambda = 1, 2.
\end{aligned} \tag{50}
$$

Для P_3^r такая подстановка была бы неразумной, поскольку Q_3^r не входит в невозмущенную функцию Гамильтона и, следовательно, P_3^r в невозмущенной системе — просто константа. Поэтому в качестве независимых переменных для амплитуды вероятности мы используем N_r, $M_{r\lambda}$ ($\lambda = 1{,}2$) и P_3^r. В предположении, что для материи выполняется принцип запрета, уравнение Шредингера в этих переменных будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&\Big[-E + \sum_s N_s E_s + \sum_{r,\lambda} M_{r\lambda} h\nu_r + \sum_r \pi\nu_r (P_3^r)^2\Big]\, \varphi(N_1, N_2, \ldots, M_1, \ldots, P_3^1, \ldots) = \\
&= -ie\sqrt{\frac{h}{4\pi}} \sum_{s,t,r} N_s(1-N_t)\,\nu_s(N_1, \ldots, 1-N_s)\cdot\nu_t(N_1, \ldots, 1-N_t)\, \times \\
&\quad\times \Big\{\sum_{\lambda=1,2} c_{st}^{r\lambda}\, [M_{r\lambda}^{1/2}\varphi(N_1, \ldots, 1-N_s, 1-N_t; M_1, \ldots, M_{r\lambda}-1, P_3^1, \ldots) - \\
&\quad - (M_{r\lambda}+1)^{1/2}\varphi(N_1, \ldots, 1-N_s, 1-N_t, M_1, \ldots, M_{r\lambda}+1; P_3^1, \ldots)] + \\
&\quad + c_{st}^{r3}\sqrt{\frac{h}{\pi}}\,\frac{\partial}{\partial P_3^r}\varphi(N_1, \ldots, 1-N_s, 1-N_t; M_1, \ldots, P_3^1, \ldots)\Big\} - \\
&\quad - ie\sqrt{\frac{h}{4\pi}} {\sum_{s,r}}' N_s \Big\{\sum_{\lambda=1,2} c_{ss}^{r\lambda}\, [M_{r\lambda}^{1/2}\varphi(N_1, \ldots; M_1, \ldots, M_{r\lambda}-1, \ldots, P_3^1, \ldots) - \\
&\quad - (M_{r\lambda}+1)^{1/2}\varphi(N_1, \ldots, M_1, \ldots, M_{r\lambda}+1, \ldots, P_3^1, \ldots)] + \\
&\quad + \sqrt{\frac{h}{\pi}}\, c_{ss}^{r3}\, \frac{\partial}{\partial P_3^r}\varphi(N_1, \ldots, M_1, \ldots, P_3^1, \ldots)\Big\}.
\end{aligned} \tag{51}
$$

Однако, помимо этого уравнения, амплитуда φ должна удовлетворять еще одному условию, состоящему в том, что оператор C, будучи примененным к φ, дает нуль. Оно записывается так:

$$P_3^r\varphi(N_1, \ldots, M_1, \ldots, P_3^1, \ldots) + e\sum_{s,t}{}' N_s(1-N_t)\nu_s(N_1, \ldots, 1-N_s) \times$$
$$\times \nu_t(N_1, \ldots, 1-N_t)\, d_{st}^r\varphi(N_1, \ldots, 1-N_s, 1-N_t, \ldots, M_1, \ldots, P_3^1, \ldots) +$$
$$+ \sum_s N_s d_{ss}^r\varphi(N_1, \ldots; M_1, \ldots, P_3^1, \ldots) = 0. \qquad (52)$$

Здесь

$$d_{st}^r = \int u_\rho^{*s} u_\rho^t v_r^0 dV, \qquad (53)$$

а

$$v_r^0 = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{c\nu_r'^3}}\sin\frac{\pi}{L}\varkappa_r x\cdot\sin\frac{\pi}{L}\lambda_r y\cdot\sin\frac{\pi}{L}\mu_r z. \qquad (54)$$

В невозмущенной системе, когда взаимодействием между материей и излучением пренебрегают, согласно (52) выполняется равенство

$$P_3^r = 0. \qquad (55)$$

Следовательно, остаются лишь два известных основных колебания, 1 и 2. Однако в возмущенной системе следует учитывать и P_3^r, что ввиду непрерывности спектра собственных значений P_3^r приводит к некоторым отличиям от указанной ранее схемы.

Так же как и в работе I, мы ограничимся ниже лишь электростатическим взаимодействием. Впрочем, магнитные и запаздывающие взаимодействия с помощью метода, изложенного в работе I, были рассмотрены Брейтом [7].

Для электростатического взаимодействия проще всего подставить вместо оператора P_3^r в (51) его выражение из (52). Затем в (51) можно в первом приближении пренебречь членами с c_{st}^r по сравнению с членами, содержащими d_{st}^r. Возмущение энергии в этом приближении станет равным лишь среднему по времени значению $\sum_r \pi\nu_r (P_3^r)^2$, причем под P_3^r здесь понимается оператор из (51). Следовательно, возмущение собственного значения (N_s^0 представляет собой значение N_s в невозмущенной системе) будет равно

$$\Delta E = e^2\sum_{r,s,t}{}' \pi\nu_r N_s^0(1-N_t^0)\, d_{st}^r d_{ts}^r + e^2\sum_{r,s,t}\pi\nu_r N_s^0 N_t^0 d_{ss}^r d_{tt}^r. \qquad (56)$$

Точно так же, как в работе I, находим

$$\Delta E = \frac{e^2}{2}\Big[\sum_{s,t}{}' N_s^0(1-N_t^0)A_{st,\,ts} + \sum_{s,t}N_s^0N_t^0A_{ss,\,tt}\Big], \qquad (57)$$

---

[7] *G. Breit.* Phys. Rev., 1929, **34**, 553.

где $A_{st,ts}$ — обменный интеграл (114) из работы I:

$$A_{st,ts} = \int dV dV' \frac{u_\rho^{*s}(P)\, u_\rho^{+}(P)\, u_\sigma^{*n}(P')\, u_\sigma^{m}(P')}{r_{PP'}},$$

а u_ρ^s — ортогональная система, по которой производится разложение собственных функций для материи.

Из (57) следует, что и наши методы приводят к бесконечному значению энергии взаимодействия электрона с самим собой, что во многих случаях делает невозможными приложения теории. Поэтому преимущество изложенных здесь методов состоит лишь в том, что становятся излишними добавочные члены в уравнениях Максвелла.

§ 7. Переход к конфигурационному пространству[8]

В этом параграфе будет рассмотрен вопрос о том, как (при заданной энергии) вычислить вероятность того, что при заданном числе $M_{r\lambda}$ ($\lambda = 1,2$) световых квантов и данном $P_{r,3}$ N рассматриваемых электронов находятся внутри объема $dq_{i1}, \ldots, dq_{iN}$ в окрестности точки $q_{i1}, \ldots, q_{ip}, \ldots, q_{iN}$. Индекс i принимает значения от 1 до 3 и относится к трем пространственным координатам, индекс p принимает значения от 1 до N и нумерует различные частицы. Ясно, что полное число частиц предполагается постоянным; поэтому процессы излучения сначала будут исключены. Кроме того, в разложении Фурье мы будем учитывать лишь ту его часть, которая связана с излучением, и пренебрегать другой частью, отвечающей волнам материи, ибо нулевую энергию излучения пока удается исключить только таким способом. Мы покажем, что амплитуды вероятности

$$\varphi_{\rho_1 \ldots \rho_N}(q_{i1}, \ldots, q_{iN}, M_{r\lambda}, P_{r3})$$

можно определить так, что индексы ρ_p в них будут принимать четыре значения в соответствии с четырьмя волновыми функциями дираковской теории электрона со спином, а искомую вероятность можно будет вычислять по формуле

$$\sum_{\rho_1 \ldots \rho_N = 1}^{4} |\varphi_{\rho_1 \ldots \rho_N}(q_{i1}, \ldots, q_{iN}, M_{r\lambda}, P_{r3})|^2.$$

Эти функции удовлетворяют простым дифференциальным уравнениям, причем никаких упрощений или приближений вводить не приходится. Ясно, что введение таких функций облегчает сравнение результатов квантовой теории волновых полей с результатами нерелятивистской теории Шредингера проблемы многих тел (волны в конфигурационном пространстве). Эти функции можно вводить и косвенно через функции

[8] При разработке этого метода мы пользовались дружеской поддержкой Р. Оппенгеймера, за что и выражаем ему нашу благодарность.

$\Phi\,(N_s,\ M_{r\lambda},\ P_{r3})$, определение которых было дано в предыдущем параграфе; но мы все же предпочитаем прямой путь.

Прежде всего выведем уравнение Шредингера, отвечающее функции Гамильтона (42), и дополнительное условие для функционала, аналогичное условию $C=0$, в переменных $N_\rho\,(x_i)=\overset{*}{\psi}_\rho\psi_\rho$, $M_{r\lambda}$, P_{r3}. Важнейшая часть последующих рассуждений будет состоять в переходе от $N_\rho\,(x_i)$ к переменным q_{i1}, ρ_1, ..., q_{ip}, ρ_p, ..., q_{iN}, ρ_N.

Из (43), (48) и (50) следует, что

$$\Phi_k=\sum_{\lambda=1,2}\sum_r\sqrt{\frac{h}{4\pi}}\,v_k^{r\lambda}\frac{1}{i}\left(M_{r\lambda}^{1/2}e^{\frac{2\pi i}{h}\chi_{r,\lambda}}-e^{-\frac{2\pi i}{h}\chi_{r,\lambda}}M_{r\lambda}^{1/2}\right)+\sum_r v_k^{r3}Q^{r3},\quad (58\text{a})$$

$$\Pi_k=\sum_{\lambda=1,2}\sum_r\sqrt{\frac{h}{4\pi}}\,\frac{\nu_r}{2c^2}\,v_k^{r\lambda}\left(M_{r\lambda}^{1/2}\,e^{\frac{2\pi i}{h}\chi_{r,\lambda}}+e^{-\frac{2\pi i}{h}\chi_{r,\lambda}}M_{r\lambda}^{1/2}\right)+$$

$$+\sum_r\frac{\nu_r}{2c^2}\,v_k^{r3}P^{r3}.\quad (58\text{б})$$

При этом

$$v_1^{r\lambda}=c\sqrt{\frac{2}{\nu_r}}\sqrt{\frac{8}{L^3}}\,f^{r\lambda}\cdot\cos\frac{2\pi\nu_r}{c}\,\varepsilon_{r1}x_1\cdot\sin\frac{2\pi\nu_r}{c}\,\varepsilon_{r2}x_2\cdot\sin\frac{2\pi\nu_r}{c}\,\varepsilon_{r3}x_3\quad (59)$$

(и члены, получающиеся при циклической перестановке),

если f_k^λ при каждом r равна матрице

k	$\lambda=1$	$\lambda=2$	$\lambda=3$
1	$\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}}$	$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}}$	ε_1
2	$-\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}}$	$\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}}$	ε_2
3	0	$-\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}$	ε_3

(48′)

Здесь $\varepsilon_{r\lambda}$ — компоненты единичного вектора в направлении нормали к волне $\left(\sum_k\varepsilon_k^2=1\right)$ и при каждом r

$$\varkappa=\nu'\varepsilon_1,\qquad \lambda=\nu'\varepsilon_2,\qquad \mu=\nu'\varepsilon_3\qquad \left(\nu'=\frac{2L}{c}\nu\right).$$

Отсюда

$$\operatorname{div}\mathfrak{E}=-4\pi c\operatorname{div}\Pi=$$

$$=\sum_r\frac{8\pi^2}{c}\sqrt{\frac{\nu_r^3}{2}}\sqrt{\frac{8}{L^3}}\sin\frac{2\pi\nu_r}{c}\,\varepsilon_{r1}x_1\cdot\sin\frac{2\pi\nu_r}{c}\,\varepsilon_{r2}x_2\cdot\sin\frac{2\pi\nu_r}{c}\,\varepsilon_{r3}x_3\cdot P_{r3}.$$

Следовательно, используя разложение в ряд Фурье, мы получаем возможность разрешить уравнение

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} + 4\pi e \sum_\rho \psi_\rho^* \psi_\rho = 0$$

относительно P_{r3}:

$$P_{r3} + e \int v_{0r}(x_i) \sum_\rho \psi_\rho^* \psi_\rho dV = 0, \qquad (60)$$

где величина v_{0r} определена по формуле (54). Функция Гамильтона после вычеркивания нулевой энергии излучения согласно (42) примет вид

$$\begin{aligned}\overline{H} = {} & \sum_{r,\lambda} M_{r\lambda} h\nu_{r\lambda} + \sum_r \pi\nu_r (P_{r3})^2 + \int dV \left(\frac{hc}{2\pi i}\alpha_{\rho\sigma}^k \psi_\rho^* \frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_k} + mc^2 \alpha_{\rho\sigma}^4 \psi_\rho^* \psi_\rho\right) + \\ & + e\sum_r \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \sum_{\lambda=1,2} \frac{1}{i}\left(M_{r\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{h}\chi_{r\lambda}} - e^{-\frac{2\pi i}{h}\chi_{r\lambda}} M_{r\lambda}^{1/2}\right) \times \\ & \times \int v_k^{r\lambda} \alpha_{\rho\sigma}^k \psi_\rho^* \psi_\sigma dV + e\sum_r Q^{r3} \int v_k^{r3} \alpha_{\rho\sigma}^k \psi_\rho^* \psi_\sigma dV. \end{aligned} \qquad (61)$$

Оба соотношения (60) и (61) запишем теперь как операторные уравнения, действующие на функционал $\varphi\{N_\rho(x_i), M_{r\lambda}, P_{r3}\}$. При этом мы учтем, что $e^{\pm\frac{2\pi i}{h}\chi}$ переводит значение M в $M \mp 1$, а Q^{r3} следует заменить на $\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial P_{r3}}$.

В итоге получим:

$$\left(P_{r3} + e\int v_{0r}(x_i) \sum_\rho N_\rho(x_i)\, dV\right) \varphi\{N_\rho(x_1), M_{r\lambda}, P_{r3}\} = 0, \qquad (60')$$

$$\begin{aligned} & \left[-E + \sum_{r,\lambda} M_{r\lambda} h\nu_{r\lambda} + \sum_r \pi\nu_r (P_{r3})^2\right] \varphi\{N_\rho(x_i), M_{r\lambda}, P_{r3}\} + \\ & + \left[\int dV \left(\frac{hc}{2\pi i}\alpha_{\rho\sigma}^k \psi_\rho^* \frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_k} + mc^2\alpha_{\rho\sigma}^4 \psi_\rho^*\psi_\sigma\right)\right] \varphi\{N_\rho(x_i), M_{r\lambda}, P_{r3}\} + \\ & + e\sum_r \sqrt{\frac{h}{4\pi}}\, i \sum_{\lambda=1,2} \left(\int v_k^{r\lambda} \alpha_{\rho\sigma}^k \psi_\rho^* \psi_\sigma dV\right) \times \\ & \times [(M_{r\lambda}+1)^{1/2} \varphi\{N_\rho(x_i), \ldots, M_1, \ldots, M_{r\lambda}+1, \ldots, P_{r3}\} - \\ & - M_{r\lambda}^{1/2} \varphi\{N_\rho(x_i), \ldots, M_1, \ldots, M_{r\lambda}-1, \ldots, P_{r3}\}] + \\ & + e\sum_r \frac{ih}{2\pi}\left(\int v_k^{r3} \alpha_{\rho\sigma}^k \psi_\rho^* \psi_\sigma dV\right) \frac{\partial}{\partial P_{r3}} \varphi\{N_\rho(x_i), \ldots, M_1, \ldots, P_{r3}\} = 0. \end{aligned} \qquad (61')$$

Далее нас будет интересовать вопрос о том, как действуют операторы типа

$$\int \sum_{\rho,\sigma} f_{\rho\sigma}(x_i)\, \psi_\rho^* \psi_\sigma dV \quad \text{и} \quad \int \sum_{\rho,\sigma} f_{\rho\sigma}(x_i)\, \psi_\rho^* \frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_k} dV$$

(f здесь c-числа) на функционал $\Phi\ \{N_\rho(x_i)\}$, если $N_\rho(x_i) = \overset{*}{\psi}_\rho \psi_\rho$ и выполняются канонические п. с.

$$[\psi_\rho, \overset{*}{\psi}_\sigma] = \delta_{\rho\sigma}\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')$$

и соответствующие соотношения для $\varphi(q_{i1}, \ldots, q_{ip}, \ldots, q_{iN})$.

Необходимая нам теория преобразований разрабатывалась уже неоднократно [9]. Однако целесообразно сначала заменить $\psi(x_i)$ ступенчатыми функциями, затем перейти в конфигурационное пространство и лишь в конце снова перейти к непрерывным функциям. Итак, пусть имеются ячейки равной величины ΔV, внутри которых ψ^* и ψ принимают одинаковые значения. Положим

$$a_{\rho,x_i} = \psi_\rho(x_i), \quad \overset{*}{a}_{\rho,x_i} = \overset{*}{\psi}_\rho(x_i)\,\Delta V;$$

тогда

$$[a_{\rho,x_i}, \ \overset{*}{a}_{\rho(x_i)}]_\pm = \delta_{\rho\sigma}\delta_{x_i x_i'},$$

причем x_i принимает лишь дискретные значения. Ясно, что при фиксированном числе N частиц (это предположение вначале существенно) величина

$$N_{\rho,x_i} = \overset{*}{a}_{\rho x_i} a_{\rho x_i}$$

имеет собственные значения

$$\sum_{p=1}^{N} \delta_{\rho\rho_p}\delta_{x_i q_{ip}},$$

причем некоторые пары ρ_p, q_p могут совпадать. Следовательно,

$$N_\rho(x_i) = \overset{*}{\psi}_\rho(x_i)\,\psi_\rho(x_i) = \lim \frac{1}{\Delta V}\overset{*}{a}_{\rho,\,x_i} a_{\rho,\,x_i}$$

имеет собственные значения

$$\sum_{p=1}^{N} \delta_{\rho\rho_p}\delta(x_i - q_{ip}),$$

где $\delta(x_i - q_{ip})$ — дельта-функция Дирака.

Переход в конфигурационное пространство, т. е. сопоставление $\varphi(\rho_1, q_1, \ldots, \rho_N, q_N)$ величине $\Phi\ \{N_\rho, x_i\}$, осуществляется по формулам:

$$\Phi(1_{\rho_1 q_1}, 1_{\rho_2 q_2}, \ldots, 1_{\rho_N q_N}) = (N!)^{1/2}\varphi(\rho_1, q_1, \ldots, \rho_N, q_N),$$

$$\Phi(1_{\rho_1 q_1}, \ldots, 2_{\rho_\tau q_\tau}, \ldots, 1_{\rho_{N-1} q_{N-1}}) = (N!/2!)^{1/2}\varphi(\rho_1 q_1, \ldots, \rho_\tau q_\tau, \ldots, \rho_\tau q_\tau, \ldots), \tag{62}$$

$$\Phi(N^{(1)}_{\rho_1, q_1}, N^{(2)}_{\rho_2, q_2}, \ldots) = \left(\frac{(N!)}{\prod\limits_\tau N^{(2)}!}\right)^{1/2} \varphi(\underbrace{\rho_1 q_1, \ldots, \rho_1 q_1}_{N^{(1)}\text{ раз}}, \underbrace{\rho_2 q_2, \ldots, \rho_2 q_2, \ldots}_{N^{(2)}\text{ раз}}, \ldots).$$

---

[9] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc., 1927, **A114**, 243; *P. Jordan, O. Klein.* Z. Phys., 1927, **45**, 751; *P. Jordan.* Z. Phys., 1927, **45**, 766; *P. Jordan, E. Wigner.* Z. Phys., 1928, **47**, 631.

Мы видим, что в первой строке все пары ρ_p, q_p различны, во второй — две пары одинаковы и в последней совпадают все $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, ... пар. В случае статистики Бозе — Эйнштейна $\varphi(\rho_1 q_1, \ldots, \rho_N q_N)$ симметрична, в случае принципа запрета — антисимметрична. В последнем случае остается лишь первая строка.

Дальнейшие выкладки для простоты будут проводиться для статистики Бозе — Эйнштейна. В этом случае

$$a^*_{\rho, x_i} = N^{1/2}_{\rho x_i} e^{-i\Theta_{\rho, x_i}}, \qquad a_{\rho, x_i} = e^{i\Theta_{\rho, x_i}} N^{1/2}_{\rho, x_i}$$

и оператор $e^{\pm i\Theta_{\rho,x_i}}$ переводит N_{ρ,x_i} в $N_{\rho,x_i} \pm 1$. Следовательно,

$$\Big(\sum_{\rho, \sigma, x_i} f_{\rho, \sigma, x_i} a^*_{\rho, x_i} a_{\sigma, x_i}\Big) \Phi\{N_{\rho', x_i'}\} =$$

$$= \sum_{\rho, \sigma, x_i} f_{\rho, \sigma, x_i} N^{1/2}_{\rho, x_i} (N_{\sigma, x_i} + 1)^{1/2} \Phi\{N_{\rho', x_i'} - \delta_{\rho\rho'}\delta_{x_i, x_i'} + \delta_{\sigma\rho'}\delta_{x_i x_i'}\}. \tag{63}$$

При фиксированных ρ, σ, x_i аргумент Φ в правой части отличается от аргумента в левой части тем, что значение N в ячейке ρ, x_i будет на единицу меньше, а значение N в ячейке σ, x_i — на единицу больше. Если значение N в ячейке ρ, x_i было равно нулю, то множитель $N^{1/2}_{\rho,x_i}$ обращает правую часть в нуль. В частности, если положить N_{ρ',x_i}' равным собственному значению $\sum_\rho \delta_{\rho'\rho_p} \delta_{x_i' q_{ip}}$ и перейти в конфигурационное пространство по формулам (62), то

$$\Big(\sum_{\rho, \sigma, x_i} f_{\rho, \sigma, x_i} a^*_{\rho, x_i} a_{\sigma, x_i}\Big) \varphi(\rho_1 q_1, \ldots, \rho_N q_N) =$$

$$= \sum_{\rho, \sigma, x_i} f_{\rho, \sigma, x_i} \sum_p \delta_{\rho\rho_p} \delta_{x_i q_{ip}} \varphi(\rho_1, q_{i1}, \ldots, \sigma, q_{ip}, \ldots, \rho_N, q_{iN}) =$$

$$= \sum_\sigma \sum_p f_{\rho_p, \sigma, q_{ip}} \varphi(\rho_1 q_{i1}, \ldots, \sigma, q_{ip}, \ldots, \rho_N q_{iN}). \tag{64}$$

При этом множители $N^{1/2}_{\rho,x_i}$, $(N_{\sigma,x_i} + 1)^{1/2}$, входящие в (63), взаимно уничтожаются вследствие возникающих из (62) комбинаторных множителей. Переход к непрерывному случаю осуществляется в (64) без труда. Имеем:

$$\varphi_{\rho_1 \ldots \rho_N}(q_1, \ldots, q_N) = \lim (\Delta V)^{-N/2} \varphi(\rho_1, q_1, \ldots, \rho_N, q_N),$$

$$\Phi\{N_\rho(x_i)\} = \lim (\Delta V)^{-N/2} \Phi\{N_{\rho, x_i}\}.$$

Таким образом, мы приходим для

$$N_\rho(x_i) = \sum_{p=1}^{N} \delta_{\rho, \rho_p} \delta(x_i - q_{ip})$$

к соответствию

$$\left(\int f_{\rho\sigma}(x_i)\,\psi_\rho^*(x_i)\,\psi_\sigma(x_i)\,dV\right)\Phi\left\{\sum_{p=1}^{N}\delta_{\rho,\,\rho_p}\delta(x_i-q_{ip})\right\}\to$$

$$\to\sum_{p=1}^{N}\sum_{\sigma_p} f_{\rho_p,\,\sigma_p}(q_{ip})\,\varphi_{\rho_1\ldots\sigma_p\ldots\rho_N}(q_{i1},\ldots,q_{iN}). \qquad (65)$$

В частности, при $f_{\rho,\sigma}=\delta_{\rho,\sigma}\,f$

$$\left(\int f(x_i)\,N(x_i)\,dV\right)\Phi\left\{\sum_{p=1}^{N}\delta_{\rho,\,\rho_p}\delta(x_i-q_{ip})\right\}\to$$

$$\to\sum_{p=1}^{N} f(q_{ip})\,\varphi_{\rho_1\ldots\rho_N}(q_{i1},\ldots,q_{iN1}). \qquad (66)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\left(\int\sum_{\rho,\,\sigma} f_{\rho\sigma}(x_i)\,\psi_\rho^*\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_k}\,dV\right)\Phi\left\{\sum_{p=1}^{N}\delta_{\rho,\,\rho_p}\delta(x_i-q_{ip})\right\}\to$$

$$\to\sum_{p=1}^{N}\sum_{\sigma_p} f_{\rho_p,\,\sigma_p}(q_{ip})\frac{\partial}{\partial q_{kp}}\,\varphi_{\rho_1\ldots\sigma_p\ldots\rho_N}(q_{i1},\ldots,q_{iN}). \qquad (67)$$

Как следует из рассуждений Иордана и Вигнера, утверждения (65) — (67) остаются в силе и для принципа запрета, если предположить, что функция φ антисимметрична относительно пар ρ_p, q_p. (При этом последовательность аргументов ρ_1, q_1, . . ., ρ_N, q_N существенна для определения знака.)

Наши уравнения (60′) и (61′) теперь уже можно записать непосредственно в конфигурационном пространстве:

$$\left[P_{r3}+e\sum_{p=1}^{N}v_{0r}(q_{ip})\right]\varphi_{\rho_1\ldots\rho_N}(q_{i1},\ldots,q_{iN},M_{r\lambda},P_{r3})=0, \qquad (68)$$

$$\Big[-E+\sum_{r,\,\lambda}M_{r\lambda}h\nu_{r\lambda}+\sum_{r}\pi\nu_r(P_{r3})^2\Big]\varphi_{\rho_1\ldots\rho_N}(q_{i1},\ldots,q_{iN},M_{r\lambda},P_{r\lambda})+$$
$$+\sum_{k,\,p,\,\sigma_p}\left(\frac{hc}{2\pi i}\alpha^k_{\rho_p,\,\sigma_p}\frac{\partial}{\partial q_{kp}}+mc^2\alpha^4_{\rho_p,\,\sigma_p}\right)\varphi_{\rho_1\ldots\sigma_p\ldots\rho_N}(q_{ip},M_{r\lambda},P_{r3})+$$
$$+e\sum_{r}\sqrt{\frac{h}{4\pi}}\,i\sum_{\lambda=1,2}\;\sum_{k,p,\sigma_p}v_k^{r\lambda}(q_{ip})\,\alpha^k_{\rho_p,\,\sigma_p}\times$$
$$\times\left[(M_{r\lambda}+1)^{1/2}\varphi_{\rho_1\ldots\sigma_p\ldots\rho_N}(q_{ip},M_1,\ldots,M_{r\lambda+1},\ldots,P_{r3})-\right.$$
$$\left.-M_{r\lambda}^{1/2}\varphi_{\rho_1\ldots\sigma_p\ldots\rho_N}(q_{ip},M_1,\ldots,M_{r\lambda}-1,\ldots,P_{r3})\right]+$$
$$+e\sum_{r}\frac{ih}{2\pi}\sum_{k,\,p,\,\sigma_p}v_k^{r3}(q_{ip})\,\alpha^k_{\rho_p\sigma_p}\frac{\partial}{\partial P_{r3}}\varphi_{\rho_1\ldots\sigma_p\ldots\rho_N}(q_{ip},M_{r\lambda},P_{r3})=0.$$

(69)

В какой мере эти уравнения можно аппроксимировать уравнениями Шредингера в конфигурационном пространстве, будет более подробно исследовано в работе Р. Оппенгеймера, которая будет опубликована в ближайшее время. Однако и в этом случае собственная энергия электронов приводит к трудностям.

Следует еще упомянуть, каким образом надо обобщать применявшийся нами метод перехода в конфигурационное пространство на случай, когда имеются процессы излучения. В этом случае число частиц уже не будет оставаться постоянным. Однако вычисления можно проводить в конечномерных пространствах с помощью системы функций

$$\varphi(M_{r\lambda}, P_{r3}),\ \varphi(q_{i1}, M_{r\lambda}, P_{r3}), \ldots, \varphi(q_{i1}, \ldots, q_{iN}, M_{r\lambda}, P_{r3}) \ldots,$$

отвечающих соответственно тому случаю, когда имеется нуль, одна,..., N,... частиц. Затем надлежащая теория должна была бы связать эти функции системой дифференциальных уравнений. Установление такой системы уравнений не составило бы труда, если добавочные члены имели бы вид, указанный в формуле (12) из § 2. Не следует забывать при этом, что члены подобного специального вида вряд ли имеют физический смысл.

Поступила 7 сентября 1929 г.

1932

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДИРАКА ДЛЯ ЭЛЕКТРОНА И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА*

Показано, как следует обобщить метод Вентцеля — Бриллюэна, чтобы его можно применить и в том случае, когда волновая функция обладает несколькими компонентами, как это имеет место в теории Дирака. При этом наш приближенный метод автоматически обеспечивает равенство по порядку величины дифракционных эффектов и эффектов, связанных со спином, на что обращал особое внимание Бор. Лучи в геометрической оптике, в результате предельного перехода следующие из волнового уравнения, соответствуют классическим релятивистским траекториям точечного электрона без спина. Проведены подробные выкладки для случая одномерного электрического поля с произвольной зависимостью от координаты. В связи с парадоксом Клейна получена общая формула для частоты перехода электронов через промежуточную, классически запрещенную область в другую область, где их траектории должны были бы соответствовать отрицательной массе.

§ 1. Введение

Предельный переход к классической механике, или к геометрической оптике, в нерелятивистской волновой механике исследован уже достаточно подробно. Следуя Вентцелю и Бриллюэну, решение $\psi(q, t)$ уравнения Шредингера записывают в виде [1]

$$\psi = e^{i/\hbar S}$$

и разлагают S по степеням $\hbar/i$:

$$S = S_0 + \frac{\hbar}{i} S_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 S_2 + \ldots$$

В нулевом приближении получают уравнение в частных производных Гамильтона — Якоби (сокращенно ГЯ) классической механики для S_0, а в первом приближении — соотношение, эквивалентное уравнению непрерывности, устанавливающее связь отношений компонент плотности тока и плотности вероятности $\psi^*\psi$ с компонентами скорости в каждой точке классической траектории. Компоненты скорости равны

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

где в функцию Гамильтона $H(p, q)$ вместо p_k подставлены выражения $p_k = \frac{\partial S_0}{\partial q_k}$. Тем самым показано, что лучи в геометрической оптике, соответ-

---

* *Diracs Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik.*— Helv. phys. acta, 1932, 5, 179—199.

[1] В оригинале статьи Паули обозначает постоянную Планка, деленную на 2π, буквой h.— *Ред.*

ствующие рассматриваемой квантовомеханической задаче, и траектории связанной с ней задачи классической механики полностью совпадают.

Метод Вентцеля — Бриллюэна, как впервые было строго доказано Крамерсом[2], удается видоизменить так, что с его помощью можно находить асимптотические собственные значения энергии в предельном случае больших квантовых чисел. При этом решения уравнения ГЯ приходится рассматривать и в такой области пространства, в которой, если следовать классической механике, частицы при заданном значении энергии E находиться не могут, а решение S_0 уравнения ГЯ становится мнимым. В точках поворота классической траектории, где обе области граничат друг с другом, соответствующее геометрической оптике приближенное решение $\psi(q, t)$ становится сингулярным, вследствие чего в этих точках геометрическая оптика теряет смысл. Поэтому для того, чтобы найти правильное соответствие между решениями геометрической оптики в классически достижимой и в классически запрещенной областях («соотношения перехода»), т. е. найти те частные решения уравнения ГЯ, которые и в той, и в другой области аппроксимируют *одно и то же* частное решение точного волнового уравнения, необходимо, как показал Крамерс, вернуться к точному волновому уравнению. Оно выполняется и в области непрерывного энергетического спектра, где речь идет уже не об отыскании собственных значений, а о нахождении собственной функции во всем пространстве.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы перенести этот метод на случай релятивистского волнового уравнения Дирака для элементарных частиц (электрона или протона), находящихся в заданном внешнем электромагнитном поле. Некоторые характерные для этого случая результаты не имеют аналогий в нерелятивистской волновой механике. Прежде всего, волновая функция в дираковской теории, помимо пространственно-временных координат x_1, x_2, x_3, t, зависит еще и от индекса ρ, пробегающего значения от 1 до 4. Для предельного перехода к геометрической оптике необходимо положить

$$\psi_\rho = e^{\frac{i}{\hbar} S_\rho}, \tag{1}$$

потребовав дополнительно, чтобы в разложении

$$S_\rho = S_0 + \frac{\hbar}{i} S_{1\rho} + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 S_{2\rho} + \ldots \tag{2}$$

первый член S_0 не зависел от индекса ρ. Оказывается, что лишь таким путем удается получить решения, соответствующие траекториям (лучам) классической механики. Под «классической» здесь следует понимать механику, в которую включены также и релятивистские поправки, поскольку никаких предположений, ограничивающих скорость электрона, мы не делаем. Развитая теория применима, например, к допускающим классическое описание экспериментам по отклонению катодных и β-лучей в электрических

[2] *Н. А. Kpamers*. Z. Phys., 1926, 39, 828.

и магнитных полях, поставленным для проверки зависимости массы электрона от скорости. С формальной точки зрения вместо (1) и (2) удобнее ввести другие обозначения, согласно которым

$$a_\rho = \exp(S_{1\rho} + S_{2\rho} + \ldots),$$

а у S_0 можно отбросить индекс 0. Формулы

$$\psi_\rho = a_\rho e^{\frac{i}{\hbar} S} \tag{3}$$

и

$$a_\rho = a_{0\rho} + \frac{\hbar}{i} a_{1\rho} + \ldots \tag{4}$$

полностью эквивалентны формулам (1) и (2). При этом никаких предположений о вещественности a_ρ и S вначале не делается.

Формальное изложение этого метода дается ниже (§ 2). Он аналогичен переходу от классической волновой оптики к геометрической оптике в анизотропных средах (кристаллах), при котором необходимо учитывать поляризацию света, т. е. векторный характер напряженностей поля. *Если пренебречь спином электрона*, то классические траектории, возникающие в результате последовательного проведения такого предельного перехода, в нашем случае полностью совпадают с траекториями точечного электрона с зарядом e в релятивистской механике. Это связано с тем, что спиновый момент электрона пропорционален кванту действия, вследствие чего при сделанных упрощениях *влияние спина на пространственно-временнóе распределение плотности и тока частиц автоматически начнет сказываться в том же приближении, что и эффекты, обусловленные дифракцией волн.* Такое положение вещей согласуется с замечанием Бора о том, что определение спинового момента свободного электрона с помощью классически описываемого эксперимента по отклонению электрона принципиально невозможно [3]. *Излагаемый здесь систематический метод получения приближений позволяет автоматически учитывать это подчеркнутое Бором обстоятельство при вычислениях.*

В то время как в общем случае, т. е. при произвольной зависимости внешнего электромагнитного поля от пространственных координат, интегрирование дифференциальных уравнений для S и $a_{0\rho}$ технически невозможно, его удается провести в некоторых частных случаях, важнейшим из которых является случай электрического поля, изменяющегося лишь в определенном направлении (магнитное поле отсутствует, задача одномерна). В качестве примера этот случай рассмотрен в § 3.

Полученный результат, помимо прочего, допускает интересное применение к парадоксу Клейна, состоящему в том, что теоретически электроны могут преодолевать потенциальные барьеры с высотой порядка mc^2, двигаясь при таком барьере как частицы с отрицательной массой. Здесь речь идет

---

[3] Обсуждение других примеров, а также дальнейшую литературу см. в докладе В. Паули о магнитном электроне на Сольвеевском конгрессе 1930 г. (Rapport du Conseil — Solvay, 1930). (См. следующую статью.— *Ред.*).

о том, чтобы при заданной полной энергии E электроны с положительной массой, находящиеся в *одной* области пространства, могли бы с точки зрения классической релятивистской механики точки попадать в другую область, отвечающую электронам с отрицательной массой. Хотя эти области разделены классически непроходимой промежуточной областью, с точки зрения волновой механики промежуточная область обладает отличной от нуля прозрачностью. В § 4 показано, каким образом, используя для S в промежуточной области мнимое решение, а в точках, лежащих на границе между различными областями,— соотношения перехода, найденные с помощью уже упоминавшегося метода Крамерса, можно получить общее выражение для коэффициента прозрачности D. Это соотношение остается (асимптотически) верным при произвольных *непрерывных* потенциале (зависящем лишь от *одной* координаты) и напряженности поля. Хотя в своей первоначальной работе Клейн [4] исходил из *скачка* потенциала на граничной поверхности и, следовательно, принятые нами предположения в его работе не выполнялись, все имеющиеся к настоящему времени в литературе выражения для коэффициента прозрачности D (например, для случая однородного электрического поля), выведенные в предположении непрерывности потенциала, легко следуют как частные случаи из нашего общего выражения.

§ 2. Общий метод последовательных приближений

Осуществляя намеченную нами программу, подставим уже приводившиеся выражения

$$\psi_\rho = a_\rho e^{\frac{i}{\hbar}S}, \tag{3}$$

$$a_\rho = a_{0\rho} + \frac{\hbar}{i} a_{1\rho} + \ldots \tag{4}$$

в волновое уравнение Дирака

$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_0} - e\Phi_0\right)\psi_\rho + \alpha^k_{\rho\sigma}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{e}{c}\Phi_k\right)\psi_\sigma + m_0 c\beta_{\rho\sigma}\psi_\sigma = 0. \tag{5}$$

Здесь $x_0 = ct$; $\alpha^k_{\rho\sigma}$ и $\beta^k_{\rho\sigma}$ ($k = 1, 2, 3$; $\rho, \sigma = 1, \ldots, 4$) — элементы матриц α^k и β, удовлетворяющих известным соотношениям:

$$\alpha^i\alpha^k + \alpha^k\alpha^i = 2\delta_{ik}, \qquad \alpha^k\beta + \beta\alpha^k = 0, \qquad \beta^2 = 1. \tag{6}$$

По каждому повторяющемуся индексу здесь и в дальнейшем предполагается суммирование, причем по латинским индексам — от 1 до 3, по греческим — от 1 до 4; заряд электрона, как обычно, обозначен через e. Далее, здесь Φ_0 — электростатический, а Φ_k — векторный потенциал внешнего поля. Подставляя (3) и (4) в (5), располагая результат по степеням h/i

---

[4] *O. Klein.* Z. Phys., 1929, 53, 157.

и вводя сокращенные обозначения

$$\pi_0 = -\frac{\partial S}{\partial x_0} + \frac{e}{c}\Phi_0, \qquad \pi_k = \frac{\partial S}{\partial x_0} + \frac{e}{c}\Phi_k, \tag{7}$$

получаем последовательно решаемые уравнения:

$$-\pi_0 a_{0\rho} + \pi_k \overset{k}{\alpha}_{\rho\sigma} a_{0\sigma} + m_0 c \beta_{\rho\sigma} a_{0\sigma} = 0, \tag{I$_0$}$$

$$-\pi_0 a_{1\rho} + \pi_k \overset{k}{\alpha}_{\rho\sigma} a_{1\sigma} + m_0 c \beta_{\rho\sigma} a_{1\sigma} = -\left(\frac{\partial a_{0\rho}}{\partial x_0} + \overset{k}{\alpha}_{\rho\sigma} \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k}\right), \tag{I$_1$}$$

. . . .

$$-\pi_0 a_{n\rho} + \pi_k \overset{k}{\alpha}_{\rho\sigma} a_{n\sigma} + m_0 c \beta_{\rho\sigma} a_{n\sigma} = -\left(\frac{\partial a_{n-1,\rho}}{\partial x_0} + \overset{k}{\alpha}_{\rho\sigma} \frac{\partial a_{n-1,\sigma}}{\partial x_k}\right). \tag{I$_n$}$$

Если начать с нулевого приближения — уравнения (I_0), то можно заметить, что эти однородные уравнения для $a_{0\rho}$ имеют решения лишь тогда, когда π_0 и π_k удовлетворяют определенным условиям, эквивалентным обращению в нуль определителя системы уравнений. В нашем случае их получают известным способом: умножая (I_0) на

$$\pi_0 \delta_{\tau\rho} + \pi_l \overset{l}{\alpha}_{\tau\rho} + m_0 c \beta_{\tau\rho}$$

и суммируя по ρ, из перестановочных соотношений (6) находят

$$\left(-\pi_0^2 + \sum_{k=1}^{3} \pi_k^2 + m_0^2 c^2\right) a_{0\tau} = 0.$$

Если не все $a_{0\tau}$ (т. е. $a_{0\tau}$ не при всех τ) тождественно равны нулю, то отсюда получают уравнение

$$-\pi_0^2 + \sum_{k=1}^{3} \pi_k^2 + m_0^2 c^2 = 0; \tag{II$_0$}$$

последнее совпадает с уравнением ГЯ классической релятивистской механики точки, если вспомнить смысл величин π_0 и π_k, задаваемых соотношениями (7). *Таким образом, это уравнение играет роль условия разрешимости уравнений* (I_0) *для* $a_{0\rho}$.

Будем считать, что для S, а в силу соотношений (7) и для π_0 и π_k задано некоторое частное решение уравнения (II_0). Каким образом можно последовательно найти $a_{0\rho}$, $a_{1\rho}$ и т. д.? Существенно, что величины $a_{0\rho}$ уравнениями (I_0) определяются неполностью. Как известно, при заданных π_0 и π_k существуют два линейно-независимых решения

$$a_{0\rho} = A_\rho(\pi_0, \pi_k) \quad \text{и} \quad a_{0\rho} = B_\rho(\pi_0, \pi_k)$$

уравнений (I_0), соответствующие двум направлениям спина. Можно считать их выбранными так (ср. также § 3), что они зависят явно не от координат x_0, x_k, а лишь от самих π_0, π_k (которые в свою очередь являются функциями координат), как это подчеркивается нашими обозначениями. Тогда

общее решение (I_0) будет иметь вид

$$a_{0\rho} = C(x_0, x_k) A_\rho(\pi_0, \pi_k) + C'(x_0, x_k) B_\rho(\pi_0, \pi_k), \tag{8}$$

где C и C' — пока еще произвольные функции координат (не зависящие от индекса ρ).

Следует иметь в виду, что *условие разрешимости уравнений* (I_1) *следующего приближения* для $a_{0\rho}$ накладывает новые ограничения. В этом случае речь идет о системе линейных неоднородных уравнений, у которых соответствующие однородные уравнения имеют решение. Как известно, условие разрешимости неоднородной системы состоит в том, что ее правая часть должна быть ортогональна решениям сопряженных однородных уравнений. В нашем случае последние имеют вид (при $\sigma = 1, \ldots, 4$)

$$-\overset{+}{a}_\sigma \pi_0 + \overset{+}{a}_\rho \overset{k}{\alpha}_{\rho\sigma} \pi_k + \overset{+}{a}_\rho \beta_{\rho\sigma} m_0 c = 0. \tag{9}$$

Если совокупность чисел $\overset{+}{a}_\rho$ удовлетворяет этим уравнениям, то соотношение

$$\sum_\rho \overset{+}{a}_\rho (-\pi_0 a_{n\rho} + \pi_k \overset{k}{\alpha}_{\rho\sigma} a_{n\sigma} + m_0 c \beta_{\rho\sigma} a_{n\sigma}) \equiv 0$$

выполняется тождественно по $a_{n\rho}$. В результате из (I_1), ..., (I_n), ... следуют новые условия:

$$\overset{+}{a}_\rho \left(\frac{\partial a_{0\rho}}{\partial x_0} + \overset{k}{\alpha}_{\rho\sigma} \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k} \right) = 0, \tag{II_1}$$

. . . .

$$\overset{+}{a}_\rho \left(\frac{\partial a_{n-1,\rho}}{\partial x_0} + \overset{k}{\alpha}_{\rho\sigma} \frac{\partial a_{n-1,\sigma}}{\partial x_k} \right) = 0. \tag{II_n}$$

Поскольку уравнения (9) так же, как и (I_0), имеют два линейно-независимых решения (их мы укажем ниже), условие (II_1) распадается на два независимых уравнения, которые можно рассматривать как *систему двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно еще неизвестных функций C и C' из* (8). Если C и C' в некоторый момент времени произвольно заданы, то уравнения (II_1) однозначно определяют их и при любых других значениях времени. Вообще условия разрешимости (II_n) уравнений (I_n) служат для полного определения величин $a_{n-1,\rho}$.

Решения $\overset{+}{a}_\rho$ уравнений (9) можно выписать сразу же, поскольку матрицы α^k и β — эрмитовы. Если $A_\rho(\pi_0, \pi_k)$ и $B_\rho(\pi_0, \pi_k)$ — уже введенные решения уравнений (I_0), справедливые при любых π_0 и π_k, поскольку выполнено лишь условие (II_0), то соотношениям (9) можно удовлетворить, положив

$$\overset{+}{a}_{0\rho} = A^*_\rho(\pi_0, \pi_k) \quad \text{и} \quad \overset{+}{a}_{0\rho} = B^*_\rho(\pi_0, \pi_k).$$

Здесь A^*_ρ и B^*_ρ — функции, комплексно-сопряженные A_ρ и B_ρ. Это значит, что всюду, где в A_ρ и B_ρ явно входит i, его следует заменить на $-i$. Если

же π_0 и π_k не вещественны, то A_ρ и B_ρ *не следует* заменять комплексно-сопряженными величинами; в этом случае они сохраняют свои первоначальные значения. Лишь при вещественных π_0 и π_k решения A_ρ^* и B_ρ^* оказываются комплексно-сопряженными A_ρ и B_ρ. Поэтому вместо (II_1), ..., (II_n) можно также положить:

$$\left.\begin{aligned} A_\rho^*(\pi_0, \pi_k)\left(\frac{\partial a_{0\rho}}{\partial x_0} + \alpha_{\rho\sigma}^k \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial X_k}\right) = 0,\\ B_\rho^*(\pi_0, \pi_k)\left(\frac{\partial a_{0\rho}}{\partial x_0} + \alpha_{\rho\sigma}^k \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k}\right) = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}_1')$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned} A_\rho^*(\pi_0, \pi_k)\left(\frac{\partial a_{n-1,\rho}}{\partial x_0} + \alpha_{\rho\sigma}^k \frac{\partial a_{n-1,\rho}}{\partial x_k}\right) = 0,\\ B_\rho^*(\pi_0, \pi_k)\left(\frac{\partial a_{n-1,\rho}}{\partial x_0} + \alpha_{\rho\sigma}^k \frac{\partial a_{n-1,\rho}}{\partial x_k}\right) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}_n')$$

Соотношения, эквивалентные только что выписанным, можно получить совершенно аналогично тому, как это было сделано при переходе от (I_0) к (II_0), умножая соотношения (I_1), . . ., (I_n) на

$$+\pi_0\delta_{\tau\rho} + \pi_l\alpha_{\tau\rho}^l + m_0c\beta_{\tau\rho}$$

и суммируя по ρ. При этом левая часть вследствие (II_0) тождественно обращается в нуль, и мы имеем:

$$+\pi_0\left(\frac{\partial a_{0\tau}}{\partial x_0} + \alpha_{\tau\sigma}^k \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k}\right) + \pi_l\left(\alpha_{\tau\rho}^l \frac{\partial a_{0\rho}}{\partial x_0} + (\alpha^l\alpha^k)_{\tau\sigma} \frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k}\right) + \\ + m_0c\left(\beta_{\tau\rho}\frac{\partial a_{0\rho}}{\partial x_k} + (\beta\alpha^k)_{\tau\sigma}\frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k}\right) = 0, \qquad (\mathrm{II}_1'')$$

. . . .

$$+\pi_0\left(\frac{\partial a_{n-1,\tau}}{\partial x_0} + \alpha_{\tau\sigma}^k \frac{\partial a_{n-1,\tau}}{\partial x_k}\right) + \pi_l\left(\alpha_{\tau\rho}^l \frac{\partial a_{n-1,\rho}}{\partial x_0} + (\alpha^l\alpha^k)_{\tau\sigma} \frac{\partial a_{n-1,\sigma}}{\partial x_k}\right) + \\ + m_0c\left(\beta_{\tau\rho}\frac{\partial a_{n-1,\rho}}{\partial x_k} + (\beta\alpha^k)_{\tau\rho}\frac{\partial a_{n-1,\sigma}}{\partial x_k}\right) = 0. \qquad (\mathrm{II}_n'')$$

Правда, действуя таким способом, мы получаем для каждого n четыре уравнения (II_n''). Однако линейно-независимыми будут два из них; они-то и эквивалентны уравнениям (II_n').

Проинтегрировать уравнения (I) и следующие из них условия (II) в общем случае, т. е. при произвольном внешнем поле Φ_k, не удается. Вместо этого мы обсудим одно важное следствие из уравнений (I_1') и (II_1'), которое позволяет установить связь этих уравнений с траекториями классической механики. В классически достижимой области функция S, а следовательно, π_0 и π_k вещественны, что и будет использовано в наших последующих

рассуждениях, в отличие от предыдущих, в явном виде. Прежде всего, учитывая вещественность π_0 и π_k, находим из (II_1') и (8)

$$\overset{*}{a}_{0\rho}\left(\frac{\partial a_{0\rho}}{\partial x_0}+\alpha^k_{\rho\sigma}\frac{\partial a_{0\sigma}}{\partial x_k}\right)=0,$$

а переходя к комплексно-сопряженным величинам, находим вследствие эрмитовости α^k, что

$$\left(\frac{\partial \overset{*}{a}_{0\sigma}}{\partial x_0}+\frac{\partial \overset{*}{a}_{0\rho}}{\partial x_k}\alpha^k_{\rho\sigma}\right)a_{0\sigma}=0.$$

Сложив оба эти уравнения и введя плотность и ток по формулам

$$\rho=\overset{*}{a}_{0\rho}a_{0\rho},\qquad s_k=\frac{1}{c}\,i_k=\overset{*}{a}_{0\rho}\alpha^k_{\rho\sigma}a_{0\sigma},\tag{10}$$

получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_0}+\frac{\partial s_k}{\partial x_k}=0.\tag{11}$$

Принимаем во внимание, что при вещественной S эта функция в силу (3) выпадает из выражений для плотности и тока, так что последние зависят лишь от a_ρ. В этом случае выражения (10) задают первое приближение. Кроме того, следует подчеркнуть, что уравнение непрерывности содержит меньше сведений, чем уравнения (I_1), (II_1'), поскольку они не могут быть выведены из уравнения непрерывности.

Теперь мы можем получить простые выражения для отношений тока и плотности, которые в рассматриваемом приближении так же, как и в нерелятивистской волновой механике, совпадают со скоростью электрона на классической траектории. Мы исходим из соотношений (I_0) и (9), подставляя в последние вместо $\overset{+}{a}_\rho$ величины $\overset{*}{a}_{0\rho}$, что разрешается при вещественных π_0 и π_k. Эти соотношения запишем в виде:

$$\begin{aligned}
-\pi_0a_{0\sigma}+\pi_l\alpha^l_{\sigma\tau}a_{0\tau}+m_0c\beta_{\sigma\tau}a_{0\tau}&=0,\\
-\overset{*}{a}_{0\sigma}\pi_0+\overset{*}{a}_{0\rho}\alpha^l_{\rho\sigma}\pi_l+\overset{*}{a}_{0\rho}\beta_{\rho\sigma}m_0c&=0,
\end{aligned}$$

умножим первое уравнение слева на $\overset{*}{a}_{0\rho}\alpha^k_{\rho\sigma}$, второе уравнение — справа на $\alpha^k_{\sigma\tau}a_{0\tau}$, просуммируем каждое из них по σ и сложим оба уравнения. В результате получим

$$\begin{aligned}
-2\pi_0\,(\overset{*}{a}_{0\rho}\alpha^k_{\rho\sigma}a_{0\sigma})+\pi_l\overset{*}{a}_{0\rho}\,(\alpha^k\alpha^l+\alpha^l\alpha^k)_{\rho\tau}a_{0\tau}&+\\
+\,m_0c\overset{*}{a}_{0\rho}\,(\alpha^k\beta+\beta\alpha^k)_{\rho\tau}a_{0\tau}&=0.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание перестановочные соотношения (6) и используя выражения (10) для плотности и тока, упрощаем полученное уравнение, приводя его к виду

$$\pi_0s_k=\pi_k\rho,$$

или

$$i_k = cs_k = \rho \frac{c\pi_k}{\pi_0}\,. \tag{12}$$

Функция Гамильтона $H(p_k, x_k)$ классической релятивистской механики точки теперь имеет вид

$$H(p_k, x_k) = -\frac{\partial S}{\partial t} = c\left(\pi_0 - \frac{e}{c}\Phi_0\right) = c\sqrt{m^2c^2 + \sum_{k=1}^{3}\left(p_k + \frac{e}{c}\Phi_k\right)^2} - e\Phi_0; \tag{13}$$

следовательно,

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{c\pi_k}{\sqrt{m^2c^2 + \sum\limits_{k=1}^{3}\pi_k^2}} = \frac{c\pi_k}{\pi_0}\,, \tag{14}$$

причем в соответствии с (7) и (II_0)

$$\pi_0 = +\sqrt{m^2c^2 + \sum_{k=1}^{3}\pi_k^2}. \tag{15}$$

Выбор знака перед квадратным корнем в (13) — (15), очевидно, соответствует частицам с положительной массой. Для частиц с отрицательной массой эти формулы имели бы вид:

$$H(p_k, x_k) = -\frac{\partial S}{\partial t} = c\left(\pi_0 - \frac{e}{c}\Phi_0\right) = -c\sqrt{m^2c^2 + \sum_{k=1}^{3}\left(p_k + \frac{e}{c}\Phi_k\right)^2} - e\Phi_0, \tag{13'}$$

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = -\frac{c\pi_k}{\sqrt{m^2c^2 + \sum\limits_{k=1}^{3}\pi_k^2}} = \frac{c\pi_k}{\pi_0}\,, \tag{14'}$$

$$\pi_0 = -\sqrt{m^2c^2 + \sum_{k=1}^{3}\pi_k^2}. \tag{15'}$$

Сравнение (14) и (14′) с (12) показывает, что в обоих случаях

$$i_k = \rho\frac{\partial H}{\partial p_k} = \rho\dot{x}_k.$$

Отсюда и из уравнения непрерывности (11) следует, что частицы движутся по траекториям, определяемым из уравнений

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}\,. \tag{16a}$$

Из уравнения ГЯ (II_0), эквивалентного уравнению

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial x_k}, x_k\right),$$

и из соотношения

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial x_k}$$

получаем, как обычно,

$$\dot{p}_k = \frac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial x_l}\dot{x}_l = -\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\right)_p - \frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial^2 S}{\partial x_l \partial x_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial x_l}\frac{\partial H}{\partial p_l},$$

откуда

$$\dot{p}_k = -\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\right)_p. \tag{16б}$$

Таким образом, траектории в точности совпадают с траекториями классической релятивистской механики точки, если речь идет о частице без спина. Что же касается эффектов, связанных с наличием спина, и их влияния на распределение плотности и тока, то они вместе с дифракционными эффектами впервые скажутся на амплитудах $a_{1\rho}$ следующего приближения, на вычислениях которых мы не будем останавливаться сколько-нибудь подробно.

Важным частным случаем общего решения уравнений (I) и (II) является стационарное решение, при котором ψ_ρ содержит время лишь в виде экспоненты по формуле

$$\psi_\rho = u_\rho(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \tag{17}$$

где E энергия. Тогда

$$S = \bar{S}(x) - Et \tag{18}$$

и

$$a_\rho = a_\rho(x), \qquad \frac{\partial a_\rho}{\partial x_0} = 0,$$

$$u_\rho(x) = a_\rho(x) e^{i/\hbar \bar{S}}, \tag{3'}$$

где $\bar{S}$ и a теперь уже не зависят от t. Вместо (7) получаем:

$$\pi_0 = \frac{E + e\Phi_0}{c}, \qquad \pi_k = \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_k}, \tag{7'}$$

$$H\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial x_k}, x_k\right) = E,$$

а все члены в уравнениях (I) и (II), которые содержат производные по x_0, пропадают.

§ 3. Пример. Частица в электрическом поле фиксированного направления

Выберем ось x_3 в направлении поля так, чтобы потенциал Φ_0 зависел лишь от x_3, а в остальном был произволен. Поскольку магнитное поле отсутствует, $\Phi_k = 0$, следовательно, $\pi_k = p_k = \frac{\partial S}{\partial x_k}$. Мы хотим ограничиться случаем, когда частица движется параллельно оси x_3, вследствие чего $p_1 = p_2 = 0$. Тогда для стационарного решения, принадлежащего энергии E, функция S также будет зависеть лишь от x_3, причем

$$\pi_0 = \frac{E + e\Phi_0}{c}, \qquad p_3 = \pi_3 = \pm\sqrt{\pi_0^2 - m^2c^2}, \qquad \overline{S} = \int\limits_x \pi_3 dx_3. \tag{19}$$

В классически достижимой области $|\pi_0| > mc$, следовательно π_3 вещественно, и знаки соответствуют двум направлениям движения частицы: в сторону $+x_3$ или же в сторону $-x_3$.

Для дальнейших вычислений выберем какой-нибудь конкретный вид матриц Дирака, например, такой, чтобы матрица β была диагональной:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{20a}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20б}$$

Тогда уравнения (I_1) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} (-\pi_0 + mc)\, a_{01} + \pi_3 a_{03} &= 0, \\ (-\pi_0 - mc)\, a_{03} + \pi_3 a_{01} &= 0, \end{aligned} \tag{21a}$$

$$\begin{aligned} (-\pi_0 + mc)\, a_{02} - \pi_3 a_{01} &= 0, \\ (-\pi_0 - mc)\, a_{04} - \pi_3 a_{02} &= 0. \end{aligned} \tag{21б}$$

В силу уравнения непрерывности компонента тока s_3 в нашей одномерной задаче должна быть постоянной для стационарных решений, поскольку для них

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_0} = 0,$$

и определяться формулой

$$s_3 = (\overset{*}{a}_{01} a_{03} + \overset{*}{a}_{03} a_{01}) - (\overset{*}{a}_{02} a_{04} + \overset{*}{a}_{04} a_{02}). \tag{22}$$

Уравнениям (21а) и (21б) можно удовлетворить, выбрав

$$a_{0\rho} = A_\rho \quad \text{или} \quad a_{0\rho} = B_\rho, \tag{23}$$

если в соответствии с нормировкой

$$A_1 A_3 = 1, \qquad B_2 B_4 = -1 \tag{24}$$

положить

$$A_1 = \sqrt{\frac{\pi_3}{\pi_0 - mc}}, \quad A_3 = \sqrt{\frac{\pi_0 - mc}{\pi_3}}, \quad A_2 = A_4 = 0, \tag{25а}$$

$$B_1 = B_3 = 0, \quad B_2 = -\sqrt{\frac{\pi_3}{\pi_0 - mc}}, \quad B_4 = \sqrt{\frac{\pi_0 - mc}{\pi_3}}. \tag{25б}$$

Необходимо иметь в виду, что вследствие соотношения $\pi_3^2 = \pi_0^2 - m^2c^2$ одно из уравнений (21а) или (21б) всегда следует из другого. Ток s_3 при вещественных π_0 и π_3 и любых решениях A_ρ и B_ρ постоянен ввиду формулы (22).

Осталось проверить условия (II_1), которые в нашем случае имеют следующий вид (i в A_ρ и B_ρ явно не входит!):

$$\begin{gathered} A_1 \frac{\partial a_{03}}{\partial x_3} + A_3 \frac{\partial a_{01}}{\partial x_3} = 0, \\ -B_2 \frac{\partial a_{04}}{\partial x_3} - B_4 \frac{\partial a_{02}}{\partial x_3} = 0, \end{gathered} \tag{26}$$

или

$$\begin{gathered} \frac{1}{A_1} \frac{\partial a_{01}}{\partial x_3} = -\frac{1}{A_3} \frac{\partial a_{03}}{\partial x_3}, \\ \frac{1}{B_2} \frac{\partial a_{02}}{\partial x_3} = -\frac{1}{B_4} \frac{\partial a_{04}}{\partial x_3}. \end{gathered} \tag{26'}$$

В силу (24) для $a_{0\rho} = A_\rho$ и $a_{0\rho} = B_\rho$ эти условия выполнены; следовательно, наиболее общее допустимое решение можно представить в виде

$$a_{0\rho} = C_1 A_\rho + C_2 B_\rho \tag{27}$$

с *постоянными* (не зависящими от координат) C_1 и C_2. Формула (27) остается в силе и в том случае, если выражения под радикалами в (25а) и (25б) перестают быть положительными и вещественными. Там, где $\pi_3 = 0$ и, следовательно, $\pi_0 = \pm mc$, решения $a_{0\rho}$ становятся сингулярными, и приближение геометрической оптики перестает быть справедливым.

§ 4. Применение к парадоксу Клейна

В § 2 уже упоминалось, что случай $\pi_0 > 0$ соответствует частице с положительной, а случай $\pi_0 < 0$— с отрицательной массой. Если K_l — компонента силы Лоренца, действующей при заданном внешнем электромагнитном поле на заряд электрона ($-e$), то из канонических уравнений движения (16) и функции Гамильтона (13) [соответственно (13')] следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}_l}{\sqrt{1 - \sum\limits_k \frac{\dot{x}_k^2}{c^2}}}\right) = K_l$$

$$\left[\text{соответственно} \quad -\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}_l}{\sqrt{1-\sum\limits_k \frac{\dot{x}_k^2}{c^2}}}\right) = K_l\right].$$

Таким образом, при $\pi_0 < 0$ ускорение и сила имеют противоположные направления, как если бы кинетическая энергия была отрицательной.

Как следует из (15) [соответственно из (15')], при вещественных π_k всегда $|\pi_0| > mc$, так что решения с $\pi_0 > 0$ и $\pi_0 < 0$ не могут переходить друг в друга непрерывно. Поэтому в классической релятивистской механике точки такие решения можно однозначно исключить, и это не приведет ни к каким противоречиям. Известно, однако, что в волновой механике, как показал Клейн, дело обстоит иначе, поскольку частицы могут попадать и в такую область, где часть π_k могут быть комплексными и где π_0 заключено между $-mc$ и $+mc$.

Поясним это на рассмотренном в предыдущем параграфе примере электрического поля, зависящего только от одной координаты. Будем считать при этом, что потенциал Φ_0 с возрастанием x_3 *непрерывно убывает*, так что при достаточно больших x_3 он отрицателен. Тогда при заданной энергии E необходимо различать три области:

1) $x_3 < a, \quad mc < \pi_0 = \dfrac{E + e\Phi_0}{c}$,

2) $a < x_3 < b, \quad -mc < \pi_0 = \dfrac{E + e\Phi_0}{c} < mc$,

3) $b < x_3, \quad \pi_0 = \dfrac{E + e\Phi_0}{c} < mc$.

Точка $x_3 = a$ соответствует точке поворота лежащей в области 1 классической траектории частицы с положительной массой и полной энергией E; расположенная правее точка $x_3 = b$ соответствует точке поворота лежащей в области 3 классической траектории частицы с отрицательной массой и той же энергией E. Поскольку и в области 1, и в области 3 выражение $\pi_3^2 = \pi_0^2 - m^2c^2$ положительно, величина π_3 вещественна. В обеих критических точках $x_3 = a$ и $x_3 = b$ она обращается в нуль. В классически недостижимой области 2 выражение $\pi_3'^2$ отрицательно и π_3 — чисто мнимо.

В каждой области может существовать волна, распространяющаяся как вправо, так и влево; поэтому то частное решение, которое мы хотим рассматривать, необходимо характеризовать более подробно. Это должно быть такое стационарное решение, которое в качестве предельного случая могло бы описывать и волновой пакет, движущийся к критической точке $x_3 = a$ слева. Оно характеризуется тем, что в области 3 имеется *лишь одна* волна, распространяющаяся вправо, причем подразумевается, что групповая скорость волны, определяемая формулой (14'), направлена в сторону положительного направления оси x_3. Тогда в области 1 будут находиться одна падающая и одна отраженная волны. Требуется найти коэффициент прозрачности D, который по определению равен отношению тока, от-

вечающего волне, бегущей в области 3 направо, к току, отвечающему волне, бегущей направо в области 1. Мы увидим, что наше асимптотическое приближение оказывается верным лишь тогда, когда коэффициент D очень мал. Формальное упрощение достигается при этом за счет того, что можно ограничиться случаем, когда a_{03} и a_{04} всюду равны нулю, т. е. решением A_ρ из § 3. Решение B_ρ, соответствующее равенству нулю a_{01} и a_{02}, а также наиболее общая линейная комбинация обоих решений вида (27) привели бы, как нетрудно проверить, к тому же коэффициенту прозрачности.

Итак, воспользуемся формулами (25а), соответствующими

$$\pi_3 = \pm\sqrt{\pi_0^2 - m^2c^2}.$$

В области 1:

$$u_{01} = a_{01}e^{\frac{i}{\hbar}\bar{S}} = \left(\frac{\pi_0 + mc}{\pi_0 - mc}\right)^{1/4}\left[C_1 \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_a^{x_3}\sqrt{\pi_0^2 - m^2c^2}\,dx_3\right) + \right.$$

$$\left. + C_1' \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_a^{x_3}\sqrt{\pi_0^2 - m^2c^2}\,dx_3\right)\right],$$

$$u_{03} = a_{03}e^{\frac{i}{\hbar}\bar{S}} = \left(\frac{\pi_0 - mc}{\pi_0 + mc}\right)^{1/4} \times$$

$$\times\left[C_1 \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_a^{x_3}\sqrt{\pi_0^2 - m^2c^2}\,dx_3\right) - C_1' \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_a^{x_3}\sqrt{\pi_0^2 - m^2c^2}\,dx_3\right)\right],$$

$$s_3 = \overset{*}{u}_{01}u_{03} + \overset{*}{u}_{03}u_{01} = 2\,(|C_1|^2 - |C_1'|^2). \qquad (28_1)$$

В области 2:

$$u_{01} = a_{01}e^{\frac{i}{\hbar}\bar{S}} = \left(\frac{mc + \pi_0}{mc - \pi_0}\right)^{1/4} \times$$

$$\times\left[C_2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_a^{x_3}\sqrt{-\pi_0^2 + m^2c^2}\,dx_3\right) + C_2' \exp\left(+\frac{i}{\hbar}\int_a^{x_3}\sqrt{-\pi_0^2 + m^2c^2}\,dx_3\right)\right],$$

$$u_{03} = a_{03}e^{\frac{i}{\hbar}\bar{S}} = \left(\frac{-\pi_0 + mc}{\pi_0 + mc}\right)^{1/4} \times$$

$$\times\left[C_2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_a^{x_3}\sqrt{-\pi_0 + m^2c^2}\,dx_3\right) - C_1' \exp\left(+\frac{i}{\hbar}\int_a^{x_3}\sqrt{-\pi_0^2 + m^2c^2}\,dx_3\right)\right],$$

$$s_3 = \overset{*}{u}_{01}u_{03} + \overset{*}{u}_{03}u_{01} = 2i\,[C_2C_2'^{*} - C_2'^{*}C_2']. \qquad (28_2)$$

В области 3:

$$u_{01} = a_{01} e^{\frac{i}{\hbar}\bar{S}} = \left(\frac{-\pi_0 - mc}{-\pi_0 + mc}\right)^{1/4} \times$$
$$\times \left[C_3 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_b^{x_3} \sqrt{\pi_0^2 - m^2c^2}\,dx_3\right) + C_3' \exp\left(+\frac{i}{\hbar}\int_b^{x_3} \sqrt{\pi_0^2 - m^2c^2}\,dx_3\right)\right],$$

$$u_{03} = a_{03} e^{\frac{i}{\hbar}\bar{S}} = \left(\frac{-\pi_0 + mc}{-\pi_0 - mc}\right)^{1/4} \times$$
$$\times \left[C_3 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_b^{x_3} \sqrt{\pi_0^2 - m^2c^2}\,dx_3\right) + C_3' \exp\left(+\frac{i}{\hbar}\int_b^{x_3} \sqrt{\pi_0^2 - m^2c^2}\,dx_3\right)\right],$$

$$s_3 = \overset{*}{u}_{01} u_{03} + \overset{*}{u}_{03} u_{01} = 2\,(|C_3|^2 - |C_3'|^2). \tag{28$_3$}$$

В области 3 для волны, бегущей вправо (влево), как видно из выражения для тока, π_3 в отличие от s_3 отрицательно (положительно). В соответствии с нашей программой мы должны в рассматриваемом решении выбрать $C_3' = 0$.

Если наши решения должны аппроксимировать одно и то же частное решение точного волнового уравнения, ток s_3 во всех трех областях должен иметь одно и то же значение, поскольку s_3 для этих решений должен быть постоянным:

$$|C_1|^2 - |C_1'|^2 = i\,[C_2 C_2'^{*} - C_2^{*} C_2'] = |C_3|^2 - |C_3'|^2. \tag{29}$$

Коэффициент прозрачности равен

$$D = \frac{|C_3|^2}{|C_1|^2}. \tag{30}$$

Если это число мало́, то $|C_1'|$ лишь мало отличается от $|C_1|$. Кроме того, C_2' — величина того же (по сравнению с $|C_1|^2$) порядка, что и D, C_2 — порядка 1, так как в окрестности $x_3 = b$ в области 2 оба слагаемых решений u_{01} и u_{03} должны быть величинами одного и того же порядка.

Чтобы получить соотношения перехода в критических точках, приближения геометрической оптики недостаточно, и для этого необходимо воспользоваться точными волновыми уравнениями. С другой стороны, к этим уравнениям следует обращаться лишь в окрестностях критических точек, но не в промежуточной области. Как оказалось, это обстоятельство характерно не только для релятивистской теории: в нерелятивистской теории происходит нечто совершенно аналогичное. Поэтому мы лишь кратко затронем здесь эти вопросы, отсылая за подробностями к упоминавшимся в начале исследованиям Крамерса. Имеются две возможности: либо заменить $\pi_0 + mc$ или $\pi_0 - mc$ в окрестности критических точек линейными выражениями и, исходя из поведения точного решения волнового уравнения для случая *однородного* поля в критической точке, сделать за-

ключения относительно *общей* формы соотношений перехода; либо выйти в окрестность критической точки в комплексной плоскости и исследовать поведение частных решений на комплексной плоскости. При этом относительно точного решения волнового уравнения предполагается лишь, что его в окрестности критической точки можно аналитически продолжить на комплексную плоскость. Это предположение выполняется, если потенциал и его производные в рассматриваемой окрестности непрерывны.

Если сначала рассмотреть первую критическую точку $x_3 = a$, то с помощью аналогичных рассуждений [5] можно показать, что

$$\text{при } C_1 = 0 \quad C_2' = C_1',$$
$$\text{при } C_2' = 0 \quad C_2 = C_1.$$

Кроме того, если в области 1 решение u_{01} — вещественное, а u_{03} — чисто мнимое, то, как следует из точного волнового уравнения, они будут такими же и во всех областях. Этим линейная зависимость между C_1, C_1' и C_2, C_2' определяется полностью. Имеем:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{2} C_1 + \frac{i}{2} C_1', \\ C_2' &= iC_1 + C_1'. \end{aligned} \tag{31a}$$

Таким образом, первое из равенств (29) доказано.

Аналогично проводится рассмотрение и во второй критической точке $x_3 = b$. Прежде всего введем следующие сокращенные обозначения: интеграл действия

$$W = \frac{1}{\hbar}\int_a^b |\pi_3|\, dx_3 = \frac{1}{\hbar}\int_a^b \sqrt{m^2c^2 - \pi_0^2}\, dx_3 =$$
$$= \frac{1}{\hbar}\int_a^b \sqrt{m^2c^2 - \left[\frac{E + e\Phi(x_3)}{c}\right]^2}\, dx_3, \tag{32}$$

взятый между двумя критическими точками, который в дальнейшем будет играть важную роль; затем

$$\bar{C}_2 = C_2 e^{-W}, \qquad \bar{C}_2' = C_2' e^{+W}. \tag{33}$$

Последние выражения подобраны так, что соотношения (28_2) останутся в силе, если нижний предел интегрирования a заменить на b и одновременно произвести замену C_2, C_2' на $\bar{C}_2$, $\bar{C}_2'$. В результате

$$\text{при } C_3' = 0 \quad \bar{C}_2 = C_3,$$
$$\text{при } \bar{C}_2 = 0 \quad \bar{C}_2' = C_3',$$

[5] См. *A. Zwaan*. Diss. Utrecht, 1929, Kap. III, § 3; *H. A. Kramers*, *G. P. Ittmann*. Z. Phys., 1929, 58, 217, в особенности с. 221 и 222.

откуда с учетом условия вещественности получаем:

$$\overline{C}_2 = C_3 + iC_3', \qquad \overline{C}_2' = \frac{i}{2} C_3 + \frac{1}{2} C_3'. \tag{31б}$$

Таким образом, второе из равенств (29) вытекает из (31б).

Положив $C_3' = 0$, найдем из (31а), (33), (31б):

$$\frac{1}{2} C_1 + \frac{i}{2} C_1' = e^W C_3, \qquad iC_1 + C_1' = e^{-W} \frac{i}{2} C_3, \tag{34}$$

откуда

$$C_3 = \frac{e^{-W}}{1 + \frac{1}{4} e^{-2W}} C_1, \qquad C_1' = -i \frac{1 - \frac{1}{4} e^{-2W}}{1 + \frac{1}{4} e^{-2W}} C_1. \tag{35}$$

Соотношение

$$|C_3|^2 = |C_1|^2 - |C_1'|^2$$

следует непосредственно из этих формул.

Что же касается точности, в пределах которой этот результат можно считать верным, то здесь необходимо иметь в виду, что между точками $x_3 = a$ и $x_3 = b$ должна лежать область, размеры которой сравнимы с $b - a$ и в которой градиент длины волны $2\pi\hbar/|\pi_3|$ мал, поскольку в противном случае нельзя было бы применять геометрическую оптику. Если это условие выполнено, то W оказывается очень большим числом, вследствие чего величиной e^{-W} можно пренебречь по сравнению с 1. Тогда вместо (35) мы получим просто

$$C_3 = e^{-W} C_1, \qquad C_1' = -iC_1, \tag{35а}$$

а коэффициент прозрачности, определяемый по формуле (30), будет равен

$$D = e^{-2W}. \tag{36}$$

Мы уже упоминали, что значение D не зависит от поляризации волн, отвечающих электронам.

В столь общем виде — при произвольном (непрерывном) потенциале $\Phi_0(x_3)$ между критическими точками — этот результат в литературе не приводился. При двух частных предположениях относительно поведения потенциала однородного поля

$$-e\Phi_0(x_3) = ax_3$$

и вида потенциала

$$-e\Phi_0(x_3) = \frac{P}{2} \frac{1 - e^{-ax_3}}{1 + e^{-ax_3}}$$

коэффициент D был вычислен Заутером [6]. Вычисление интеграла действия (32) для этих частных случаев подтверждает полное совпадение нашего общего выражения (36) с найденными Заутером значениями D. Следует заметить, что Заутер при вычислении точных решений в конце концов также вводит асимптотические приближения, в точности соответствующие нашим.

§ 5. Замечания по вопросу о принципиальном значении переходов в состояния с отрицательной кинетической энергией

Следует сделать несколько замечаний относительно принципиального значения парадокса Клейна, несмотря на то, что к предшествующему методическому исследованию, лежащему всецело в рамках существующей ныне теории, они имеют лишь косвенное отношение. Автор придерживается того мнения, что все предпринимавшиеся до сих пор попытки разрешить парадокс Клейна (или, если говорить в более общих терминах, — проблему переходов в состояния с отрицательной энергией, происходящих, согласно современной теории, под действием излучения, на чем мы не будем останавливаться здесь более подробно) нельзя считать удовлетворительными. Прежде всего, ясно, что одного лишь указания на то, что для всех практически реализуемых электрических полей коэффициент D, задаваемый формулой (36), чрезвычайно мал, недостаточно для преодоления имеющихся трудностей. Действительно, согласно существующей теории, электрон с отрицательной кинетической энергией, возникнув однажды, был бы столь же стабильным, как и обычный электрон; поскольку же природа располагает сколь угодно большими временами, то электроны с отрицательной массой, если считать, что существующая теория верна, должны были бы встречаться в огромном количестве, как бы ни была мала вероятность их возникновения.

До сих пор были предприняты две попытки изменить теорию так, чтобы переходы в состояния с отрицательной энергией были не только невероятны, но и невозможны. Однако обе эти попытки столкнулись со столь же большими трудностями иного рода. Например, предложенная Шредингером [7] идея приводит к противоречию с классической формулой Томсона для рассеяния света свободными электронами (справедливость этой формулы для больших по сравнению с $\hbar/mc$ длин световых волн надлежит требовать на основании не только эмпирических, но и теоретических соображений), не говоря уже о том, что при этом, как подчеркивал сам Шредингер, теряется релятивистская инвариантность теории. С другой стороны, в последнем варианте так называемого дираковского «дырочного мира» [8] — второй из названных попыток видоизменения теории — вместо электрона с отрицательной массой вводится «антиэлектрон» с зарядом $+e$ и массой, равной массе обычного электрона. Для этой теории существенно, что-

[6] *F. Sauter*. Z. Phys., 1931, 69, 742; **73**, 547.
[7] *E. Schrödinger*. Berl. Ber., 1931, 63.
[8] *P. A. M. Dirac*. Proc. Roy. Soc., 1930, **A126**, 360; 1931, **A133**, 60.

бы законы природы должны были бы быть в точности симметричными относительно электрона и антиэлектрона. Поэтому для объяснения причин, по которым антиэлектроны в действительности отсутствуют, приходится делать специальные предположения о начальном состоянии в природе: число электронов одного сорта уже тогда должно было во много раз превосходить число электронов другого сорта. Такой выход из положения представляется нам весьма искусственным и неудовлетворительным, даже если мы полностью отвлечемся от тех трудностей, с которыми эта теория сталкивается при рассмотрении процессов излучения.

Разумеется, проблема состояний с отрицательной энергией столь тесно связана с вопросом устойчивости электрона и взаимосвязи между электроном и протоном, что устранения этих трудностей можно ожидать лишь от теории, способной установить логическую связь между дискретностью электрического заряда и существованием кванта действия [9]. С другой стороны, по мнению автора, состояния с отрицательной энергией находятся в столь тесной связи со всем формализмом современной теории (с необходимостью оперировать с непрерывными волновыми функциями пространственных координат и времени, квадрат которых определяет вероятность нахождения частицы в данном месте), что парадокс Клейна можно считать своего рода предвестником тех существенных, глубоких и принципиальных изменений в формализме современной волновой механики, с которыми должна быть связана будущая теория электрона.

Поступила 14 мая 1932 г.

Цюрих,
Физический институт Высшей технической школы

[9] Необходимость такой связи особенно отчетливо подчеркивалась Бором [ср., например, его Фарадеевскую лекцию: J. Chem. Soc., Febr. 1932, p. 349. (Русск. пер.: *Н. Бор*. Избранные научные труды, т. 2. М., «Наука», 1971, с. 75. — *Ред*.)].

КВАНТОВЫЕ ТЕОРИИ МАГНЕТИЗМА. МАГНИТНЫЙ ЭЛЕКТРОН *

§ 1. Введение

Если магнитные свойства парамагнитных газов и разбавленных растворов солей редкоземельных элементов мы уже умеем интерпретировать количественно (о чем свидетельствуют доклады Зоммерфельда и Ван-Флека), то наши теоретические познания в области магнитных свойств твердых тел, которым будет посвящена первая часть этого доклада, носят пока лишь качественный характер.

Наиболее существенный результат новых теорий магнетизма твердого тела заключается в том, что эти теории, опираясь на открытие собственного момента электрона (момента вращения вокруг своей оси, или спина), позволяют дать единое объяснение двум магнитным явлениям, характерным для твердого тела. Речь идет, во-первых, о не зависящем от температуры парамагнетизме некоторых металлов (атомный парамагнетизм этого рода обычно слабее парамагнетизма газов или растворов) и, во-вторых, о ферромагнитных свойствах, которые еще до применения принципов квантовой теории получили ставшую ныне общепринятой ясную и удовлетворительную по своей формальной простоте теоретическую интерпретацию на основе известной гипотезы молекулярного поля Вейсса.

Результаты, излагаемые в § 5, позволяют на основе квантовой теории дать физическую интерпретацию молекулярного поля. Они были впервые получены Гейзенбергом [1,2].

Существовавшие ранее теории не позволяли ни предсказывать заранее, должно ли данное твердое тело быть ферро-, пара- или диамагнетиком, ни вычислять интенсивность его намагничения.

Для теоретического предсказания свойств твердых (кристаллических) тел до сих пор с успехом использовали два метода. В первом методе, применимом только к телам, обладающим хорошей электропроводностью (металлам), исходят из предположения о том, что валентные электроны могут двигаться свободно или, если встать на более общую точку зрения, что потенциальная энергия валентного электрона в кристаллической решетке задается определенной функцией пространственных координат, обладающей периодичностью и симметрией решетки. Взаимодействием между электронами либо полностью пренебрегают, либо вводят его на последнем этапе вычислений как малое возмущение. Наоборот, во втором методе, который можно рассматривать как обобщение предложенной

---

* *Les théories quantiques du magnétisme. L'électron magnétique.* 6éme Conseil de Physique Solvay. Le magnétisme, Bruxelles, 1930, p. 175—238.

[1] *W. Heisenberg.* Z. Phys., 1928, 49, 619.

[2] *W. Heisenberg.* Sommerfeld-Festschrift, S. 144.

Гайтлером и Лондоном[3] теории образования молекул, атомы решетки в первом приближении считают полностью изолированными друг от друга, принимают во внимание лишь взаимодействие между частицами (электронами и ядром) внутри каждого атома и лишь потом вводят взаимодействие между частицами, принадлежащими различным атомам, рассматривая его как малое возмущение. Существенная особенность второго метода заключается в том, что при вычислении малых возмущений во внимание принимают лишь такие состояния, в которых число валентных электронов в каждом атоме соответствует числу электронов в изолированном атоме, иначе говоря, не учитывают гетерополярные состояния, в которых из-за смещения электронов одни атомы имеют положительный, а другие — отрицательный заряд. Тем не менее последовательное развитие этих взглядов довольно неожиданно обнаружило несовместимость их с существованием у кристаллов конечной электропроводности.

До сих пор нет общего и практически применимого критерия, который позволил бы в каждом конкретном случае решать, какой из этих двух методов больше соответствует действительности. Однако если имеется высокая электропроводность, слабый парамагнетизм или диамагнетизм, не зависящий от температуры, то предпочтение обычно отдают первому методу. Мы следуем первому методу в § 2 и 3; приложениям второго метода посвящены § 4 и 5.

В первой главе мы в весьма общих чертах напоминаем квантовомеханическую интерпретацию собственного момента электрона. Компонента s_z этого момента количества движения в направлении оси z может принимать лишь значения $+1$ или -1, если за единицу измерения принять $(1/2)\,(h/2\pi)$. Если компоненту s_z наряду с пространственными координатами электрона ввести в качестве новой переменной в волновую функцию, которая при этом перейдет в $\psi\,(q,\ s_z)$, то последнюю можно записать в двух формах:

$$\psi_\alpha\,(q) \text{ и } \psi_\beta\,(q) \tag{1}$$

в зависимости от того, чему равна переменная s_z: $+1$ или -1.

Если пренебречь влиянием собственного момента на движение совокупности электронов (в рассматриваемом нами случае это почти всегда допустимо), то $\psi\,(q,\ s_z)$ можно разложить в произведение

$$\psi\,(q,\ s_z) = \psi\,(q)\,c\,(s_z), \tag{2}$$

или

$$\psi_\alpha\,(q) = \psi\,(q)\,c_\alpha, \qquad \psi_\beta\,(q) = \psi\,(q)\,c_\beta,$$

где c_α, c_β — константы.

Опыт показывает, что во внешнем магнитном поле H электрон приобретает энергию

$$\mu_0 H s_z = \pm\,\mu_0 H, \tag{3}$$

---

[3] *W. Heitler, F. London.* Z. Phys., 1927, 44, 455.

где

$$\mu_0 = \frac{eh}{4\pi m_0 c} \tag{4}$$

означает магнитный момент, равный атомному магнетону Бора, а e и m_0 — заряд и массу электрона.

Введенную таким образом единицу магнитного момента, отличающуюся от принятой у Вейсса, следует считать рациональной с теоретической точки зрения. Отсюда, однако, не следует, что все магнитные моменты атомов должны быть целыми кратными этой единицы.

Если рассматриваемая система содержит N электронов, то их совокупности отвечает волновая функция

$$\psi\,(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_N;\ s_{z_1},\ s_{z_2},\ \ldots,\ s_{z_N}). \tag{5}$$

Ее можно представить в 2^N видах в зависимости от значений ± 1, которые принимает каждая из N величин $s_{z_1}, s_{z_2}, \ldots, s_{z_N}$. Если пренебречь действием собственных моментов электронов на их движение и взаимодействием между самими моментами, то ψ можно разложить в произведение

$$\psi\,(q_1, \ldots, q_N;\ s_{z_1}, \ldots, s_{z_N}) = \psi\,(q_1, \ldots, q_N)\ c\,(s_{z_1}, s_{z_2}, \ldots, s_{z_N}). \tag{6}$$

Согласно принципу запрета, все решения волнового уравнения, даже если бы их можно было найти абсолютно точно, не могут реализоваться в природе, и в рассмотрение следует включать лишь антисимметричные решения, т. е. такие, которые изменяют свой знак при перестановке координат и собственных моментов любых двух электронов:

$$\psi\,(q_1, \ldots, q_n, \ldots, q_p, \ldots, q_N;\ s_{z_1}, \ldots, s_{z_n}, \ldots, s_{z_p}, \ldots, s_{z_N}) =$$
$$= -\psi\,(q_1, \ldots, q_p, \ldots, q_n, \ldots, q_N;\ s_{z_1}, \ldots, s_{z_p}, \ldots, s_{z_n}, \ldots, s_{z_N}). \tag{7}$$

Это условие понижает число возможных видов функций (5) с 2^N до $N + 1$.

Как будет показано далее, принцип запрета устанавливает связь между полным магнитным моментом и свойствами симметрии волновой функции координат. Из этой зависимости следует, что большие разности энергии между состояниями, отвечающими различным значениям полного магнитного момента системы, существуют даже в том случае, если воздействиями на собственные моменты электронов внутри системы пренебрегают.

Вторая глава доклада посвящена изучению возможности непосредственного наблюдения спинового момента свободных электронов, а также релятивистской теории электрона, принадлежащей, как известно, Дираку[4]. Эта теория позволяет, исходя из общих принципов, вывести заключения

---

[4] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc., 1928, **A117**, 610; **A118**, 351; Leipzig. Vorträge, 1928, S. 85.

о существовании и величине собственного момента электрона, но тем не менее наталкивается на серьезные трудности, связанные с существованием среди решений волнового уравнения таких, которые отвечают состояниям с отрицательной энергией.

I. ТЕОРИЯ МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 2. Статистика Ферми для свободных электронов

Если бы все свободные электроны, которые могут возникнуть в металле, были независимы, то существование спинового момента приводило бы к возникновению сильного парамагнетизма, подчиняющегося при $\mu_0 H \ll \ll kT$ закону Кюри (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура). Большинство металлов являются хорошими проводниками, но обладают диамагнитными свойствами или лишь слабым парамагнетизмом, не зависящим от температуры. Это противоречит только что сделанным предсказаниям.

К объяснению этого факта можно прийти [5], если учесть, что электроны подчиняются статистике Ферми, в основе которой лежит принцип запрета.

Для того чтобы эту статистику можно было применить к не взаимодействующим между собой электронам, напомним, что число мод стационарных колебаний для волн материи внутри объема V для длин волн, заключенных между λ и $\lambda + d\lambda$, равно

$$V 4\pi \frac{1}{\lambda^2} d\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Кроме того, согласно де Бройлю, длина волны связана с импульсом p соотношением

$$p = \frac{h}{\lambda}. \tag{8}$$

Поскольку существует спин электрона, то каждой стационарной моде отвечают два возможных состояния электрона. Отсюда следует, что число dZ возможных состояний электрона в рассматриваемом нами объеме при условии, что импульс заключен между p и $p + dp$, равно

$$dZ = 2\frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp = 2V \frac{2\pi (2m_0)^{3/2}}{h^3} \sqrt{E}\, dE. \tag{9}$$

Последнее выражение получится, если учесть соотношение

$$p = \sqrt{2m_0 E}$$

между импульсом p и энергией E.

Учтем теперь принцип запрета, согласно которому в каждом состоянии, характеризуемом направлением спина и энергией поступательного движения, может находиться самое большее один электрон. Отсюда сле-

[5] *W. Pauli*. Z. Phys., 1926, 41, 81.

дует, что при достаточно низких температурах (ниже мы укажем их более точно) электроны могут находиться во всех энергетических состояниях, заключенных между 0 и некоторым максимумом η. Величина η как функция числа N электронов определяется условием

$$N = \int_0^\eta dZ = 2V \frac{2\pi (2m_0)^{3/2}}{h^3} \int_0^\eta \sqrt{E}\, dE = 2V \frac{2\pi (2m_0)^{3/2}}{h^3} \frac{2}{3} \eta^{3/2}, \tag{10}$$

в то время как полная энергия E системы выражается формулой

$$E = \int_0^\eta E dZ = 2V \frac{2m (2m_0)^{3/2}}{h^3} \int_0^\eta E^{3/2} dE = 2V \frac{2\pi (2m_0)^{3/2}}{h^3} \frac{2}{5} \eta^{5/2}. \tag{11}$$

Если обозначить через

$$n = \frac{N}{V}$$

число электронов в единице объема, а через

$$\varepsilon = \frac{E}{V}$$

— среднюю энергию, приходящуюся на один электрон, то из (10) и (11) получим

$$\varepsilon = \frac{3}{5} \eta = \frac{3}{40} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{3/2} \frac{h^2}{m_0} \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}. \tag{12}$$

Теперь мы можем уточнить условие, при котором реализуется упоминавшееся нами распределение электронов (в силу принципа запрета оно отвечает минимуму полной энергии E): для этого достаточно потребовать, чтобы

$$kT \ll \eta. \tag{13}$$

Лишь когда величина kT становится сравнимой с η, энергия электронов начинает изменяться с температурой. Если принять во внимание концентрацию n свободных электронов, то окажется, что для металлов «температура вырождения» η/k составляет около 10 000°, вследствие чего условие (13) для них практически всегда выполнено. Мы не будем поэтому приводить здесь общих формул, описывающих переход электронного газа из вырожденного состояния в невырожденное, а займемся изучением влияния, которое оказывает на вырожденный газ внешнее магнитное поле H.

В силу принципа запрета магнитные моменты двух электронов, отвечающие одному и тому же стационарному волновому состоянию, не могут одновременно иметь направление внешнего поля. Спины двух электронов могут быть параллельными лишь в том случае, если электроны обладают различной кинетической энергией, так что намагничение с необходимостью связано с возрастанием кинетической энергии системы. Итак, мы видим,

что существование принципа запрета делает намагничение системы более затруднительным: намагничение может происходить лишь до тех пор, пока вызванное им убывание потенциальной магнитной энергии не компенсируется соответствующим возрастанием кинетической энергии электронов. Распределение электронов, отвечающее минимуму полной энергии при наличии внешнего магнитного поля, получим следующим образом. Пусть η_1 — максимальная кинетическая энергия для электронов с магнитным моментом, параллельным полю, а η_2 — соответствующая величина для электронов с противоположно направленным магнитным моментом. Справедливо неравенство $\eta_1 > \eta_2$, поскольку условие компенсации энергии при изменении направления спина одного электрона на противоположное имеет вид

$$\eta_1 - \mu_0 H = \eta_2 + \mu_0 H = \eta, \tag{14}$$

т. е. средняя полная энергия η одинакова для состояний, находящихся на границе областей фазового пространства, занимаемых соответственно электронами с магнитным моментом, параллельным и антипараллельным полю. Рассуждая так же, как при выводе соотношения (10), находим

$$N = \int_0^{\eta_1} (dZ)_- + \int_0^{\eta_2} (dZ)_+ = V \frac{2\pi (2m_0)^{3/2}}{h^3} \frac{2}{3} (\eta_1^{3/2} + \eta_2^{3/2}),$$

или

$$N = V \frac{2\pi (2m_0)^{3/2}}{h^3} \frac{2}{3} [(\eta + \mu_0 H)^{3/2} + (\eta - \mu_0 H)^{3/2}]. \tag{15}$$

При $H = 0$ это выражение совпадает с (10). Полный магнитный момент $\mathfrak{M}$ равен

$$\mathfrak{M} = \mu_0 \left[\int_0^{\eta_1} (dZ)_- - \int_0^{\eta_2} (dZ_+)\right] = \mu_0 V \frac{2\pi (2m_0)^{3/2}}{h^3} \frac{2}{3} [(\eta + \mu_0 H)^{3/2} - (\eta - \mu_0 H)^{3/2}]. \tag{16}$$

Связь между намагниченностью и магнитным полем определяется соотношениями (15) и (16). Ее можно выразить в явном виде, если исключить η из этих двух формул.

Результат существенно упрощается, если предположить, что

$$\mu_0 H \ll \eta. \tag{17}$$

Это неравенство всегда выполняется для практически достижимых напряженностей поля. В этом случае в разложении (16) в ряд достаточно сохранить лишь члены первого порядка по H:

$$\mathfrak{M} = \mu_0 V \frac{2\pi (2m_0)^{3/2}}{h^3} 2\mu_0 H \eta^{1/2}. \tag{18}$$

То же приближение позволяет выбрать η в виде функции от N, определяемой уравнением (10). С учетом (10) и (12) находим окончательно для

магнитной восприимчивости

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{M}}{NV} = \mu_0^2 \frac{4\pi (2m_0)^{3/2}}{h^3} \eta^{1/2} = 12 \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} \frac{n^{1/3} m_0}{h^2} \mu_0^2 = \frac{9}{10} \frac{n\mu_0^2}{\varepsilon} . \qquad (19)$$

Итак, если условие (13) выполнено, возникает парамагнетизм, не зависящий от температуры.

Прежде чем сравнивать этот результат с экспериментом, следует заметить, что на обнаруженный нами эффект накладывается диамагнетизм, обусловленный электронами, связанными с атомами. Этот диамагнетизм имеет тот же порядок величины, что и парамагнетизм, определяемый соотношением (19). Впрочем, получить точную оценку величины этого диамагнетизма трудно.

Кроме того, свободные электроны также создают ненулевой диамагнитный эффект, который необходимо учитывать. До сих пор его существование во внимание не принималось. Мы посвящаем ему следующий параграф.

§ 3. Диамагнетизм свободных электронов

Сначала будем пренебрегать спином электронов и рассматривать их траектории во внешнем магнитном поле, параллельном оси z, на основе классической механики. На движение в направлении оси z поле не влияет; проекциями траекторий на плоскость xy, как известно, являются окружности. Угловую скорость ω, с которой электроны описывают эти окружности, находим из уравнения

$$m_0 \omega^2 a = \frac{e}{c} \omega a H.$$

Исключая отсюда радиус a, получаем

$$\omega = \frac{eH}{m_0 c} \qquad (20)$$

(совершенно независимо от начальных условий). Эта угловая скорость вдвое больше угловой скорости ларморовой прецессии. Кинетическая энергия электрона равна

$$E = \frac{1}{2} m_0 \omega^2 a^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2 H^2}{m_0 c^2} a^2. \qquad (21)$$

Для отрицательно заряженных частиц вращение происходит против часовой стрелки, если магнитное поле направлено к наблюдателю. Уравнения движения можно записать в канонической форме, если ввести функцию Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_0} \left[\left(p_x - \frac{eH}{2c} y\right)^2 + \left(p_y + \frac{eH}{2c} x\right)^2 \right] . \qquad (22)$$

В результате находим:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_x} = \frac{1}{m_0}\left(p_x - \frac{eH}{2c}\,y\right), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_y} = \frac{1}{m_0}\left(p_y + \frac{eH}{2c}\,x\right), \\ \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x} = -\frac{eH}{2m_0c}\left(p_y + \frac{eH}{2c}\,x\right) = -\frac{eH}{2c}\frac{dy}{dt}, \\ \frac{dp_y}{dt} &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial y} = +\frac{eH}{2m_0c}\left(p_x - \frac{eH}{2c}\,y\right) = +\frac{eH}{2c}\frac{dx}{dt} \end{aligned} \qquad (23)$$

и, следовательно,

$$m_0\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp_x}{dt} - \frac{eH}{2c}\frac{dy}{dt} = -\frac{eH}{c}\frac{dy}{dt},$$

$$m_0\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dp_y}{dt} + \frac{eH}{2c}\frac{dx}{dt} = \frac{eH}{c}\frac{dx}{dt},$$

что отвечает действию силы Лоренца на частицу с зарядом $-e$.

Как показали Бор [6] и Г. А. Лоренц [7], выражение (22) для функции Гамильтона приводит к важным следствиям, если к свободным электронам, находящимся во внешнем магнитном поле внутри замкнутой полости, применить идеи статистической механики. Вероятность того, что точка, изображающая положение и скорость электрона, находится в определенном элементе объема фазового пространства, если последнее ограничить проекцией движения на плоскость xy (только эта проекция и представляет интерес), равна

$$w = C \exp\left[-\frac{\mathscr{H}(p_x, p_y; x, y)}{kT}\right] dp_x dp_y dx dy.$$

Если в качестве переменных наряду с x и y вместо p_x и p_y ввести dx/dt и dy/dt [определитель этой подстановки в силу (23) равен $1/m_0^2$], то плотность распределения в фазовом пространстве станет пропорциональной величине

$$w = C \exp\left\{-\frac{m_0}{2kT}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\right\},$$

что отвечает обычному распределению Максвелла.

Отсюда следует, что даже в этом случае, когда имеется внешнее магнитное поле, распределение скоростей остается изотропным в каждой точке, а средний магнитный момент строго равен нулю. Такое заключение на первый взгляд кажется парадоксальным, поскольку все электроны описывают круговые траектории и обладают магнитным моментом одного

[6] *N. Bohr.* Metallernes Elektronteorie. Kopenhagen, 1911.

[7] *H. A. Lorentz.* Göttinger Vorträge über die kinetische Theorie der Materie. Leipzig, 1914, S. 188.

знака. Однако если учесть, как это сделали Бор и Лоренц, траектории, составленные из дуг окружностей, получающихся при отражении от граничных поверхностей, то окажется, что магнитный момент таких траекторий в точности компенсирует магнитный момент, создаваемый свободными круговыми траекториями. Из классической статистической механики следует, что силы, действующие на электроны, не могут изменить этот результат. Высказанное Шредингером [8] противоположное мнение необоснованно.

В квантовой теории ситуация существенно изменяется. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим прежде всего квантование траекторий в отсутствие граничных поверхностей. В полярных координатах r, φ с произвольно выбранным началом функция Гамильтона (22) принимает вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_0}\left[p_r^2 + \frac{p^2}{r^2}\right] + \frac{m_0}{2}\left(\frac{eH}{2m_0c}\right)^2 r^2 + \frac{eH}{2m_0c}P, \qquad (24)$$

если ввести момент импульса P относительно начала координат

$$P = xp_y - yp_x$$

и принять во внимание, что

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad p_x^2 + p_y^2 = p_r^2 + \frac{p^2}{r^2}.$$

Выражение (24), если отбросить последний член — постоянную, соответствует функции Гамильтона плоского гармонического осциллятора с частотой

$$\frac{1}{2\pi}\frac{eH}{2m_0c} = \sigma.$$

Как известно, собственные значения энергии такого осциллятора равны

$$E = (2n + |m| + 1)h\sigma,$$

где n — радиальное, а m — азимутальное квантовые числа. Кроме того,

$$P = m\frac{h}{2\pi}.$$

В указанное только что выражение для E введена энергия при абсолютном нуле, равная $1/2\ h\sigma$ на степень свободы. Если теперь мы добавим к этому выражению последний член из формулы (24) и заметим, что магнетон μ_0, определяемый соотношением (4), можно представить в виде

$$h\sigma = \mu_0 H,$$

то для множества собственных значений энергии электрона в магнитном поле получим

$$E = (m + |m| + 2n + 1)\mu_0 H. \qquad (25)$$

[8] *E. Schrödinger.* Wien. Ber., 1912, 121, 1305.

Чтобы выяснить геометрический смысл m, вычислим среднее по круговой траектории из следующего выражения:

$$m_0\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=(xp_y-yp_x)+\frac{eH}{2c}(x^2+y^2).$$

Нетрудно видеть, что левая часть дает $ma^2\omega$, первое слагаемое в правой части — $P=m\frac{h}{2\pi}$, второе — $\frac{eH}{2c}(a^2+d^2)$, где d — расстояние от начала координат до центра круговой траектории. Подставляя для ω выражение (20), находим

$$\frac{eH}{c}a^2=m\frac{h}{2\pi}+\frac{eH}{2c}(a^2+d^2),$$

или

$$m=\frac{\pi eH}{hc}(a^2-d^2). \tag{26}$$

Рассмотрим теперь влияние граничной поверхности. Пусть имеется цилиндрическая полость радиуса R, ось которой совпадает с осью z. Откажемся сначала от статистики Ферми и будем считать, что электроны независимы. Совокупность собственных значений энергии внутри полости в общем случае имеет весьма сложную структуру; магнитная восприимчивость на электрон зависит от формы и размеров полости. Однако, как показал Ландау [9], имеется один случай, когда условия упрощаются и форма и размеры полости становятся несущественными. Предположим, что *радиус круговой траектории, отвечающей энергии* kT, *очень мал по сравнению с радиусом* R цилиндрической полости. Согласно (21) эта гипотеза выражается неравенством

$$kT\ll\frac{1}{2}\frac{e^2H^2}{m_0c^2}R^2. \tag{27}$$

Этому условию всегда можно удовлетворить, если рассматривать магнитное поле в полости достаточно больших размеров. Нам необходимо, чтобы в сумму, отвечающую различным возможным состояниям, входили лишь те траектории, радиус a которых весьма мал по сравнению с R. Из соотношения (26) при $d\ll R$ видно, что для таких траекторий m ограничено снизу пределом

$$m\geqslant-\frac{\pi eH}{hc}R^2.$$

Число траекторий, пересекающих граничную поверхность (вследствие чего соответствующие собственные значения существенно изменяются), пропорционально R, в то время как число остальных траекторий пропорционально R^2. Отсюда следует, что первые траектории вносят в сумму лишь незначительный вклад, которым можно пренебречь. Мы используем здесь понятие траектории; но можно показать, что результаты не изме-

---

[9] *Л. Д. Ландау*. Частное сообщение.

нятся и в том случае, если аналогичные условия рассматривать в рамках волновой механики.

Итак, для суммы вероятностей, соответствующих различным состояниям, получаем выражение

$$S = \left[\sum_{m=-\frac{\pi e H}{hc} R^2}^{-1} 1 + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2m\mu_0 H}{kT}} \right] \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)\frac{\mu_0 H}{kT}}.$$

Второй член в скобках в силу (27) мал по сравнению с первым, и его можно отбросить. Если обозначить через $F = \pi R^2$ площадь поперечного сечения полости и заметить, что

$$\frac{eH}{hc} = \frac{4\pi m_0}{h^2} \mu_0 H,$$

то, как нетрудно видеть,

$$S = F \frac{4\pi m_0}{h^2} \mu_0 H \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)\frac{\mu_0 H}{kT}}. \tag{28}$$

Известно, что свободная энергия Ψ как функция от S задается выражением

$$\Psi = -kT \ln S$$

и что магнитный момент на электрон связан с Ψ соотношением

$$\mathfrak{M} = -\frac{\partial \Psi}{\partial H},$$

откуда

$$\mathfrak{M} = kT \frac{\partial \ln S}{\partial H}. \tag{29}$$

Устремив h к нулю, т. е. перейдя к пределу при $\mu_0 \to 0$, мы должны вновь получить результат, следующий из классической теории. Заменив сумму в (28) интегралом, найдем

$$S = F \frac{2\pi m_0}{h^2} kT.$$

Этот результат не зависит от H. Отсюда следует, что, как и должно быть, $\mathfrak{M} = 0$.

Итак, для того чтобы квантовая теория приводила к иному результату, даже в случае полости с бесконечным объемом, интервал между собственными значениями энергии должен оставаться конечным. Вычислив сумму в (28), получим

$$S = F \frac{4\pi m_0}{h^2} \mu_0 H \left\{ e^{\frac{\mu_0 H}{kT}} - e^{-\frac{\mu_0 H}{kT}} \right\}^{-1}.$$

Подставив это выражение в (29), находим

$$\mathfrak{M} = -\mu_0 \left[\operatorname{cth} \frac{\mu_0 H}{kT} - \frac{kT}{\mu_0 H} \right]. \tag{30}$$

В эту формулу снова входит известная функция Ланжевена, но с обратным знаком (диамагнетизм). В частности, при $\mu_0 H \ll kT$

$$\mathfrak{M} = -\frac{\mu_0^2}{3kT} H. \tag{31}$$

Парамагнитное действие спина в случае независимых электронов приводит к появлению у каждого из них магнитного момента

$$\mathfrak{M} = +\frac{\mu_0^2}{kT} H.$$

Диамагнетизм, обусловленный движением электронов по траекториям, понижает этот эффект до 2/3 от его первоначальной величины.

Обратимся теперь к статистике Ферми. Мы по-прежнему будем придерживаться гипотезы (13) о том, что $kT \ll \eta$, а условие (27) усилим, выбрав его в форме

$$\eta \ll \frac{1}{2} \frac{e^2 H^2}{m_0 c^2} R^2; \tag{32}$$

последнее условие означает, что радиус траектории даже для электрона с максимальной энергией мал по сравнению с радиусом R полости. Численно это означает, что $HR \gg 10$, если напряженность поля H измерена в гауссах, а R — в сантиметрах. Иными словами, соотношение (32) выполняется при обычных условиях измерения магнитной восприимчивости. Кроме того, предположим, что

$$\mu_0 H \ll kT. \tag{33}$$

В § 2 в этом условии необходимости не возникало. Не останавливаясь на подробностях вычислений [10], приведем величину вклада диамагнетизма свободных электронов в магнитную восприимчивость лишь для нашего случая:

$$\varkappa = -\mu_0^2 \frac{2\pi (2m_0)^{3/2}}{h^3} \frac{1}{3} \sqrt{\eta} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10} \frac{n\mu_0^2}{\varepsilon}. \tag{34}$$

---

[10] Вычисляются величины:

$$\Omega = -V \frac{2\pi (2m_0)^{3/2}}{h^3} \mu_0 H (kT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} \sum_{n=0}^\infty \ln \left[1 + \exp\left\{\frac{\eta - (2n+1)\mu_0 H}{kT} - u\right\}\right],$$

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = V \frac{2\pi (2m_0)^{3/2}}{h^3} \mu_0 H (kT)^{1/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\exp\left[\frac{-\eta + (2n+1)\mu_0 H}{kT} - u\right] + 1},$$

$$\mathfrak{M} = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial H}\right)_{\eta, T}.$$

В рассматриваемом приближении необходимо учитывать и парамагнитную восприимчивость (19), связанную с наличием электронного спина. В этом случае *диамагнитный эффект также снижает эффект, обусловленный электронным спином до двух третей.* Окончательное значение магнитной восприимчивости равно

$$\varkappa = \frac{3}{5}\,\frac{n\mu_0^2}{\varepsilon}, \tag{35}$$

где ε находится по формуле (12). Подставляя численные значения, имеем

$$\varkappa = n^{1/3}\cdot 1{,}473\cdot 10^{-14}.$$

Сравним экспериментальные и вычисленные значения $\varkappa$ для щелочных металлов:

	Na	K	Rb	Cs
$\varkappa_{\text{выч}}, 10^{-7}$	4,38	3,5	3,25	3,03
$\alpha_{\text{эксп}}, 10^{-7}$	5,8	5,1	0,6	−0,5

По порядку величины эти значения в основном согласуются. Как уже упоминалось, при вычислении магнитной восприимчивости надо было бы учитывать еще и диамагнетизм связанных электронов. Поэтому следует ожидать, что экспериментальные значения окажутся меньше вычисленных. Именно так и обстоит дело с Rb и Cs. В случае же Na и K экспериментальные значения больше теоретических. По-видимому, в этих двух металлах электроны ведут себя не так, как должны были бы себя вести полностью свободные электроны.

Влияние кристаллической решетки на диамагнетизм электронов еще не было учтено в теории. Было бы чрезвычайно желательно дать теоретическое рассмотрение перехода от парамагнитного состояния твердых металлов к парамагнитному состоянию их паров по мере роста температуры. Для построения такой теории весьма существенную роль имела бы возможность учета взаимодействий между электронами.

§ 4. Взаимодействие атомов как задача теории возмущений

Решение этой задачи, о котором сейчас пойдет речь, можно рассматривать как комбинацию методов Дирака [11] и Слетера [12]. Последний метод позволил отказаться от использования теории групп.

Пусть $u_{a_k}(q)$ — невозмущенная собственная функция для одного атома с номером a_k. Предполагается, что нет никакого вырождения по ориентации, т. е. что состояние атома отвечает единственному терму S. В этом случае можно считать, что функция $u_{a_k}(q)$ вещественна.

---

[11] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc., 1929, **A123**, 714.
[12] *J. C. Slater.* Phys. Rev., 1929. **34**, 1293.

Исключим также всякое вырождение за счет резонанса, т. е. предположим, что каждый атом находится в основном состоянии. Для простоты будем считать, что на атом приходится лишь один электрон. Используемый приближенный метод исходит из предположения о том, что собственная функция $u_{a_k}(q)$ с расстоянием убывает достаточно быстро и значение ее в том месте, где находится атом с номером, отличным от a_k, очень мало́, т. е. что при всех k и l, не совпадающих между собой, и всех значениях координат q, измеряемых от общего начала, справедливо неравенство

$$|u_{a_k}(q)\, u_{a_l}(q)| \ll |u_{a_k}(q)|^2 \text{ при } k \neq l. \tag{36}$$

Точно так же произведение трех собственных функций различных атомов представляет собой малую величину еще более высокого порядка и т. д. Собственные функции, соответствующие двум различным атомам, не являются точно ортогональными и отличаются друг от друга [в силу неравенства (36)] на величину первого порядка, которой в первом приближении можно пренебречь.

Относительно функции Гамильтона $\mathscr{H}(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ для системы будем предполагать лишь одно: она должна быть симметричной по координатам всех частиц. В соответствии с замечаниями, сделанными во введении по поводу второго из упоминавшихся там методов, будем рассматривать в качестве невозмущенных состояний системы такие, которые получаются из состояния, соответствующего собственной функции

$$u_{a_1}(q_1)\, u_{a_2}(q_2) \ldots u_{a_N}(q) \equiv (a_1, \ldots, a_N | q_1, \ldots, q_N) \equiv (a | q)$$

в результате некоторой перестановки электронов P. Этим состояниям отвечают собственные функции

$$[a_1, \ldots, a_N | P(q_1, \ldots, q_N)] = (a | Pq),$$

число которых N равно числу перестановок, обменивающих N электронов между атомами $a_1, \ldots, a_N$. Матричные элементы функции Гамильтона, связывающие рассматриваемые состояния с другими, в частности с гетерополярными состояниями, по предположению, пренебрежимо малы. Следовательно, в нашем случае состояния, соответствующие различным атомам $a_1, a_2, \ldots, a_N$, не совпадают между собой, поскольку эти атомы занимают в пространстве различные положения, и любую перестановку координат q можно заменить некоторой перестановкой номеров атомов a.

Рассматриваемым здесь N' невозмущенным состояниям отвечают $(N')^2$ матричных элементов функции Гамильтона. Вследствие предположений о симметрии функции Гамильтона их число можно понизить до N' независимых элементов. Действительно, для всякой перестановки P

$$\int (a | Pq)\, \mathscr{H}\, (a | P'Pq) d\nu_q = \int (a | q)\, \mathscr{H}\, (a | Pq) d\nu_q = \mathscr{H}_P. \tag{37}$$

Здесь, как обычно, оператор Гамильтона $\mathscr{H}$ действует на собственную функцию, стоящую справа от него. Обозначим через $\mathscr{H}_P$ получающийся

при этом матричный элемент. В силу эрмитовости $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}_{P^{-1}} = \mathcal{H}_P. \tag{38}$$

Если бы мы рассматривали комплексные собственные функции $u_{a_k}(q)$, то матричный элемент $\mathcal{H}_{P^{-1}}$ был бы комплексно-сопряженным с $\mathcal{H}_P$.

Чтобы найти собственные значения энергии E системы, запишем линейную комбинацию N' рассматриваемых собственных функций в виде

$$\nu(q_1, \ldots, q_N) = \sum_{P'} x_{P'} (a \mid P'q) = \sum_{P'} x_{PP'} (a \mid PP'q),$$

где $x_{P'}$ представляют собой N' неопределенных коэффициентов, и попытаемся с ее помощью решить уравнение Гамильтона

$$(\mathcal{H} - E)\,\nu(q) = 0,$$

или

$$\sum_{P'} [x_{PP'} \mathcal{H} (a \mid PP'q) - E x_{P'} (a \mid P'q)] = 0.$$

Умножая это уравнение на $(a \mid P'q)$ и интегрируя, с учетом (37) находим

$$\sum_{P'} \mathcal{H}_{P'} x_{PP'} - E x_P = 0. \tag{39}$$

Второй член в левой части получается, если считать, что собственные функции $(a \mid Pq)$ ортогональны. Можно показать, что ошибка, вносимая при этом в собственные значения E, имеет высокий порядок малости. Итак, мы приходим к линейной однородной системе N' уравнений с N' неизвестными x_P. Собственные значения E найдем, приравняв нулю определитель этой системы.

Для того чтобы можно было воспользоваться принципом запрета, рассмотрим сначала лишь ту часть собственной функции, которая связана со спином электрона. По-прежнему будем пренебрегать тем, что на электрон, вследствие наличия у него спина, внутри кристалла действуют различные факторы, но не будем исключать возможного действия внешнего магнитного поля. Обозначим через m квантовое число, имеющее в единицах $h/2\pi$ смысл компоненты результирующего спинового момента в направлении магнитного поля. Тогда

$$m \leqslant \frac{N}{2},$$

и, если

$$\frac{N}{2} = n,$$

то сумма $n + m$ означает число электронов, ориентированных параллельно полю, а $n - m$ — число электронов, обладающих противоположной ориентацией. Для дальнейшего существенно, что эти числа определены, коль скоро N и m заданы. Соответствующие собственные функции спина

имеют вид

$$P(\xi)\, c_a(\xi_1)\, c_a(\xi_2) \ldots c_a(\xi_r)\, c_b(\xi_{r+1}) \ldots c_b(\xi_N) = A\,[P(\xi) \mid 1, 2, \ldots, r] \quad (40).$$

Переменная ξ означает здесь компоненту спинового момента в некотором направлении (с двумя возможными значениями $+1$ и -1); a — состояние, в котором спин и поле антипараллельны, b — состояние, в котором они параллельны, а r — число, определяемое соотношением

$$r = n - m. \quad (41)$$

На переменные ξ действует оператор перестановки P. Числа $1, 2, \ldots, r$ в правой части формулы (40) относятся к электронам в состоянии a; порядок их следования роли не играет. Число линейно-независимых функций вида (40) равно

$$Z(m) = C_N^r = C_{2n}^{n-m} = C_{2n}^{n+m}, \quad (42)$$

т. е. числу способов, которыми можно выбрать r электронов из N, если не учитывать порядок. Если перестановка P переводит числа $1, 2, \ldots, r$ в $f_1, f_2, \ldots, f_r$, то

$$A\,[P(\xi) \mid 1, 2, \ldots, r] = A\,(f_1, f_2, \ldots, f_r)$$

Правая часть соотношения (40) определена, коль скоро (с точностью до порядка) заданы $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Следовательно, две собственные спиновые функции $A\,[P_1(\xi) \mid 1, \ldots, r]$ и $A\,[P_2(\xi) \mid 1, \ldots, r]$ тождественны для двух перестановок P_1 и P_2, таких, что $P_1 = P_2 S$, где S — перестановка индексов $1, 2, \ldots, r$ в состоянии a и индексов $r+1, \ldots, N$ — в состоянии b. О двух перестановках такого рода мы будем говорить, что они принадлежат одному и тому же ряду. Перестановки PP_1 и PP_2 принадлежат одному и тому же ряду тогда и только тогда, когда ему принадлежат перестановки P_1 и P_2. Перестановки S принадлежат тому же ряду, что и тождественная перестановка. Каждый ряд однозначно определяется набором чисел $f_1, f_2, \ldots, f_r$ и не зависит от того, в каком порядке они следуют.

Запишем теперь возмущенные собственные функции со спином в виде

$$\nu\,(q_1, \ldots, q_N; \xi_1, \ldots, \xi_N) = \sum_{P'} \sum_{Q'} x_{P'Q'}\,(a \mid P'q)\, A\,[Q'(\xi) \mid 1, \ldots, r]. \quad (43)$$

Такое представление возможно, поскольку функция Гамильтона не содержит спиновых переменных ξ. Каждый коэффициент x будет однозначно определяться соответствующей собственной функцией, если потребовать, чтобы каждому ряду перестановок Q, задаваемому набором индексов $f_1, f_2, \ldots, f_r$, отвечал лишь один из коэффициентов x, причем

$$x_{P,Q} = x_{P,QS}.$$

Если это условие выполнено, то, действуя так же, как при выводе уравнений (39), получаем систему уравнений

$$\sum_{P'} \mathcal{H}_{P'} x_{PP',Q} - E x_{P,Q} = 0. \tag{44}$$

Отсюда следует, что функция (43) удовлетворяет волновому уравнению.

Теперь можно воспользоваться принципом запрета, который требует, чтобы функция (43) была антисимметричной при одновременной перестановке переменных q и переменных ξ. Более общая формулировка его утверждает, что функция ν при любой перестановке R, действующей одновременно на переменные q и ξ, должна изменять свой знак или сохранять его в зависимости от того, четна или нечетна перестановка R. Обозначим через ε_R множитель, на который умножается ν под действием перестановки R:

$$\varepsilon_R = +1, \text{ если } R \text{ — четна, и } \varepsilon_R = -1, \text{ если } R \text{ — нечетна;}$$

кроме того,

$$\varepsilon_{R^{-1}} = \varepsilon_R, \qquad \varepsilon_{PQ} = \varepsilon_P \cdot \varepsilon_Q.$$

Отсюда следует, что

$$x_{RP,RQ} = \varepsilon_R x_{PQ} \tag{45}$$

и, в частности,

$$x_{P,Q} = \varepsilon_P x_{IP^{-1}Q},$$

где I означает тождественную перестановку. Таким образом, для всех рядов Q систему уравнений (44) можно представить в виде

$$\sum_{P'} \varepsilon_{P'} \mathcal{H}_{P'} x_{I,P'^{-1}P^{-1}Q} - E x_{I,P^{-1}Q} = 0.$$

Поскольку $P^{-1}Q$ пробегает все ряды перестановок одновременно с Q, перестановку P можно опустить; кроме того, согласно (38) $\mathcal{H}_{P'^{-1}} = \mathcal{H}_{P'}$. В результате уравнения (44) можно привести к виду

$$\sum_{P'} \varepsilon_{P'} \mathcal{H}_{P'} x_{I,P'Q} - E x_{I,Q} = 0.$$

Наконец, если каждый ряд перестановок обозначить вместо Q с помощью определяющего его набора индексов $f_1, f_2, \ldots, f_r$, а вместо $P'Q$ ввести индексы $(P'f_1, \ldots, f_r) = f_1', \ldots, f_r'$, то получится система уравнений

$$\sum_{P'} \varepsilon_{P'} \mathcal{H}_{P'} x(f_1', \ldots, f_r') - E x(f_1, \ldots, f_r) = 0, \tag{46}$$

число которых равно числу наборов $f_1, \ldots, f_r$. Эти индексы можно рассматривать как индексы атомов, у которых электронный спин направ-

лен против поля; $f_1', \ldots, f_r'$ — как индексы, в которые переходят $f_1, \ldots$ $\ldots, f_r$ под действием перестановки P'.

Таким образом, принцип запрета приводит к существенному упрощению задачи, понижая число переменных x с N' до $Z_m = C_{m+n}^{2n}$. Из принципа запрета следует также, что даже в том случае, когда в самой системе не существует факторов, влияющих на спин ($\mathcal{H}$ не зависит от ξ), интервалы между собственными значениями энергии, отвечающими различным значениям результирующего спинового момента, весьма велики.

Введем в функцию Гамильтона кулоновские силы:

$$\mathcal{H} = \sum_k E_{\text{кин}}^{(k)} + \sum_{j<k} \left(\frac{e^2}{r_{ik}} + \frac{e^2}{r_{a_i, a_k}} \right) - \sum \frac{e^2}{r_{a_i, k}}. \tag{47}$$

Первый член с e^r соответствует взаимодействию электронов между собой, второй — взаимодействию положительных ионов между собой и третий — взаимодействию положительных ионов с электронами. Кинетической энергии $E_{\text{кин}}^{(k)}$ k-го электрона в уравнении Шредингера отвечает действие оператора $-\frac{h^2}{8\pi^2 m_0}\Delta_k$. Невозмущенная собственная функция удовлетворяет уравнению

$$\left[E_{\text{кин}}^{(\kappa)} - \frac{e^2}{r_{a_i, k}} \right] u_{a_i}(q_k) = E_{a_i}^0 u_{a_i}(q_k). \tag{48}$$

Рассмотрим матричные элементы $\mathcal{H}_{P_{ik}} = \mathcal{H}_{ik}$, играющие особо важную роль. Они соответствуют перестановке P_{ik} двух частиц i и k. Используя соотношение (37), находим

$$\mathcal{H}_{ik} = \int u_{a_i}(q_i)\, u_{a_k}(q_k) \left[E_{\text{кин}}^{(i)} + E_{\text{кин}}^{(k)} + \frac{e^2}{r_{i,k}} + \frac{e^2}{r_{a_i, a_k}} - \right.$$
$$\left. - \frac{e^2}{r_{a_i, i}} - \frac{e^2}{r_{a_k, k}} - \frac{e^2}{r_{a_k, k}} - \frac{e^2}{r_{a_r, i}} \right] u_{a_i}(q_k)\, u_{a_k}(q_i)\, d\nu_i d\nu_k.$$

Остальные члены обращаются в нуль, если считать, что собственные функции ортогональны. Принимая во внимание уравнение (48) для невозмущенных собственных функций, матричный элемент можно представить в виде

$$\mathcal{H}_{ik} = \int u_{a_i}(q_i)\, u_{a_k}(q_k) \left[\frac{e^2}{r_{i,k}} + \frac{e^2}{r_{a_i, a_k}} - \frac{e^2}{r_{a_i, i}} - \frac{e^2}{r_{a_k, k}} \right] \times$$
$$\times\, u_{a_i}(q_k)\, u_{a_k}(q_i)\, d\nu_i d\nu_k;$$

члены с $E_{a_i}^0$ и $E_{a_k}^0$ исчезают вследствие квазиортогональности. Записав правую часть равенства в виде, симметричном относительно i и k, мы придем к выражению, ранее полученному Гайтлером и Лондоном,— обмен-

ному интегралу

$$\mathcal{H}_{ik} = \int u_{a_i}(q_i)\, u_{a_k}(q_i)\, u_{a_i}(q_k)\, u_{a_k}(q_k) \times \times \left[\frac{2e^2}{r_{i,k}} + \frac{2e^2}{r_{a_i,a_k}} - \frac{e^2}{r_{a_i,i}} - \frac{e^2}{r_{a_k,k}} - \frac{e^2}{r_{a_i,k}} - \frac{e^2}{r_{a_k,i}}\right] d\nu_i d\nu_k. \qquad (49)$$

В развитой ими теории ферромагнетизма всеми матричными элементами $\mathcal{H}_p$, отвечающими любым перестановкам, кроме перестановки двух атомов и тождественной перестановки, обычно пренебрегают. Если атомы отстоят достаточно далеко друг от друга, то в силу неравенства (36) отброшенные матричные элементы по сравнению с учитываемыми будут малыми величинами более высокого порядка. Следовательно, поскольку при перестановке двух атомов $\varepsilon = -1$, систему уравнений (46) можно преобразовать к виду

$$\mathcal{H}_I x(f_1, \ldots, f_r) - \sum_{i<k} \mathcal{H}_{ik} x(P_{ik} | f_1, \ldots, f_r) - Ex(f_1, \ldots, f_r) = 0, \qquad (50)$$

где $\mathcal{H}_I$ — сумма невозмущенной энергии и энергии кулоновского взаимодействия между атомами; для дальнейшего этот член интереса не представляет. Набор индексов $(P_{ik} \mid f_1, \ldots, f_r)$ получается из $f_1, \ldots, f_r$ при перестановке индексов i и k. Поскольку порядок индексов роли не играет, набор $(P_{ik} \mid f_1, \ldots, f_r)$ тождествен $f_1, \ldots, f_r$ тогда и только тогда, когда оба индекса i и k входят в $f_1, \ldots, f_r$ или оба эти индекса отсутствуют в указанном наборе.

Как показал Блох [13], последние замечания позволяют без труда вычислить сумму всех собственных значений энергии, принадлежащих данному значению m. В свою очередь она равна сумме коэффициентов при $x(f_1, \ldots, f_r)$, т. е. сумме диагональных членов определителя, составленного из коэффициентов при x (член с E сюда не входит), для всех возможных комбинаций $f_1, \ldots, f_r$. Для вычисления этой суммы необходимо знать, сколько раз данный элемент $\mathcal{H}_{ik}$ умножается на $x(f_1, \ldots, f_r)$, что составляет число комбинаций, в которых спины электрона i и электрона k имеют одинаковое направление. Число комбинаций, для которых эта общая ориентация параллельна полю, очевидно, равно C_{2n-2}^{n-m} (из $2n-2$ электронов, отличных от i и k, требуется выбрать $r = n - m$ электронов с противоположно направленным спином). Точно так же число комбинаций, для которых общая ориентация спина электронов i и k противоположна направлению поля, равно C_{2n}^{n+m}. Следовательно,

$$F(m) = \sum E_m = Z(m)\,\mathcal{H}_I - \Big(\sum_{i<k} \mathcal{H}_{ik}\Big)\big(C_{2n-2}^{n-m} + C_{2n-2}^{n+m}\big) = Z(m)\,\mathcal{H}_I - - \Big(\sum_{i<k} \mathcal{H}_{ik}\Big) C_{2n}^{n+m} \frac{n^2 - m^2 - n}{n(2n-1)}. \qquad (51)$$

---

[13] *F. Bloch.* Z. Phys., 1929, 57, 545.

В отсутствие внешнего магнитного поля ориентация системы вырождается, поскольку при заданном значении s результирующего спинового момента m может изменяться от $-s$ до $+s$. При заданном s и различных m значения энергии одинаковы. Если $f(s)$ — число энергетических уровней, а $g(s)$ — сумма значений энергии, отвечающих заданным s и m, то (ср. Блох [14])

$$Z(m) = \sum_{s=|m|}^{n} f(s), \qquad F(m) = \sum_{s=|m|}^{n} g(s).$$

Решение этих уравнений имеет вид:

$$f(s) = Z(s) - Z(s+1), \qquad g(s) = F(s) - F(s+1).$$

Отсюда с помощью соотношений (42) и (51) находим:

$$f(s) = C_{2n}^{n+s} - C_{2n}^{n+s+1} = C_{2n}^{n+s}\frac{2s+1}{n+s+1}, \tag{52}$$

$$g(s) = f(s)\mathcal{H}_I - \left[C_{2n}^{n+s}\frac{n^2+s^2-n}{n(2n-1)} - C_{3n}^{n+s+1}\frac{n^2+(s+1)^2-n}{n(2n-1)}\right] \times \\ \times \left(\sum_{i<k}\mathcal{H}_{ik}\right), \tag{53}$$

$$g(s) = f(s)\mathcal{H}_I - \left[(C_{2n}^{n+s} - C_{2n}^{n+s+1})\frac{n^2+s^2-n}{n(2n+1)} - \right. \\ \left. - C_{2n}^{n+s}\frac{(2s+1)(n-s)}{n(2n-1)(n+s+1)}\right]\left(\sum_{i<k}\mathcal{H}_{ik}\right).$$

Таким образом, средняя энергия при заданном значении s оказывается равной

$$\bar{E}_s = \frac{g(s)}{f(s)} = \mathcal{H}_I - \frac{n(n-2)+s(s+1)}{n(2n-1)}\sum_{i<k}\mathcal{H}_{ik}. \tag{54}$$

Этот результат был впервые получен Гайтлером.

Мы видим, что связь между симметрией координат и симметрией собственных функций спина, устанавливаемая принципом запрета, достаточна для того, чтобы средняя энергия даже в отсутствие взаимодействия между спинами зависела от результирующего спинового момента.

§ 5. Применение к ферромагнетизму

а) *Подстановка средней энергии вместо ее точных значений.* Результаты предыдущего параграфа, в котором метод Гайтлера — Лондона был обобщен на случай большого числа N атомов, к проблеме ферромагнетизма впервые применил Гейзенберг [15]. Гипотеза о том, что ферромагнетизм

---

[14] См. прим. 13.

[15] См. прим. 1.

обусловлен одними лишь спинами электронов, основывается на результатах количественных измерений гиромагнитных эффектов: появление момента количества движения при намагничении (эффект Эйнштейна — де Гааза) и, наоборот, намагничения, создаваемого вращением тела (Барнетт). Вращательные моменты при этом должны компенсировать друг друга.

Приближенный метод, которым мы сейчас воспользуемся, по существу исходит из предположения о том, что расстояние между атомами велико по сравнению с размерами электронной оболочки, окружающей каждый из них. Разумеется, для твердого тела это предположение не является точным.

К сожалению, все попытки усовершенствовать методы вычислений на основе иных, более точных гипотез наталкиваются на серьезные математические трудности.

Для точного вычисления суммы

$$S = \sum e^{-\frac{E}{kT}}, \tag{55}$$

через которую магнитный момент выражается по формуле

$$\mathfrak{M} = kT\,\frac{\partial \ln S}{\partial H}, \tag{56}$$

требуется знать все собственные значения энергии (расположенные весьма близко друг от друга), т. е. полное решение уравнений (50). Гейзенберг начал с того, что ввел среднее значение энергии, отвечающее данным значениям s и m [16], приписав ему вес $f(s)$. Во внешнем магнитном поле H к этому среднему значению добавляется величина $-m\cdot 2\mu_0 H$, и вместо (55) мы получаем

$$S = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{m=-s}^{+s} f(s)\exp\left(-\frac{\overline{E}_s}{kT} + m\,\frac{2\mu_0 H}{kT}\right), \tag{57}$$

где $f(s)$ определяется формулой (52), а $\bar{E}_s$ — формулой (54). Для нас представляют интерес лишь те члены $\bar{E}_s$, которые зависят от s, поскольку согласно (56) только они и дают вклад в магнитный момент.

Последнее обстоятельство делает заметным еще один недостаток метода Гайтлера — Лондона: в рассматриваемом приближении их подход не учитывает силы поляризации. В самом деле, силы поляризации, по крайней мере при допустимых в методе Гайтлера — Лондона больших расстояниях между атомами, не зависят от s. Следовательно, можно положить

$$\overline{E}_s = \text{const} - \frac{s(s+1)}{n(2n-1)}\sum_{i<k}\mathcal{H}_{ik}.$$

---

[16] Хорошее приближение можно получить также, если использовать средние значения энергии при каждом из m независимо от s.

С другой стороны, числа s и n можно считать большими; в случае парамагнетизма уже среднее значение s пропорционально n. Следовательно, s по сравнению с s^2 и n по сравнению с $2n^2$ можно пренебречь.

Если $\mathcal{J}$ — сумма обменных интегралов для некоторого фиксированного атома со всеми остальными: [17]

$$\mathcal{J} = \sum_{k \neq i} \mathcal{H}_{ik}$$

(Гейзенберг обозначает эту величину через $z\mathcal{J}$, где z — число ближайших соседей данного атома), то в силу эквивалентности всех атомов

$$\sum_{i<k} \mathcal{H}_{ik} = \frac{N}{2}\mathcal{J} = n\mathcal{J},$$

и мы окончательно получаем

$$\overline{E}_s = \text{const} - \mathcal{J}\frac{s^2}{2n}. \tag{58}$$

В этой формуле по существу содержится теория молекулярного поля Вейсса. Действительно, молекулярное поле служит мерой энергии, необходимой для того, чтобы перевернуть один магнитный атом (вращающийся электрон), т. е. увеличить на единицу s. Формула (58) показывает, что эта энергия пропорциональна s, т. е. уже имеющейся намагниченности. Отсюда с необходимостью следует, что наша теория приводит к результатам, аналогичным полученным Вейссом. Заметим еще, что ферромагнетизм следует ожидать лишь тогда, когда энергия при возрастании s убывает, т. е. при

$$\mathcal{J} > 0. \tag{59}$$

И действительно, мы видим, что принятые гипотезы приводят в этом случае к ферромагнетизму, а в противоположном — к парамагнетизму.

Сумму S можно представить в виде

$$S = \sum_{s=0}^{n} \sum_{m=-s}^{+s} f(s)\, e^{2\left(\alpha m + \beta \frac{s^2}{2n}\right)}, \tag{60}$$

где

$$\alpha = \frac{\mu_0 H}{kT}, \quad \beta = \frac{\mathcal{J}}{2kT}. \tag{61}$$

Суммируя по m, получаем

$$S = \sum_{s=0}^{n} f(s) \frac{e^{2\alpha s} - e^{-2\alpha(s+1)}}{1 - e^{-2\alpha}} e^{2\beta \frac{s^2}{2n}}.$$

---

[17] Поскольку обменные интегралы очень быстро убывают с увеличением расстояния между атомами, в эту сумму входят лишь те члены, которые соответствуют ближайшим соседям данного атома.

Членом $e^{-2\alpha(s+1)}$ можно пренебречь; тогда

$$S = \frac{1}{1-e^{-2\alpha}} \sum_{s=0}^{n} f(s)\, e^{2\left(\alpha s+\beta \frac{s^2}{2n}\right)}.$$

Не вычисляя непосредственно эту сумму, заметим, что величина, подлежащая суммированию, выражает вероятность $W(s)$ того, что s принимает то или иное определенное значение, и найдем значение s, при котором

$$w(s) = \text{const}\, f(s)\, e^{2\alpha s+\beta \frac{s^2}{2n}} = \text{const}\, C_{2n}^{n+s} \frac{2s+1}{n+s+1} e^{2\alpha s+\beta \frac{s^2}{n}}$$

достигает максимума. Условие, при котором это происходит, имеет вид

$$\frac{w(s+1)}{w(s)} = 1.$$

Поскольку

$$\frac{f(s+1)}{f(s)} = \frac{n-s}{n+s+2}\,\frac{2s+2}{2s+1} \sim \frac{n-s}{n+s},$$

то при наиболее вероятном значении s, которое мы обозначим через $\bar{s}$,

$$\frac{n-\bar{s}}{n+\bar{s}}\, e^{2\left(\alpha+\beta \frac{\bar{s}}{n}\right)} = 1. \tag{62}$$

Нетрудно доказать, что среднее значение s совпадает с наиболее вероятным его значением с точностью до членов более высокого порядка и что среднее значение $(s-\bar{s})^2$ пропорционально n, а не n^2. На доказательстве этих утверждений мы останавливаться не будем.

Рассмотрим теперь среднее значение $\bar{m}$ величины m. В отсутствие внешнего магнитного поля ($\alpha = 0$) среднее значение $\bar{m}$, очевидно, равно нулю, поскольку ни одно направление не выделено. Во внешнем поле, даже очень слабом, $\bar{m}$ уже отлично от нуля.

Выбрав слагаемые, входящие в S, в виде (60), вычислим среднее значение разности $s-m$ при заданном s:

$$\overline{s-m} = \frac{\sum\limits_{m=-s}^{s} (s-m)\, e^{-2\alpha(s-m)}}{\sum\limits_{m=-s}^{s} e^{-2\alpha(s-m)}} \sim \frac{\int_0^\infty x e^{-2\alpha x} dx}{\int_0^\infty e^{-2\alpha x} dx} = \frac{1}{2\alpha}.$$

Эта величина очень мала по сравнению с s, если только

$$\alpha = \frac{\mu_0 H}{kT} \gg \frac{1}{s}.$$

Последнее же неравенство выполняется практически всегда, поскольку s пропорционально n, и справедливо даже для парамагнитных тел. Таким образом, при сделанных предположениях всегда можно считать, что

$$\bar{m} = \bar{s}. \tag{63}$$

Анализ уравнения (62) упрощается, если положить

$$y = \frac{\bar{s}}{n}, \qquad \alpha + \beta y = x. \tag{64}$$

Уравнение при этом принимает вид

$$\frac{1-y}{1+y} e^{2x} = 1.$$

Разрешая его относительно y, находим

$$y = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th} x. \tag{65}$$

Намагниченность $\mathfrak{M}$ определяется выражением

$$\mathfrak{M} = \mu_0 \cdot 2\bar{m} = \mu_0 \cdot 2\bar{s} = \mu_0 \cdot 2ny = N\mu_0 y. \tag{66}$$

Величина ее пропорциональна ординате y точки пересечения прямой (64) с кривой (65).

Таким образом, случай $\mathcal{J} > 0$ (а следовательно, и $\beta > 0$) отвечает ферромагнетизму. Теория по существу совпадает с теорией ферромагнетизма, предложенной Вейссом. Единственное отличие состоит в том, что Вейсс вместо $\operatorname{th} x$ пользуется функцией Ланжевена

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x}.$$

При использовании функции $\operatorname{th} x$ спин электрона во внешнем магнитном поле может иметь лишь два направления, в то время как теория Ланжевена допускает непрерывное распределение элементарных моментов по всем направлениям. Гейзенберг показал, что функции, которые возникают при рассмотрении атома с несколькими валентными электронами, больше напоминают функцию Ланжевена.

В отсутствие внешнего поля ($\alpha = 0$) прямая (64) проходит через начало координат:

$$x = \beta y.$$

Остаточная намагниченность возможна, если эта прямая пересекает кривую (65) в точке, отличной от начала координат. Так происходит в том случае, когда угол, образуемый прямой (64) с осью x, меньше угла, образуемого с осью x, касательной $y = x$ к кривой (65) в начале координат, т. е. при $\beta > 1$, или в силу (61) при

$$T < \frac{\mathcal{J}}{2k}.$$

Температура

$$\Theta = \frac{\mathcal{J}}{2k} \qquad \left(\beta = \frac{\Theta}{T}\right) \tag{67}$$

отвечает точке Кюри. При температурах ниже ее и при слабых полях кривую (65) можно заменить касательной $y = x$, проведенной к ней в начале

координат. Тогда с учетом (64) получим

$$\alpha + \beta y = y,$$

или

$$y = \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

Используя это выражение и соотношения (61), (66) и (67), намагниченность можно представить в виде

$$\mathfrak{M} = N \frac{\mu_0^2 H}{k(T-\Theta)}. \tag{68}$$

Последняя формула остается верной и при $\mathcal{J} < 0$ или $\beta < 0$.

Пусть

$$\Theta = -\frac{\mathcal{J}}{2k} = \frac{|\mathcal{J}|}{2k}, \tag{67'}$$

тогда

$$\mathfrak{M} = N \frac{\mu_0^2 H}{k(T+\Sigma)}, \tag{68'}$$

т. е. мы получаем парамагнетизм с поправочным членом в законе Кюри. При $\Theta > T$ эта теория также приводит к парамагнетизму, почти не зависящему от температуры. Впрочем, в этом случае обменные интегралы были бы очень велики и гипотезы, положенные в основу нашей теории, стали бы слишком грубыми.

б) *Более точное рассмотрение окрестности насыщения.* Теория Гейзенберга исходит из приближения, состоящего в замене собственных значений энергии их средним значением. Эту теорию Гейзенберг попытался уточнить, приняв допущение о гауссовом распределении собственных значений вокруг их среднего с точно известным среднеквадратичным отклонением. Однако такое распределение собственных значений может сильно отличаться от реального, и оценить, в какой мере результаты, полученные при сделанном допущении, отличаются от результатов, получаемых при использовании точных собственных значений, найденных из уравнений (50), довольно трудно.

Поэтому весьма важное значение имеет разработанный Слетером [18] и Блохом [19] регулярный метод приближенного вычисления собственных значений системы (50). Оба автора существенно использовали симметрию кристаллической решетки, в то время как результаты, о которых мы говорили выше, остаются в силе и при совершенно неупорядоченном расположении атомов в пространстве. Впрочем, метод Слетера — Блоха применим лишь при условии, что почти все спины электронов имеют одинаковую ориентацию (случай $\mathcal{J} > 0$, окрестность насыщения и низкие температуры). Существующая ныне теория не позволяет точно предсказывать,

---

[18] *J. C. Slater.* Phys. Rev., 1930, 35, 509.
[19] *F. Bloch.* Z. Phys., 1930, 61, 206.

как изменится намагниченность в зависимости от поля и температуры в окрестности точки Кюри. Тем не менее можно считать, что формула (67), определяющая точку Кюри, остается верной с точностью до численного множителя.

Основную идею метода Слетера — Блоха проще всего продемонстрировать, применив систему (50) к линейной цепочке атомов и предположив, что существенным является лишь обмен между соседними атомами. Пусть атомы пронумерованы в той последовательности, в которой они входят в цепочку, числами от 1 до N. Обозначим через $f_1, \ldots, f_r$ набор тех из них, у которых спин направлен против поля, например влево. Тогда

$$\mathcal{H}_{1,2} = \mathcal{H}_{2,3} = \ldots = \mathcal{H}_{p,p+1} = \frac{\mathcal{J}}{2},$$

и суммирование должно проводиться по всем наборам $f'_s, \ldots, f'_r$, получающимся из $f_1, \ldots, f_r$ при замене одного спина, направленного влево, одним спином, направленным вправо. *Диагональный член* $x\,(f_1, \ldots, f_r)$ показывает, сколько раз спины электронов у двух соседних атомов имеют одинаковое направление. Уравнение (50) можно записать в виде

$$E'x(f_1, \ldots, f_r) + \frac{\mathcal{J}}{2} \sum_{f'_1, \ldots, f'_r} [x(f'_1, \ldots, f'_r) - X(f_1, \ldots, f_r)] = 0,$$

где

$$E' = E - \mathcal{H}_I + N\frac{\mathcal{J}}{2}.$$

Величины f удобно определить так, чтобы они имели смысл при всех значениях индексов (вместо того, чтобы определять f лишь для индексов, пробегающих числа $i, \ldots, N$), положив

$$x(f_1, \ldots, f_i + N, \ldots, f_r) = x(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_r).$$

При $r = 0$, $m = n$, очевидно, $E' = 0$. При $r = 1$, $m - n = 1$

$$E'x(f) + \frac{1}{2}\mathcal{J}[x(f-1) - x(f) + x(f+1) - x(f)] = 0.$$

Решение получается немедленно и имеет вид

$$x_k(f) = e^{2\pi i k \frac{f}{N}}, \quad E'_k = \mathcal{J}\left[1 - \cos\frac{2\pi k}{N}\right].$$

При $r = 2$ и $m = -2$ возникает два уравнения:

$$E'x(f_1, f_2) + \frac{1}{2}\mathcal{J}[x(f_1 - 1, f_2) - x(f_1, f_2) + x(f_1 + 1, f_2) - x(f_1, f_2) +$$
$$+ x(f_1, f_2 - 1) - x(f_1, f_2) + x(f_1, f_2 + 1) - x(f_1, f_2)] = 0$$

(при $f_2 \neq f_1 + 1$),

$$E'x(f_1, f_2) + \frac{1}{2}\mathcal{J}[x(f_1 - 1, f_2) - x(f_1, f_2) + x(f_1, f_2 + 1) - x(f_1, f_2)] = 0$$

(при $f_2 = f_1 + 1$).

Уравнениям первой группы удовлетворяют:

$$x_{k_1, k_2}(f_1, f_2) = \exp\left[\frac{2\pi i}{N}(k_1 f_1 + k_2 f_2)\right] + \exp\left[\frac{2\pi i}{N}(k_2 f_1 + k_1 f_2)\right],$$

$$E'_{k_1, k_2} = \mathcal{Y}\left[\left(1 - \cos\frac{2\pi k_1}{N}\right) + \left(1 - \cos\frac{2\pi k_2}{N}\right)\right].$$

Уравнениям второй группы можно удовлетворить лишь приближенно, и более подробное исследование показывает, что получаемое приближение тем лучше, чем меньше r по сравнению с n. В этом случае результат имеет вид

$$E'_{k_1, \ldots, k_r} = \mathcal{Y} \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \cos\frac{2\pi k_j}{N}\right) \qquad (0 \leqslant k_j \leqslant N - 1). \tag{69}$$

Состояние с энергией E' определяется набором чисел $k_1, k_2, \ldots, k_r$ и не зависит от их порядка.

Этот результат нетрудно обобщить и распространить на случай решетки большего числа измерений, даже если отказаться от гипотезы о том, что взаимодействовать могут лишь ближайшие атомы, но считать, что взаимодействие быстро убывает с увеличением расстояния.

Узел решетки можно задать набором целых чисел $f^{(i)}$ (двух — для плоской решетки и трех — для пространственной). Вектор, соединяющий начало координат с рассматриваемым узлом, имеет вид

$$r = \sum_i f^{(i)} n_i,$$

где n_i — векторы, образующие ребра фундаментального параллелепипеда решетки. Если $\mathcal{H}_{f\,i)}$ — обменный интеграл для атомов, находящихся в начале координат и точке $f^{(i)}$, то

$$E'^{(i)}_{k_1, \ldots, k_2}(i) = 2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{f} \mathcal{H}_{f^{(i)}} \left(1 - \cos\frac{2\pi \sum_i k_j^{(i)} f^{(i)}}{G}\right) \tag{70}$$

$$(0 \leqslant K_j^{(i)} \leqslant N - 1).$$

Здесь G — число элементарных параллелепипедов: для плоской решетки $G^2 = N$, для пространственной — $G^3 = N$.

Согласно вычислениям Блоха [20], которые мы не будем воспроизводить здесь, в случае линейной цепочки сумма S и результирующий магнитный момент $\mathfrak{M}$ имеют вид:

$$S = e^{\frac{NH\mu_0}{kT}} \prod_{p=1}^{N} \left[1 - \exp\left(\frac{-\varepsilon_p + \mu_0 H}{kT}\right)\right]^{-1},$$

$$\overline{\mathfrak{M}} = kT\frac{\partial \ln S}{\partial H} = N\mu_0 - \mu_0 \sum_{p=1}^{N} \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_p + \mu_0 H}{kT}\right) - 1\right]^{-1},$$

[20] См. прим. 19.

где

$$\varepsilon_p = \mathcal{J}\left(1 - \cos\frac{2\pi p}{N}\right).$$

Заменяя $1 - \cos\frac{2\pi p}{N}$ на $\frac{1}{N}\frac{(2\pi p)^2}{N}$ и сумму интегралом, получаем, в обозначениях (61):

$$\overline{\mathfrak{M}} \sim N\mu_0\left[1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi}{e^{\alpha+\beta\xi^2} - 1}\right]. \qquad (71_1)$$

Аналогично для плоской решетки имеем

$$\overline{\mathfrak{M}} \sim N\mu_0 - \mu_0 \sum_{p_1, p_2}\left[\exp\left(\frac{\varepsilon_{p_1, p_2} + \mu_0 H}{kT}\right) - 1\right]^{-1},$$

где

$$\varepsilon_{p_1, p_2} = \mathcal{H}_{1,0}\left(1 - \cos\frac{2\pi p_1}{N}\right) + \mathcal{H}_{0,1}\left(1 - \cos\frac{2\pi p_2}{N}\right) +$$
$$+ \mathcal{H}_{1,1}\left(1 - \cos\frac{2\pi(p_1 + p_2)}{N}\right) + \ldots$$

Отсюда по аналогии с (71_1) находим

$$\overline{\mathfrak{M}} = N\mu_0\left[1 - \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\frac{d\xi d\eta}{e^{\alpha + Q_2(\xi, \eta)} - 1}\right]; \qquad (71_2)$$

$Q_2(\xi, \eta)$ здесь означает квадратичную форму, которая для обычной решетки с квадратными клетками и взаимодействием между ближайшими атомами вырождается в $\beta(\xi^2 + \eta^2)$. Для пространственной решетки точно так же получаем

$$\overline{\mathfrak{M}} = N\mu_0\left[1 - \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\frac{d\xi d\eta d\zeta}{e^{Q_3(\xi, \eta, \zeta) + \alpha} - 1}\right]. \qquad (71_3)$$

Для простой кубической решетки с обменом, ограниченным лишь ближайшими атомами,

$$Q_3(\xi, \eta, \zeta) = \beta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Для возникновения ферромагнетизма прежде всего необходимо, чтобы квадратичные формы были положительно определенными, что заведомо выполняется, если все включенные в рассмотрение обменные интегралы положительны [21]. Однако это условие не является достаточным для появления ферромагнетизма. При $\alpha = 0$ интегралы в (71_1) и (71_2) в окрестности нуля расходятся как $\int\frac{d\xi}{\xi^2}$ и $\int\frac{\rho d\rho}{e^{\beta\rho^2} - 1}$ или $\int\frac{d\rho}{\rho}$ соответственно.

---

[21] Теллер (*E. Teller*. Z. Phys., 1930, 62, 102) строго доказал, что в этом случае минимум энергии отвечает равенству $s = m = n$.

Из этих формул следовало бы, что $\overline{\mathfrak{M}} = -\infty$; в действительности же $\overline{\mathfrak{M}} = 0$. Но в окрестности нуля используемое нами приближение перестает быть законным. Можно ожидать, что результат зависит от N, поскольку в данном случае суммирование по p нельзя заменить интегрированием. Если размерность не меньше трех, то указанная трудность не возникает, поскольку интеграл (71_3) сходится, и при низких температурах и $H = 0$ мы без труда получаем магнитный момент

$$\overline{\mathfrak{M}} = N\mu_0 \left[1 - C\left(\frac{T}{\Theta}\right)^{3/2}\right], \tag{72}$$

где C — численная константа, а Θ — величина порядка $\mathcal{J}/k$. Полученная зависимость хорошо согласуется с экспериментом. Вид зависимости был бы совершенно иным, если бы мы воспользовались формулами (64) и (65) предыдущего параграфа.

Итак, существенный результат теории Слетера — Блоха сводится к следующему: для появления ферромагнетизма необходимо, чтобы решетка была трехмерной, и достаточно, чтобы обменный интеграл был положительным.

Этот результат представляет интерес в связи с обсуждением полуклассической модели, предложенной Изингом [22]. В этой модели рассматривается линейная цепочка, причем потенциальная энергия взаимодействия двух соседних атомов считается различной в зависимости от того, параллельны или антипараллельны их магнитные моменты. Энергию, или функцию Гамильтона, в этом случае можно представить в виде

$$\mathcal{H} = -A\sum_k (\sigma_k, \sigma_{k+1}), \tag{73}$$

где σ_k — вектор спина k-го электрона; $(\sigma_k, \sigma_{k+1}) = \pm 1$ в зависимости от того, как направлены спины: параллельно или антипараллельно. Среди свойств своей модели Изинг не обнаружил ничего, что соответствовало бы ферромагнетизму, кроме зависимости между положением точки Кюри и полным числом N частиц. Сейчас мы увидим, что в случае одномерной решетки квантовая теория приводит к аналогичному результату. Действительно, между задачей Изинга и рассмотренной нами задачей существует самая непосредственная связь. Дирак [23] показал, что система уравнений (50) отвечает в точности функции Гамильтона

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_I + \sum_{i<k} \mathcal{H}_{ik}\frac{1}{2}[1 + (\sigma_i, \sigma_k)] \tag{74}$$

(члены, не зависящие от σ, для наших целей интереса не представляют). В выражении (74) спины электронов рассматриваются как операторы в смысле квантовой механики электрона. В работе Изинга, в основу кото-

[22] *E. Ising.* Z. Phys., 1925, **31**, 253.
[23] См. прим. 11.

рой были положены представления старой квантовой теории, компоненты σ_1, перпендикулярные направлению поля, считались равными нулю, в то время как в новой квантовой механике эти компоненты не коммутируют с компонентой, параллельной полю. Несмотря на это различие, весьма вероятно, что обобщение теории Изинга на случай трехмерной решетки привело бы к ферромагнетизму, даже если бы мы ограничились представлениями классической теории. Вместо того, чтобы квантовать направление спина, можно было бы предположить, что спин электрона может иметь любое допустимое направление, и вычислить в рамках классической теории интеграл энергии, отвечающий функции Гамильтона (74).

§ 6. Различные вопросы, связанные с ферромагнетизмом

С теоретической точки зрения все еще остается не выясненным важный вопрос о том, почему столь малое число веществ (например, Fe, Ni, Co) является ферромагнетиками. Основная проблема, которую предстоит решить, заключается в отыскании условий, при которых обменные интегралы для атомов кристаллической решетки становятся положительными, хотя обычно они отрицательны. Для этого недостаточно рассмотреть лишь случай, когда расстояния между атомами велики; необходимо точно указать, при каких расстояниях атомы находятся в равновесии. В этой связи уместно заметить, что Слетеру [24], по-видимому, удалось показать существование некоторой взаимосвязи между природой сил сцепления, определяющих равновесие решетки, и возможностью появления ферромагнетизма. Кроме того, как полагает Слетер, ему удалось показать, что при рассмотрении ферромагнетизма и сил сцепления необходимо учитывать не один, а несколько электронов. Это предположение позволило бы объяснить необходимость незамкнутых внутренних электронных оболочек у атомов ферромагнитных веществ. Выводы Слетера, на мой взгляд, не вполне обоснованы. Специфические особенности кристаллической решетки ферромагнетиков рассматривал также Свинне [25].

Другой, еще не решенный вопрос относится к теоретической интерпретации величины намагниченности ферромагнетиков при насыщении, которая, согласно измерениям Вейсса, составляет в выбранных нами единицах 2,2; 0,6 и 1,8 на атом соответственно для Fe, Ni и Co. Эти значения не согласуются с гипотезой о том, что на атом приходится лишь один свободный вращающийся электрон. Более того, полное число электронов, обусловливающих появление ферромагнетизма, можно будет, по-видимому, получить, лишь включив в рассмотрение несколько атомов.

Кроме того, существующую ныне теорию, основанную на гипотезе свободного обмена ориентацией электронных спинов, следует дополнить, чтобы мы могли интерпретировать влияние, которое оказывает направление магнитного поля относительно кристаллических осей на намагничен-

[24] См. прим. 18.
[25] *R. Swinne*. Veröffentl. Simens-Konzern, 1929, **7**, 85.

ность, а также на магнитострикцию (изменение размеров кристалла при намагничении).

Акулов [26] с успехом объяснил эти эффекты, приняв во внимание взаимодействие между спинами электронов. В своих вычислениях он исходил из классической теории; при подходе с позиций квантовой теории некоторые из его результатов потребовалось бы изменить. Взаимодействие спинов должно играть важную роль и в явлениях гистерезиса, которые еще не вошли в теорию в ее современном виде [27].

Многие авторы занимались изучением связи между ферромагнетизмом и электропроводностью. Дорфман, Янус и Кикоин [28], основываясь на экспериментально установленном ими факте — резком изменении эффекта Томсона в точке Кюри, пришли к заключению, что одной из причин, обусловливающих появление ферромагнетизма, являются электроны проводимости. Хотя вполне возможно, что высказанное авторами утверждение верно, их выводы тем не менее отнюдь нельзя считать обоснованными, поскольку резкое изменение эффекта Томсона характерно не только для ферромагнетиков.

К этому же кругу идей относится и предпринятая Блохом [29] попытка теоретически решить важный вопрос: можно ли получить ферромагнетизм, если воспользоваться первым из методов, упомянутых в нашем введении, т. е. если взаимодействия между свободными электронами рассматривать как возмущения. Он обнаружил, что этот метод вполне пригоден при условии, если энергия поступательного движения при абсолютном нуле меньше энергии электростатического взаимодействия между электронами на расстояниях порядка характерных размеров решетки. Следует заметить, что приближение, полученное Блохом, довольно плохое и при этих условиях; однако его общие результаты следует считать обоснованными: ферромагнетизм возможен при условиях, весьма отличных от тех, при которых применим метод Гайтлера — Лондона, и в общем случае недостаточно учитывать один лишь знак обменных интегралов.

Многие свойства ферромагнитных веществ претерпевают в точке Кюри резкое изменение. К ним прежде всего относятся удельная теплоемкость, объем и упругие постоянные. Для первых двух величин Фаулер и Капица [30] вычислили эффект на основании теории Гейзенберга и получили по порядку величины удовлетворительные результаты. Те же авторы вычислили также и ту часть магнитострикции, которая следует из теории Гейзенберга, если пренебречь взаимодействиями между электронными моментами.

---

[26] *N. S. Akulov.* Z. Phys., 1928, **52**, 389; 1929, **54**, 582. См. также *Mahajani.* Philos. Trans., 1929, **A228**, 63.

[27] Интересная попытка объяснения гистерезиса с помощью взаимодействия спинов предпринята в работе Беккера (*R. Becker.* Z. Phys., 1930, 62, 253), опубликованной уже после того, как этот доклад был завершен.

[28] *J. G. Dorfmann, R. L. Jaanus.* Z. Phys., 1929, **54**, 277; *J. G. Dorfmann, I. K. Kikoin.* Z. Phys., 1929, **54**, 289.

[29] См. прим. 13.

[30] *R. H. Fowler, P. L. Kapitza.* Proc. Roy. Soc., 1929, **A124**, 1.

Изменение электросопротивления и «спонтанный» эффект Холла в ферромагнетиках составляют весьма обширную область явлений, в которой имеется много экспериментальных данных и очень мало теоретических результатов. Упомянутые эффекты пропорциональны намагниченности и могут наблюдаться даже в отсутствие внешнего магнитного поля.

§ 7. Парамагнитное вращение плоскости поляризации в кристаллах

В этом параграфе речь пойдет главным образом об исследованиях Беккереля и де Гааза [31] по одноосным кристаллам редких земель — тисоните и ксенотиме — и подробном теоретическом анализе, предпринятом Крамерсом совместно с двумя первыми авторами [32]. Остановимся кратко на наиболее важных сторонах рассмотренной ими проблемы.

Следует считать, что вращение плоскости поляризации в магнитном поле (эффект Фарадея) уже в случае газа обусловлено двумя различными причинами. Первая из них заключается в том, что собственные частоты полос поглощения для света с правой и левой круговой поляризацией во внешнем магнитном поле в силу эффекта Зеемана должны быть различными, вследствие чего «виртуальные осцилляторы» атома неодинаково возбуждаются право- и левополяризованным светом и соответствующие показатели преломления различны. Эта, диамагнитная часть эффекта не зависит от температуры. Вторая причина, действующая даже в отсутствие внешнего магнитного поля, состоит в том, что отдельный атом с заданной ориентацией по-разному ведет себя при воздействии право- и левополяризованного света. Если атомы равномерно распределены по всем ориентациям, допустимым по правилам квантования, как это, например, происходит в случае теплового равновесия в отсутствие внешнего магнитного поля, то влияние этой асимметрии в среднем для большого числа атомов перестает сказываться. Во внешнем поле введение больцмановского множителя так же, как и в теории парамагнетизма, делает такую компенсацию невозможной, и возникает эффект, зависящий от температуры,— парамагнитная часть вращения плоскости поляризации. Если, как мы будем предполагать в дальнейшем, возможна ориентация лишь в двух направлениях (так, например, происходит в случае $j = 1/2$), то эффект пропорционален намагниченности. В самом деле, если обозначить через ρ_∞ магнитное вращение плоскости поляризации, когда все атомы ориентированы параллельно полю ($m = +1/2$), то вращение для атомов с противоположной ориентацией должно быть равным $-\rho_\infty$. В общем случае, когда атомы той и другой ориентации составляют лишь долю (равную, соответственно, w_1 и w_2, $w_1 + w_2 = 1$) от общего их числа,

$$\rho = \rho_\infty (w_1 - w_2). \tag{75}$$

---

[31] *J. Becquerel, W. J. de Haas.* Z. Phys., 1929, 52, 342, 678.

[32] *H. A. Kramers.* Amsterdam Proc., 1929, 32, 1176; *H. A. Kramers, J. Becquerel.* Amsterdam Proc., 1929, 32, 1190; *H. A. Kramers, J. Becquerel, W. J. de Haas.* Amsterdam Proc., 1929, 32, 1206.

Если изменение энергии в состояниях с различными ориентациями при наложении поля составляет $\pm\mu H$, намагниченность на атом равна

$$\mathfrak{M} = \mu\,(w_1 - w_2),$$

и, следовательно,

$$\rho = \rho_\infty \frac{\mathfrak{M}}{\mu} = \rho_\infty \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\infty}\,. \tag{76}$$

Индекс ∞ связан с тем, что в магнитном поле бесконечной напряженности установилось бы насыщение, т. е. все атомы были бы ориентированы параллельно полю. Если же напряженность поля H конечна, то в рассматриваемом случае мы получим две возможные ориентации:

$$w_1 = \frac{e^{+\frac{\mu H}{kT}}}{e^{\frac{\mu H}{kT}} + e^{-\frac{\mu H}{kT}}}\,, \quad w_2 = \frac{e^{-\frac{\mu H}{kT}}}{e^{\frac{\mu H}{kT}} + e^{-\frac{\mu H}{kT}}}\,,$$
$$w_1 - w_2 = \operatorname{th}\frac{\mu H}{kT}\,. \tag{77}$$

Более полное изложение теории парамагнитной части вращения плоскости поляризации можно найти в работах Ладенбурга [33], Френкеля [34] и Дарвина [35], а также Розенфельда [36]; относительно возможности ее экспериментальной проверки имеется небольшая заметка Минковского [37]. В газе диамагнитная часть эффекта в общем случае больше парамагнитной части. Кроме того, важно заметить, что в случае s-термов последняя часть эффекта почти полностью исчезает, если только частота падающего света не совпадает с одной из линий внутри одного мультиплета или не расположена в непосредственной близости от одной из них.

Возвращаясь к кристаллам, мы должны будем еще раз воспользоваться уже известным нам приближенным методом. Основная идея его состоит в том, что атомы сначала предполагаются изолированными и лишь затем как возмущение вводится взаимодействие. Замечательное совпадение между значениями магнитной восприимчивости редких земель в твердом состоянии, полученными из эксперимента и вычисленными Хундом с помощью гипотезы об изолированных атомах (см. доклад Зоммерфельда), позволяет заключить, что в общем случае влияние взаимодействия между атомами в кристаллах редких земель мало́. При этом в отличие от ферромагнетизма мы уже не можем ограничиться рассмотрением одних лишь s-термов. Если же речь идет о различных термах, то возникает вопрос, отвечают ли электрические поля, действующие на атомы внутри кристалла, энергиям, малым по сравнению с разностями энергии между уровнями

[33] *R. Ladenburg.* Z. Phys., 1925, 34, 898; 1927, 46, 168.
[34] *J. I. Frenkel.* Z. Phys., 1925, 36, 215.
[35] *C. G. Darwin.* Proc. Roy. Soc., 1926, **A112**, 314.
[36] *L. Rosenfeld.* Z. Phys., 1929, 57, 835.
[37] *R. Minkowski.* Naturwissenschaften, 1929, 17, 567.

одного и того же мультиплета в свободном атоме. Лишь в случае «слабых полей» результирующее квантовое число j атома остается по существу неизменным. Наоборот, можно считать, что условия «слабых полей» выполнены, когда магнитная восприимчивость кристалла совпадает с магнитной восприимчивостью, вычисленной для изолированного атома.

В противоположном случае сильных полей взаимодействием между орбитальными моментами и спином сначала можно пренебречь. Необходимо прежде всего принять во внимание взаимодействия между орбитами различных атомов и лишь затем учесть влияние спина на орбитальные моменты полученных состояний.

Случай сильных полей становится особенно простым, если предположить, как это сделал Беккерель [38], что в первом приближении электрическое поле обладает вращательной симметрией относительно оси кристалла; при этом компоненты m_1 и m_s орбитального момента и спина в направлении оси вращения квантуются независимо. Исходя из этой гипотезы, Крамерс и Беккерель заключили, что в ксенотиме парамагнетизм обусловлен ионом Gd^{3+}, а основное состояние отвечает терму S_s, в то время как в тисоните парамагнетизм связан с ионом Ce^{3+}. Данная авторами интерпретация явлений, наблюдавшихся для двух названных кристаллов, согласуется с весьма слабой зависимостью вращательной способности от ориентации магнитного поля относительно оси кристалла. Для тисонита из (75) и (77) следует формула

$$\rho = \rho_\infty \operatorname{th} \frac{\mu H}{kT}\,; \tag{78}$$

кроме того, эксперимент показывает, что необходимо положить $\mu = \mu_0$.

Вместе с тем следует подчеркнуть, что в случае Ce_2O_3 и других солей церия, для которых магнитную восприимчивость можно предсказать на основе теории Хунда, гипотеза сильных полей выполняется не вполне точно. Поэтому было бы чрезвычайно желательным, чтобы измерения магнитной восприимчивости приводились на тисоните.

Для ксенотима эксперимент подтверждает соотношение (78), но с некоторыми видоизменениями, о которых сейчас и пойдет речь. Этот факт теория может объяснить лишь с помощью дополнительной гипотезы: среди уровней, отвечающих различным значениям $|m| = m_s$, на которые расщепляется терм S_s при включении, например, взаимодействия между спинами электронов, в тепловое равновесие существенный вклад вносит лишь низший уровень с $|m| = 7/2$. Такая гипотеза, помимо прочего, противоречит свойствам других солей гадолиния в твердом состоянии; однако если принять ее, то формула (78) становится простым следствием снятия под действием внешнего магнитного поля вырождения между двумя состояниями: $m = 7/2$ и $m = -7/2$. Эксперимент подтверждает, что $\mu = 7\mu_0$.

Рассматривая отклонения электрического поля от вращательной симметрии как возмущения, Крамерс нашел, что в случае, когда магнитное

---

[38] *J. Becquerel.* Z. Phys., 1929, 58, 205.

поле параллельно оси кристалла, формулу (78) следует заменить формулой

$$\rho = \rho_\infty \frac{\mu H}{\sqrt{(\mu H)^2 + K^2}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{(\mu H)^2 + K^2}}{kT}\,. \tag{79}$$

Последняя хорошо согласуется с экспериментом.

Следуя Крамерсу, заметим также, что постоянная ρ для тисонита и ксенотима отлична от нуля лишь в силу тех же самых отклонений электрического поля от вращательной симметрии. Для термов с $m_1 = 0$ в сильном магнитном поле, симметричном относительно оси кристалла, $\rho_\infty = 0$, как указывалось выше для изолированного атома, состояние которого отвечает S-терму.

Для того чтобы установить, в какой мере приемлема предложенная Крамерсом интерпретация результатов Беккереля и де Гааза, по существу основанная на гипотезе о (по крайней мере, приближенной) вращательной симметрии внутреннего электрического поля, необходимы новые исследования, как экспериментальные, так и теоретические.

Бете [39] исследовал в общем виде влияние симметрии кристалла на характер симметрии собственных функций. Полученные им результаты нашли интересное применение в развитой им же теории эффекта Зеемана в полосах поглощения кристаллов солей редких земель [40].

II. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНА

§ 1. Обсуждение схем некоторых экспериментов по обнаружению собственного момента свободных электронов

Прежде чем приступить к изложению дираковской теории электрона, мы изучим схемы некоторых экспериментов и на их примере обсудим утверждение Бора о том, что спин свободных электронов и протонов нельзя измерить в экспериментах, основанных на обычной концепции движения частиц (понятия траектории в классической механике или луча в геометрической оптике). Действительно, исходя из значения

$$\mu_0 = \frac{eh}{4\pi m_0 c} \tag{1}$$

собственного магнитного момента электрона, можно показать, что условия, необходимые для того, чтобы эффекты, связанные с наличием спина у свободного электрона, были заметны на фоне силы Лоренца, в точности совпадают с условиями, благоприятствующими возникновению дифракции, которая мешает наблюдению этих эффектов.

---

[39] *H. Bethe.* Ann. Phys., 1929, 3, 133.
[40] *H. Bethe.* Z. Phys., 1930, 60, 218.

а) Остановка ориентированных электронов внешним полем[41]. Пусть электроны медленно движутся вдоль оси z; магнитное поле направлено в противоположную сторону. Если поле неоднородно и $\frac{\partial H_z}{\partial z} > 0$, то те электроны, у которых собственный момент направлен в сторону отрицательных z, по истечении промежутка времени t, определяемого уравнением

$$mv_z = \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial z} t, \qquad (2)$$

останавливаются, после чего начинают двигаться в противоположную сторону. Поэтому число электронов, проходящих в направлении оси z расстояние, большее $v_z t$, вдвое меньше, чем оно могло быть, если бы у электронов не было собственного момента.

Важно заметить, что неоднородное поле не может иметь одно и то же направление во всем пространстве. Если поле всюду параллельно плоскости xz, то

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = -\frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Если при $x = 0$ поле направлено точно по оси z, то на расстоянии Δx от оси x

$$H_x = \frac{\partial H_x}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial H_z}{\partial z} \Delta x.$$

Отсюда следует, что за время, равное ларморовому периоду $1/\sigma$, направление компоненты скорости v_z изменяется на противоположное (ср. I, § 3). Величина же σ определяется соотношением

$$\sigma = \frac{eH_x}{4\pi m_0 c} = \frac{\mu_0 H_x}{h}.$$

Для того чтобы изменение знака компоненты скорости v_z оказало действие именно на собственный момент, а не на кривизну траектории, необходимо, чтобы

$$t \ll \frac{h}{\mu_0 H_x},$$

или

$$\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial z} t \Delta x \ll h, \qquad (3)$$

---

[41] Этот эксперимент предложен Бриллюэном (*L. Brillouin*. Compt. Rend., Acad. Sci. Paris, 1927, **184**, 82; Proc. Nat. Acad., 1928, **14**, 775) и предполагает особое устройство, позволяющее делать малой определенную компоненту скорости, а не всю величину ее вектора. Мы не будем останавливаться здесь на возможности именно такой формы проведения опыта, поскольку это не относится к обсуждаемым нами принципиальным вопросам. Рассуждения, приводимые в тексте, сообщил мне в устной беседе Н. Бор.

и в силу уравнения (2)

$$mv_z \, \Delta x \ll h. \qquad (4)$$

Последнее соотношение, хотя оно и не связано непосредственно с принципом неопределенности, вследствие волновой природы электрона не может выполняться в течение всего движения. В самом деле, $h/(mv_z)$ имеет смысл длины волны, Δx означает ширину пучка и условие (4), которое можно представить в виде

$$\Delta x \ll \lambda,$$

не выполняется; однако если ввести достаточно узкую щель, то в силу соотношения неопределенности

$$\Delta v_x > \frac{h}{m \Delta x},$$

откуда, сравнивая с (4), получаем

$$\Delta v_x \gg v_z.$$

Следовательно, классическая механика не позволяет предсказывать результаты эксперимента.

Сделанный нами вывод тесно связан с тем обстоятельством, что магнитному моменту электрона мы придали значение (1). Если бы мы, наоборот, оставили величину μ магнитного момента неопределенной, то вместо (2) получили бы

$$mv_z = \mu \frac{\partial H_z}{\partial z} t,$$

откуда, сравнивая с (3), нашли бы, что

$$mv_z \Delta x \ll h \frac{\mu}{\mu_0}.$$

При $\mu \gg \mu_0$ это неравенство не противоречило бы условию $\Delta x \gg \lambda = h/(mv_z)$. Анализ других экспериментов, к обсуждению которых мы сейчас перейдем, приводит к аналогичным результатам.

б) Опыт Штерна — Герлаха для свободных электронов [42]. Пусть электроны движутся вдоль оси y; магнитное поле по-прежнему параллельно плоскости xz, причем $H_x = 0$ при $x = 0$. Поскольку электрон обладает собственным моментом, на него действует сила

$$\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

в направлении оси z и сила Лоренца $\frac{e}{c} v_y \mu H_z$ в направлении оси x. Напряженность магнитного поля в том месте, где находятся электроны, над пло-

---

[42] См. *N. F. Mott*. Proc. Roy. Soc., 1929, **A124**, 425. Обычный опыт Штерна — Герлаха позволяет измерить магнитный момент атома в целом.

скостью yz на небольшом удалении от нее, составляет

$$H_x = \frac{\partial H_x}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial H_z}{\partial z} \Delta x,$$

а сила Лоренца в направлении оси z равна

$$\frac{e}{c} v_y \frac{\partial H_z}{\partial z} \Delta x.$$

Для осуществимости опыта необходимо, чтобы

$$\frac{e}{c} v_y \frac{\partial H_z}{\partial z} \Delta x \ll \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial z},$$

или, что то же,

$$\Delta x \ll \frac{c\mu_0}{ev_y} = \frac{h}{4\pi} \frac{1}{mv_y},$$

или, наконец,

$$\Delta x \ll \lambda.$$

Итак, мы вновь попадаем в область, где классическая механика неприменима.

Нам остается еще исследовать случай, когда направление движения электронов параллельно оси x, а направление поля остается перпендикулярным оси y. В этом случае щель в направлении оси x может быть любой длины. Сила Лоренца параллельна оси y и равна по величине

$$\Delta K_y = \frac{ev_x}{c} H_x;$$

при переходе от одной точки к другой, отстоящей от первой на Δz, изменение силы Лоренца оказывается равным

$$\Delta K_y = \frac{ev_x}{c} \frac{\partial H_z}{\partial z} \Delta z,$$

в то время как сила, действующая на собственный момент электрона, составляет

$$K_z = \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta K_y}{K_z} = \frac{4\pi m_0 v_x}{h} \Delta z = \frac{4\pi \Delta z}{\lambda} = \frac{4\pi}{\alpha}, \qquad (5)$$

где $\alpha = \lambda/\Delta z$ — угол отклонения (в плоскости xz). Эффект наблюдаем при условии, что расстояние, проходимое электроном, достаточно для того, чтобы отклонение, обусловленное действием силы K_z, было велико по сравнению с α. Соотношение (5) показывает, что при этих условиях неопределенность в направлении скорости в плоскости xy, создаваемая силой Лоренца ΔK_y, велика по сравнению с 2π.

Можно думать, что перечисленные трудности приводят к тому, что раздвоение пучка в плоскости, перпендикулярной оси x, окажется полностью замазанным. Действительно, скорость v_y, приобретенная электронами, обусловливает появление силы Лоренца

$$K'_z = \frac{e}{c} v_y H_x,$$

направленной по оси z. Поскольку $\frac{\partial H_x}{\partial x} = -\frac{\partial H_z}{\partial z}$ и $\Delta x > \frac{h}{mv_x}$ (соотношение неопределенности), неравенство

$$K'_z > \frac{e}{c} v_y \frac{\partial H_z}{\partial z} \frac{h}{mv_x} = \frac{v_y}{v_x} 4\pi K_z$$

выполняется даже в начале движения электронов в поле, когда $H_x = 0$. Кроме того, как мы уже видели, во время движения в поле

$$\Delta v_y \gg v_x,$$

вследствие чего

$$K'_z \gg K_z.$$

Таким образом, картина раздвоения оказывается совершенно смазанной.

в) Компенсация силы Лоренца электрическим полем[43]. Представим себе, что электроны движутся со скоростью v вдоль оси z и на них одновременно действуют электрическое и магнитное поля. Оба поля параллельны плоскости xy, а их напряженности не зависят от z. Если ввести электрический потенциал Φ и векторный потенциал A, параллельный оси z (и тот и другой потенциал зависит от x и y), то компоненты полей можно представить в виде:

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad H_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \qquad H_y = -\frac{\partial A}{\partial x},$$

причем

$$\Delta^2\Phi = \Delta^2 A = 0.$$

На электрон с зарядом $-e$ действует сила, компоненты которой равны:

$$K_x = -eE_x + \frac{e}{c} vH_y = e\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi - \frac{v}{c} A\right),$$

$$K_y = -eE_y - \frac{e}{c} vH_x = e\frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi - \frac{v}{c} A\right).$$

При определенной скорости v происходит компенсация сил *во всем пространстве*, если

$$\Phi = \frac{v}{c} A. \tag{6}$$

---

[43] Этот эксперимент предложил Кнауэр (*F. Knauer*. Z. Phys., 1930, 59, 807). Приводимое здесь обсуждение заимствовано из бесед с Н. Бором и письменного сообщения В. Ленца.

Поэтому на первый взгляд кажется, что это позволяет легко измерять силы, действующие на собственный момент, поскольку только они и остаются, и нет необходимости точно определять положение электронов в направлениях, перпендикулярных к пучку.

На самом же деле оказывается, что невозможно получить пучок электронов, скорость v_E которых *в поле* не зависела бы от x и y, если одновременно должно выполняться равенство $v_x = v_y = 0$. В поле интегралом движения является не v_z, а

$$p_z = mv_z - \frac{e}{c} A. \tag{7}$$

Пусть в отсутствие полей все электроны пучка имеют одну и ту же скорость v_z. Включим поля адиабатически. С классической точки зрения [44] неизменной останется величина именно p_z, а не v_z. Итак, положим $p_z = \mathrm{const}$ и рассмотрим пучок, ограниченный круговым отверстием диаметра d. Пусть

$$A = -(ax + bxy), \qquad H_x = -bx, \; H_y = a + by, \; \frac{\partial H_y}{\partial y} = b.$$

Поле $H_y = a$ обусловливает ориентацию электронных моментов. На каждый из этих моментов действует сила

$$K_y = \mu_0 b.$$

На границе пучка некомпенсированная сила Лоренца ΔK_y равна

$$\Delta K_y = \frac{e}{c} \Delta v_z H_x = \frac{e}{c} \Delta v_y bd,$$

а поскольку

$$\Delta v_z = \frac{e}{mc} \Delta A = \frac{e}{mc} bd^2,$$

то

$$\Delta K_y = \frac{e}{mc} \frac{e}{c} b^2 d^3.$$

Итак, необходимо, чтобы

$$\mu_0 b \gg \frac{e}{mc} \frac{e}{c} b^2 d^3,$$

или

$$\mu_0 \gg \frac{e}{mc} \frac{e}{c} bd^3. \tag{8}$$

---

[44] Важность этого обсуждения подчеркивается тем обстоятельством, что в магнитном поле коммутируют не v_x и v_z, а v_x и p_z; Δv_x и Δv_z связаны между собой соотношением неопределенности

$$\Delta v_x \Delta v_z \sim \frac{1}{m^2} \frac{eh}{c} H_y \sim \frac{1}{m} \mu_0 H_y.$$

Понятие луча удастся сохранить лишь при условии, если изменение поперечных размеров пучка вдоль всего пути l в поле будет меньше d. С помощью угла отклонения $\left[\frac{\lambda}{d}\left(\lambda = \frac{h}{mv_z}\right)\right]$ это условие можно представить в виде

$$\frac{\lambda}{d} l \ll d, \quad \text{или} \quad 1 \gg \frac{\lambda l}{d^2}. \tag{9}$$

Умножив последнее соотношение на неравенство (8), найдем:

$$\mu_0 \gg \frac{e}{mc} \frac{e}{c} bd\lambda l,$$

$$\frac{\lambda}{d} l\mu_0 \gg \frac{e}{mc} \frac{e}{c} b \frac{h^2}{m^2 v_z^2} l^2.$$

Вспоминая, что значение μ_0 определяется по формуле (1), получаем неравенство

$$\frac{\lambda l}{d} \gg \mu_0 b \frac{1}{m} \left(\frac{l}{v_z}\right)^2. \tag{10}$$

Здесь слева — угол дифракции, справа — отклонение, обусловленное силой, действующей на собственный момент электрона. Неравенство означает, что это отклонение ненаблюдаемо, поскольку дифракция полностью маскирует его (оно стало бы наблюдаемым, если бы собственный магнитный момент электрона был бо́льшим по сравнению с μ_0).

г) *Измерение магнитного поля электрона* [45]. Наконец, магнитное поле, создаваемое электроном, можно было бы попытаться разделить на две части, одна из которых обусловлена движением всех электронов, а другая связана с наличием у них спина. Эти поля по порядку величины (их направление нас не интересует) соответственно равны:

$$H_1 = \frac{e}{r^2} \frac{v}{c}, \qquad H_2 = \frac{\mu_0}{r^3}.$$

Если неопределенность в расстоянии от интересующей нас точки до данного электрона составляет $\Delta r \ll r$, то

$$\Delta H_1 = \frac{e}{r^2} \frac{\Delta v}{c} > \frac{e}{cr^2} \frac{h}{m\Delta r} \gg \frac{eh}{mc} \frac{1}{r^3},$$

и, следовательно,

$$\Delta H_1 \gg H_2.$$

Таким образом, разбить поле на те две части, о которых говорилось выше, невозможно.

Из результатов этого параграфа не следует делать вывод о том, что эффекты, обусловленные наличием у свободных электронов спина, ненаблюдаемы. Они свидетельствуют лишь о том, что обычные понятия классической механики непригодны для описания таких экспериментов и предсказания положительных результатов. Более того, как мы увидим в § 3, поляризацию электронных волн вполне можно измерить.

---

[45] См. прим. 42.

§ 2. Волновое уравнение Дирака

Из сказанного ранее ясно, что удовлетворительная теория спина должна включать в себя квант действия h так, чтобы существование у электрона собственного момента следовало из нее автоматически, не требуя введения дополнительной гипотезы. Дирак [46] построил такую теорию, усовершенствовав или, лучше сказать, искусно преобразовав релятивистское волновое уравнение, которое применяли в случае одной частицы. В отсутствие внешних полей это уравнение представлялось в виде

$$\left(\sum_{\nu=1}^{4} p_\nu^2 + m_0^2c^2\right)\psi = 0,$$

где

$$p_4 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_4} = -ip_0, \quad p_0 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_0} \quad (x_4 = ix_0 = ict), \tag{11}$$

$$p_k = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3)^{47}.$$

В стационарных состояниях

$$\psi = ue^{-\frac{2\pi i}{h}Et}, \quad p_0 = \frac{E}{c}. \tag{12}$$

Во внешнем электромагнитном поле с потенциалом Φ_ν ($\Phi_4 = i\Phi_0$, $\Phi_k = A_k$) уравнение принимает более общий вид

$$\left[\sum_{\nu=1}^{4}\left(p_\nu + \frac{e}{c}\Phi_\nu\right)^2 + m_0^2c^2\right]\psi = 0.$$

Закон сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial s_\nu}{\partial x^\nu} = 0$$

получится, если ввести 4-вектор тока

$$s_\nu = \psi^*\left(p_\nu + \frac{e}{c}\Phi_\nu\right)\psi - \psi\left(p_\nu - \frac{e}{c}\Phi_\nu\right)\psi^*.$$

Плотность заряда связана с его четвертой компонентой

$$\rho = \frac{1}{i}s_4 = \psi^*\left(-p_0 + \frac{e}{c}\Phi_0\right)\psi + \psi\left(p_0 + \frac{e}{c}\Phi_0\right)\psi^*.$$

Это выражение не является положительно-определенным и, кроме того, соответствующие ему матрицы не имеют больше собственного значения, равного 1. Как показал Дирак, эту трудность можно преодолеть, выбрав

---

[46] См. прим. 4.

[47] Здесь и далее латинские индексы принимают значения от 1 до 3, греческие — от 1 до 4. Там, где встречаются два одинаковых индекса, по ним предполагается суммирование.

плотность в виде

$$\rho = \sum_{\zeta} \overset{*}{\psi}_{\zeta} \psi_{\zeta},$$

где ζ — некоторый индекс, что возможно лишь при условии, если волновое уравнение для ψ_{ζ} является уравнением первого порядка относительно $\partial/\partial t$. Релятивистская инвариантность требует, чтобы это уравнение было одновременно и первого порядка по $\partial/\partial x_{\kappa}$.

Рассуждая таким образом, Дирак пришел к уравнению

$$\left(\sum_{\nu} \gamma^{\nu} p_{\nu} - i m_0 c\right) \psi = 0, \tag{13}$$

где γ^{ν} — эрмитовы матрицы, удовлетворяющие соотношениям:

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\delta_{\mu\nu} \begin{cases} \delta_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu, \\ \delta_{\mu\nu} = 1 \text{ при } \mu = \nu. \end{cases} \tag{14}$$

Эти соотношения необходимы для того, чтобы при умножении уравнения (13) слева на $(\gamma^{\mu} p_{\mu} + i m c_0)$ получалось уравнение

$$\left(\sum_{\nu} p_{\nu}^2 + m_0^2 c^2\right) \psi = 0. \tag{15}$$

Соотношения (14) могут выполняться лишь в том случае, если матрицы γ имеют по крайней мере четыре строки и четыре столбца. Поэтому мы будем понимать под γ матрицы четвертого порядка, а под ψ — четыре функции ψ_{ρ} ($\rho = 1, \ldots, 4$). Выражение $\gamma^{\nu}\psi$ будем понимать как сокращенное обозначение суммы

$$\sum_{\sigma} \gamma^{\nu}_{\rho\sigma} \psi_{\sigma} \qquad (\rho = 1, \ldots, 4).$$

Во внешнем поле уравнение (13) несколько усложняется:

$$\left[\gamma^{\nu}\left(p_{\nu} + \frac{e}{c}\Phi_{\nu}\right) - i m_0 c\right] \psi = 0. \tag{16}$$

Если это уравнение умножить слева на $i\gamma^4$, то оно перейдет в уравнение

$$\left[\left(p_0 - \frac{e}{c}\Phi_0\right) + \alpha^k \left(p_k + \frac{e}{c}\Phi_k\right) + \beta m_0 c\right] \psi = 0, \tag{17}$$

где матрицы

$$\alpha^k = i\gamma^4\gamma^k, \qquad \beta = \gamma^4 \tag{18}$$

также эрмитовы и удовлетворяют соотношениям:

$$\alpha^i\alpha^k + \alpha^k\alpha^i = 2\delta_{ik}, \qquad \alpha^k\beta + \beta\alpha^k = 0, \qquad \beta^2 = I. \tag{19}$$

Из уравнения (17) после подстановки выражений для p_0 и p_{κ} из (11) и (12) получаем закон сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_0} + \sum_{k} \frac{\partial s_k}{\partial x_k} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial s_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0, \text{ если } s_4 = i\rho, \tag{20}$$

где

$$\rho = \sum_\sigma \psi_\sigma^* \psi_\sigma, \qquad s_k = \sum_{\rho\sigma} \psi_\rho^* \alpha_{\rho\sigma}^k \psi_\sigma,$$

а ψ_ρ^* означает величину, комплексно-сопряженную с ψ_ρ. Итак, искомое выражение для плотности получено [48].

Остается еще показать, что уравнения (16) и (17) инвариантны относительно преобразований Лоренца, а s_ν преобразуются как компоненты 4-вектора. В действительности так и происходит, но ψ преобразуется довольно сложно. Все упрощается, если взять инфинитезимальные преобразования Лоренца. При бесконечно малом повороте ω вокруг оси x:

$$x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2 - \omega x_3, x_3' = x_3 + \omega x_2,$$

ψ преобразуется по закону

$$\psi' = \psi - \omega \frac{i}{2} (\sigma_1 \psi), \tag{20'}$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{i} \gamma^2 \gamma^3 = \frac{1}{i} \alpha^2 \alpha^3. \tag{21}$$

Матрицы двух других поворотов получаются при циклической перестановке индексов.

При относительном движении вдоль оси x со скоростью v (предполагается, что $k = v/c$ бесконечно мало́)

$$x_1' = x_1 + ikx_4', \qquad x_4' = x_4 - ikx_1$$

и

$$\psi' = \psi - k \frac{1}{2} (\alpha_1 \psi). \tag{22}$$

Остальные инфинитезимальные преобразования Лоренца получаются из только что приведенных нами циклической перестановкой.

Существование спина автоматически следует из теории Дирака. Отношение этой теории к нерелятивистской волновой теории вращающегося электрона станет ясной, если мы выпишем в явном виде матрицы γ^ν, α^k и β. Во многих случаях их особенно удобно выбирать в виде:

$$\beta = \begin{pmatrix} \bar{I} & 0 \\ 0 & \bar{I} \end{pmatrix}, \quad \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}_k \\ \bar{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_k = \frac{1}{i} \alpha^l \alpha^m = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_k & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_k \end{pmatrix}. \tag{23}$$

В выражения для матриц четвертого порядка мы ввели матрицы второго порядка, отметив их чертой сверху; $\bar{\sigma}_k$ — это именно те матрицы, которые используют в нерелятивистской теории вращающегося электрона:

$$\bar{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

[48] Для того чтобы от определенных таким образом плотностей заряда и тока перейти к истинным плотностям, первые необходимо умножить на $-e$.

Они удовлетворяют соотношениям:

$$\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 = -\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1 = i\bar{\sigma}_3,$$
$$\bar{\sigma}_1^2 = \bar{\mathrm{I}}. \tag{25}$$

При сделанном нами выборе β компоненты ψ_3 и ψ_4 по сравнению с ψ_1 и ψ_2 имеют порядок малости v/c. Если ввести различные обозначения для компонент двух типов, объединив ψ_1 и ψ_2 общим символом $\bar{\psi}$, а ψ_3 и ψ_4 — символом $\bar{\varphi}$ (и, кроме того, вместо ψ_3 и ψ_4 писать φ_1 и φ_2), то, положив

$$E = E' + m_0c^2, \qquad p_0 = \frac{E}{c} = \frac{E'}{c} + m_0c,$$

мы получим уравнения (17) (для стационарного состояния) в виде:

$$\begin{gathered} -\frac{E' + e\Phi_0}{c}\,\bar{\psi} + \bar{\sigma}_k\left(p_k + \frac{e}{c}\,\Phi_k\right)\bar{\varphi} = 0, \\ -\frac{2m_0c^2 + E' + e\Phi_0}{c}\,\bar{\varphi} + \bar{\sigma}_k\left(p_k + \frac{e}{c}\,\Phi_k\right)\bar{\psi} = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Поскольку член с m_0 отсутствует именно в первом уравнении и имеется во втором, φ по порядку величины меньше $\bar{\psi}$. Членом $\left[\frac{E' + e\Phi_0}{c}\right]$ во втором из уравнений (26) в первом приближении можно пренебречь. Тогда

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2m_0c}\,\bar{\sigma}_k\left(p_k + \frac{e}{c}\,\Phi_k\right)\bar{\psi}. \tag{26'}$$

Этот результат можно было бы подставить в первое уравнение (26) и получить ряд последовательных приближений. Однако более удобно умножить уравнение (16) слева на $\left[\gamma^\mu\left(p_\mu + \frac{e}{c}\,\Phi_\mu\right)\right]$ [именно так в отсутствие внешнего поля мы пришли к уравнению (15)]; тогда получим

$$\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\left(p_\mu + \frac{e}{c}\,\Phi_\mu\right)\left(p_\nu + \frac{e}{c}\,\Phi_\nu\right) + m_0^2c^2\right]\psi = 0.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, собирая в одну группу члены с $\mu = \nu$, а в другую — члены с $\mu \neq \nu$. Поскольку $(\gamma^\nu)^2 = \mathrm{I}$, первые члены в сумме дают

$$\sum_\nu\left(p_\nu + \frac{e}{c}\Phi_\nu\right)^2\psi;$$

члены с $\mu \neq \nu$ в силу того, что при этом $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$, можно представить в виде

$$\sum_{\mu<\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\left[\left(p_\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu\right)\left(p_\nu + \frac{e}{c}\,\Phi_\nu\right) - \left(p_\nu + \frac{e}{c}\,\Phi_\nu\right)\left(p_\mu + \frac{e}{c}\,\Phi_\mu\right)\right]\psi =$$
$$= \sum_{\mu<\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\,\frac{e}{c}\,\frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^\nu}\right)\psi = \sum_{\mu<\nu}\frac{e}{c}\,\frac{h}{2\pi i}\,\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\psi,$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля. Итак,

$$\left[\left(p_\nu + \frac{e}{c}\Phi_\nu\right)^2 + m_0^2c^2\right]\psi + \sum_{\mu>\nu}\frac{e}{c}\frac{h}{2\pi i}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\psi = 0, \tag{27}$$

или, принимая во внимание соотношения (18), (21) и учитывая смысл компонент $F_{\mu\nu}$,

$$F_{41} = iE_x, \ldots; F_{23} = H_x, \ldots; \tag{27a}$$

$$\left[-\left(\frac{E}{c} - \frac{e}{c}\Phi_0\right)^2 + m_0^2c^2\right]\psi + \sum_k\left(p_k + \frac{e}{c}\Phi_k\right)^2\psi +$$
$$+\frac{e}{c}\frac{h}{2\pi}\left[(\sigma\cdot\mathbf{H}) - i(\alpha\cdot\mathbf{E})\right]\psi = 0.$$

Последние члены в левой части характерны для теории Дирака и отвечают спину. Именно их мы имели в виду, вводя особые обозначения для $\overline{\psi}$ и $\overline{\varphi}$ и ограничивая рассмотрение первым приближением. Если положить

$$\left(\frac{E}{c} - \frac{e}{c}\Phi_0\right)^2 = \left(m_0c + \frac{E' + e\Phi_0}{c}\right)^2 \sim m_0^2c^2 + 2m_0(E' + e\Phi_0),$$

то согласно (23)

$$-(E^* + e\Phi_0)\overline{\psi} + \frac{1}{2m_0}\sum_k\left(p_k + \frac{e}{c}\Phi_k\right)^2\overline{\psi} + \mu_0(\bar{\sigma}_k\overline{H}_k)\overline{\psi} - i\mu_0(\bar{\sigma}_k\overline{E}_k) = 0.$$

Используя для $\overline{\varphi}$ приближенное значение (26) и вводя обозначение

$$v_k = \frac{1}{m_0}(p_k + e\Phi_0), \tag{28}$$

преобразуем последний член этого уравнения с учетом соотношений (25) к виду

$$-i\mu_0\frac{1}{2c}\bar{\sigma}_i\bar{\sigma}_k(E_iv_k)\overline{\psi} =$$
$$= \sum_k\left[-\frac{1}{2}\mu_0\left(E_k\frac{v_k}{c}\right)\right]\overline{\psi} - \frac{1}{2}\mu_0\sum_{i<k}\bar{\sigma}_i\bar{\sigma}_k\left(E_i\frac{v_k}{c} - E_k\frac{v_i}{c}\right)\overline{\psi} =$$
$$= -i\mu_0\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\overline{\psi} + \frac{1}{2}\mu_0\left[\sigma\left(\mathbf{E}\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\right]\overline{\psi}.$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении уравнение в целом можно записать в виде

$$\left\{-(E' + e\Phi_0) + \frac{m_0}{2}v^2 + \mu_0(\sigma\mathbf{H}) + \frac{1}{2}\mu_0\left[\sigma\left(\mathbf{E}\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\right] - \frac{1}{2}\mu_0 i\left(\mathbf{E}\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\right\}\overline{\psi} = 0, \tag{27'}$$

что полностью соответствует функции Гамильтона в нерелятивистской тео-

рии электрона. Третий член имеет смысл энергии спина в магнитном поле, четвертый отвечает движению момента в электрическом поле с томасовским множителем $^1/_2$. Наконец, последний член, отсутствовавший в старых теориях, записан в виде, предложенном Дарвином [49], и особенно важен при вычислении возмущений s-термов, когда $\mathbf{E}$ — кулоновское поле.

В заключение укажем найденное Гордоном [50] интересное преобразование дираковского выражения (21) для тока:

$$S_\mu = \frac{1}{2m_0c}\left\{\psi^*\beta\left(p_\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu\right)\psi - \left(p_\mu - \frac{e}{c}\Phi_\mu\right)\psi^*\beta\psi\right\} + \frac{\mu_0}{e}\frac{\partial\mathfrak{M}_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}, \tag{29}$$

где

$$\mathfrak{M}_{\mu\nu} = -i(\psi^*\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\psi),$$

или

$$\frac{1}{i}\mathfrak{M}_{14} = P_1 = \psi^*\gamma^1\psi = -i(\psi^*\beta\alpha^1\psi),$$

$$\mathfrak{M}_{23} = \mathfrak{M}_1 = (\psi^*\beta\sigma_1\psi).$$

Такому разложению тока на две части формально можно дать следующую интерпретацию: первая часть, напоминающая соответствующее выражение в старой теории, отвечает поступательному движению электрона; вторая часть соответствует спину. Если в первом приближении снова ввести отдельные обозначения для компонент $\overline{\psi}$ и $\overline{\varphi}$ и отбросить члены, содержащие $\overline{\varphi}$, то вторая часть тока сведется к

$$\frac{\mu_0}{e}\operatorname{rot}\mathbf{M}, \quad \text{где} \quad \mathfrak{M}_k = (\overline{\psi}^*\bar{\sigma}_n\overline{\psi}). \tag{30}$$

Как видно из предыдущего параграфа, ни один эксперимент, основанный на классической теории, не может позволить нам измерить эти две части тока в отдельности.

Гордон [51] и Дарвин [52] нашли полное решение уравнения Дирака для электрона в кулоновском поле и получили для уровней энергии зоммерфельдовскую тонкую структуру.

§ 3. Возможность получения поляризованных электронных волн [53]

Термин «поляризация волны» в общем случае означает, что, помимо направления распространения, у волны имеются еще и другие чем-то выделенные направления. Их можно обнаружить, поставив на пути волны

[49] *C. G. Darwin.* Proc. Roy. Soc., 1929, **A124**, 425.
[50] *W. Gordon.* Z. Phys., 1928, **50**, 630.
[51] *W. Gordon.* Z. Phys., 1928, 48, 11.
[52] См. прим. 49.
[53] Полное изложение вопроса имеется у Фюса и Хеллмана (*E. Fues, H. Hellmann.* Phys. Z., 1930, 31, 465). Старая работа Ланде (*A. Landé.* Naturwissenschaften, 1929, **17**, 634) в некоторых существенных пунктах нуждается в дополнениях и исправлениях.

надлежащим образом подобранные препятствия. Именно так и обстоит дело с волнами, отвечающими свободным электронам: существенным элементом в их структуре является направление спина (скорость электронов не очень велика, направление спина почти совпадает с направлением вектора **M**). Тем не менее необходимо подчеркнуть фундаментальное различие между электронными и световыми волнами. В световых волнах выделенные *плоскости*, проходящие через направление их распространения и два ортогональных ему направления, всегда эквивалентны. В электронных волнах выделено лишь *одно направление*, ничем не связанное с направлением распространения. Никакой эквивалентности между выделенным направлением и каким-либо другим в этом случае уже нет. Таким образом, можно было бы с полным основанием говорить о круговой поляризации электронных волн, поскольку в отличие от световых волн ось поляризации у них может составлять любой угол с направлением их распространения.

Отсюда ясно, что для создания такого рода поляризации и обнаружения ее недостаточно изменить с помощью какого-нибудь препятствия направление распространения; необходимо, чтобы это препятствие оказывало воздействие на собственный момент электрона. Согласно теории относительности, такое воздействие на движущийся электрон оказывает неоднородное электрическое поле, например поле атомного ядра. Мотт [54] вычислил поляризацию, возникающую при прохождении электронов вблизи ядра. Рассмотрим рассеяние электронной волны на атоме, обладающем некоторой структурой (поляризаторе), и с помощью щели выделим рассеянный луч, направление которого составляет угол ϑ_1 с направлением распространения падающей волны. Пусть этот вторичный луч падает на атом-анализатор, обладающий той же структурой, что и первый атом, и при этом происходит рассеяние на угол ϑ_2. Интенсивность третичного луча зависит еще и от того, какой азимут φ он образует со вторичным лучом. Если азимут отсчитывать от плоскости, проходящей через первичный и вторичный лучи (в зависимости от того, каков угол между плоскостью, проходящей через первичный и вторичный лучи, и плоскостью, проходящей через вторичный и третичный лучи,— острый или тупой,— угол φ принимает два значения; либо 0, либо π), то интенсивность третичного луча при фиксированных ϑ_1 и ϑ_2 определяется формулой

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 (1 + \delta \cos \varphi). \qquad (31)$$

Поляризационный множитель δ зависит от ϑ_1 и ϑ_2; его значение и знак могут изменяться в зависимости от природы атомов, на которых происходит рассеяние. При малых значениях скорости v электронов множитель δ будет порядка $(v/c)^2$. При отражении от плоскости, состоящей из большого числа атомов, аддитивность эффектов будет наблюдаться лишь в том случае, если атомы распределены беспорядочно, а создаваемые ими поля не перекрываются. Ланде [55] показал, что между рассматриваемым случаем

[54] См. прим. 42.
[55] См. ссылку в прим. 53.

и оптикой имеется различие, состоящее в том, что для световых волн в силу указанных выше условий симметрии вариация интенсивности третичного луча как функция φ может содержать лишь член с $\cos^2 \varphi$.

Хотя исследования Чейза [56], посвященные экспериментальной проверке предсказываемого эффекта, еще не завершены, Руппу [57] удалось подтвердить правильность формулы (31). Свои наблюдения ему пришлось проводить при весьма малых углах рассеяния, что не позволяет сравнивать вариацию δ в зависимости от ϑ_1 и ϑ_2 с теорией Мотта, в которой рассматривается действие одного лишь ядра. Весьма желательно, с одной стороны, распространить теорию на случай произвольных атомов, а с другой — произвести измерения при больших углах рассеяния.

Мотт [58] показал, что существует еще одна возможность создания и наблюдения электронных волн, которая до сих пор не стала объектом экспериментальной проверки. Речь идет о рассеянии электронов на *ориентированных* атомах. Оно не затрагивает непосредственно электронного момента, а зависит скорее от возможности обмена между падающими электронами и электронами, находящимися в атоме. В качестве анализатора можно использовать второй ориентированный атом. При заданных значениях углов рассеяния вторичного и третичного лучей ϑ_1 и ϑ_2 интенсивность $\mathcal{J}$ третичного луча в зависимости от угла χ между осями обоих атомов изменяется по формуле

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 (1 + k \cos \chi), \qquad (32)$$

аналогичной формуле (31). Ориентированные атомы, на которых происходит рассеяние, можно получить, например, с помощью метода Штерна — Герлаха. Вместо ориентированных атомов можно было бы воспользоваться пластинками намагниченного железа; однако при этом потребовалось бы более подробно обсудить существенное влияние силы Лоренца. Фюс и Хеллман [59] указали, что электронам, выбитым из намагниченного металла, в результате фотоэлектрического эффекта или действия сильного электрического поля должна соответствовать поляризованная волна.

§ 4. Состояния с отрицательной энергией и трудности теории Дирака

В классической релятивистской механике из уравнения

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2,$$

связывающего энергию и импульс свободной частицы, следует, что энергия как функция импульса может принимать два значения, равных по величине и противоположных по знаку. По этой причине в релятивистской

---

[56] *C. T. Chase.* Phys. Rev., 1929, 34, 1069.
[57] *E. Rupp.* Naturwissenschaften, 1930, 18, 207; Z. Phys., 1930, 61, 158.
[58] *N. F. Mott.* Proc. Roy. Soc., 1929, A125, 222.
[59] См. ссылку в прим. 53.

квантовой механике, а также в теории Дирака возникают решения волнового уравнения, отвечающие отрицательным энергиям. Такие решения проще всего можно получить, если воспользоваться матрицей

$$\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \tag{33}$$

эрмитовой и удовлетворяющей вместе с четырьмя матрицами соотношениям

$$\gamma^5\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^5 = 0 \tag{34}$$

и условию $(\gamma^5)^2 = I$. Из уравнения (16) тотчас же следует, что функция

$$\psi_\rho(-x, -y, -z, E) = \sum_\sigma \gamma^5_{\rho\sigma}\psi_\sigma(x, y, z, E) \tag{35}$$

в отсутствие поля отвечает энергии $-E$, если ψ принадлежит энергии E. Таким образом, спектр собственных значений энергии для свободного электрона состоит из положительной части $m_0c^2 \leqslant E < \infty$ и отрицательной части $-\infty < E \leqslant m_0c^2$. Обобщая, можно сказать, что полю, создаваемому потенциалами $\Phi_\nu(x, y, z)$, для ψ' отвечает поле, создаваемое потенциалами

$$\Phi'_\nu(x, y, z) = -\Phi_\nu(-x, -y, -z). \tag{36}$$

В частности, если рассматривается радиальное электростатическое кулоновское поле притяжения (предполагается, что магнитное поле отсутствует), то потенциал Φ_0 инвариантен относительно вращений вокруг начала координат, а ψ' отвечает радиальное поле отталкивания. Можно было бы сказать, что ψ' соответствует изменению знака заряда у электрона, но я предпочитаю избегать подобных выражений. В случае атома водорода из теории следовало бы существование, наряду с обычным спектром собственных значений, состоящим из дискретной и непрерывной частей, еще одного непрерывного спектра собственных значений, заполняющих отрезок оси от $E = -m_0c^2$ до $E = -\infty$.

Состояния с отрицательной энергией не имеют никакого физического смысла, по крайней мере в отсутствие внешних полей. Однако, в отличие от классической релятивистской механики, исключить состояния с отрицательной энергией для свободных электронов в квантовой теории Дирака в общем случае невозможно. Это было бы возможно лишь в том случае, если бы все матричные элементы потенциалов и компонент тока, отвечающие комбинации двух стационарных решений уравнений с энергиями противоположных знаков, были равны нулю. В действительности дело обстоит не так, и, следовательно, из существующей ныне теории с необходимостью следуют переходы из одного состояния в другое, обладающее энергией противоположного знака.

Интересный пример, иллюстрирующий те трудности, к которым приводит существующая теория, привел Клейн [60]. Пусть электроны движутся

---

[60] *O. Klein*. Z. Phys., 1929, 53, 157.

в направлении $+x$ и падают на стенку, перпендикулярную этому направлению. Электрический потенциал стенки — $e\Phi_0$ скачком изменяется от значения 0 до значения P ($\Phi_0 = 0$ при $x < 0$, $\Phi_0 = -P/e$ при $x > 0$). Часть электронной волны отражается от этой стенки, часть — проходит через нее. Рассмотрим фазы падающей, отраженной и прошедшей волн:

$$\exp\left[-\frac{2\pi i}{h}(Et - px)\right], \qquad \exp\left[-\frac{2\pi i}{h}(E't - px)\right]$$

и

$$\exp\left[-\frac{2\pi i}{h}(Et - \bar{p}x)\right].$$

Отсюда непосредственно видно, что при вещественных $\bar{p}$ происходит обычное, а при мнимых — полное отражение. Величины p и $\bar{p}$ связаны с E соотношениями:

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2c^2 + p^2, \qquad \left(\frac{E-P}{c}\right)^2 = m_0^2c^2 + \bar{p}^2.$$

Их можно вывести, например, из уравнений второго порядка (27) (члены, содержащие спин, выпадают, поскольку потенциалы постоянны в пространстве). Итак, при заданном значении $E > m_0c^2$:

при $0 < P < E - m_0c^2$	величина $\bar{p}$ вещественна,
при $E - m_0c^2 < P < E + m_0c^2$	величина $\bar{p}$ мнима,
при $E + m_0c^2 < P$	величина $\bar{p}$ вещественна.

Два первых результата согласуются с классической релятивистской механикой. Последний результат означает, что при достаточно большом изменении потенциала электроны могут совершать еще один переход через стенку, приобретая при этом отрицательную кинетическую энергию. С физической точки зрения такой результат следует считать неприемлемым. Правда, доля прошедших электронов становится значительной лишь при условии, если изменение потенциала происходит на расстоянии, малом по сравнению с длиной волны падающих электронов. Можно спросить: имеем ли мы право в случае столь сильных полей по-прежнему пользоваться понятием потенциала и не предпочтительнее ли в этом случае вводить в явном виде сами частицы, обусловливающие эти поля?

Трудности теории Дирака, связанные с существованием состояний с отрицательной энергией, еще более отчетливо выступают при рассмотрении взаимодействия между электронами и электромагнитным излучением. Изучение этой проблемы увело бы нас далеко за рамки нашего доклада. Мы не можем также обсудить и попытку преодоления трудностей, предпринятую недавно Дираком [61]. Окончательного решения проблемы ему, по-видимому, достичь не удалось.

---

[61] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc., 1930, A126, 360.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ *

В статье под таким названием П. Эренфест [1] поставил на обсуждение ряд вопросов. Поскольку я, работая над обзорной статьей, столкнулся с совершенно аналогичными вопросами, мне хотелось бы по этому поводу сделать несколько замечаний. Они не претендуют ни на новизну, ни на окончательное решение поставленных вопросов. Они предназначаются лишь для того, чтобы рассеять созданную Эренфестом видимость «хорошего тона», требующего объявлять эти вопросы «лишенными смысла», а также для того, чтобы указать на связь этих вопросов с еще не решенными проблемами релятивистской квантовой теории (состояния с отрицательной энергией, собственная энергия электрона). При этом я ограничусь вопросами, рассмотренными в статье Эренфеста в разделах A, B и в последующих замечаниях, а содержащиеся в разделе C более математические вопросы, касающиеся теории групп, оставлю в стороне, чувствуя себя недостаточно компетентным в них.

§ 1. О роли мнимой единицы и о понятии пространственной плотности вероятности

Мы начнем с того, что, исходя из представления о (символических, т. е. непосредственно ненаблюдаемых) волнах в четырехмерном пространственно-временно́м континууме, попытаемся для случая одной частицы, сначала в отсутствие внешних силовых полей, сформулировать последовательность гипотез, каждая из которых будет более широкой, чем ей предшествующая. Однако наши намерения при этом заключаются не в том, чтобы получить полную аксиоматику волновой механики, а в том, чтобы главным образом подчеркнуть особую роль понятия пространственной плотности вероятности, которое, по-моему, неправомерно считают обычно само собой разумеющимся. Это понятие оказывается решающим для рассматриваемого в § 2 вопроса об аналогии между светом и веществом и о ее границах, и оно также позволяет лучше всего понять причину появления мнимой единицы в уравнении Шредингера [2].

---

* *Einige die Quantenmechanik betreffenden Erkundigungsfragen.*— Z. Phys., 1933, 80, 573—586.

[1] *P. Ehrenfest.* Z. Phys., 1932, 78, 555.

[2] В матричной механике Гейзенберга, Борна и Иордана появление мнимой единицы *формально* обосновывалось *законом умножения матриц* вместе с комбинационным принципом для частот в спектре излучаемого света.

I.1. Дано волновое поле с принципом суперпозиции, описываемое пока еще не определенным числом компонент $\psi_1, \psi_2, \ldots$ Если возможны поля $\psi_\rho^{(1)}(\mathbf{x}, t)$, $\psi_\rho^{(2)}(\mathbf{x}, t)$, то комбинация $c_1\psi_\rho^{(1)}(\mathbf{x}, t) + c_2\psi_\rho^{(2)}(\mathbf{x}, t)$ с произвольными (не содержащими индекса ρ) постоянными c_1, c_2 также будет возможным полем.

I.2. При фурье-разложении $\psi_\rho(\mathbf{x}, t)$ (в сумму или интеграл) получается

$$\psi_\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_k \{a_\rho(\mathbf{k})\, e^{i(\mathbf{kx}-\nu t)} + b\rho(\mathbf{k})\, e^{-i(\mathbf{kx}-\nu t)}\} \qquad \text{(I)}$$

(или $\int\limits_k dk$ вместо Σ), причем положительная величина ν есть функция $|k|$; величины ν и $\mathbf{k}$ связаны с механическими величинами — энергией и импульсом — фундаментальными соотношениями

$$E = \hbar\nu, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

($\hbar$ — деленный на 2π квант действия, ν — круговая частота). Поэтому ν и $\mathbf{k}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\nu = \frac{\hbar}{2m}|k|^2 \quad \text{— для нерелятивистских материальных точек;}$$

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2} + |k|^2 \quad \text{— для релятивистских материальных точек;}$$

$$\frac{\nu^2}{c^2} = |k|^2 \quad \text{— для фотона.}$$

Для каждого волнового вектора $\mathbf{k}$ должна в действительности существовать плоская волна. Однако, *какие соотношения связывают величины* (в общем случае комплексные) $a_\rho(\mathbf{k})$, $b_\rho(\mathbf{k})$ *в волне наиболее общего вида, принадлежащей данному* $\mathbf{k}$, об этом здесь пока еще не делалось никаких предположений. Например, можно было бы положить $b_\rho(\mathbf{k}) = 0$ или же $b_\rho(\mathbf{k}) = a_\rho^*(\mathbf{k})$, т. е. считать функции ψ_ρ вещественными.

I.3. Абсолютные величины $|a_\rho(\mathbf{k})|$ и $|b_\rho(\mathbf{k})|$ коэффициентов a_ρ и b_ρ должны быть измеримыми величинами и сумма $|a_\rho(\mathbf{k})|^2 + |b_\rho(\mathbf{k})|^2$ с точностью до нормировочного множителя, возможно, зависящего от $|\mathbf{k}|$, должна быть пропорциональна вероятности найти импульс частицы (деленный на h) в области $\mathbf{k}$, $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$.

Отсюда уже вытекают некоторые следствия и прежде всего возможность предельного перехода к геометрической оптике (классической механике), где можно пренебрегать расплыванием волновых пакетов. Действительно, это можно делать, если линейные размеры волновых пакетов велики по сравнению с обратной величиной «среднего» $|\mathbf{k}|$. Далее отсюда следует, что групповая скорость есть

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\nu}{\partial\mathbf{k}}.$$

Наконец, отсюда вытекает, что соотношения неопределенности

$$\Delta\mathbf{x}\cdot\Delta\mathbf{k} \sim 1, \qquad \Delta t\cdot\Delta\nu \sim 1,$$

а значит, и

$$\Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{p} \sim \hbar, \qquad \Delta t \cdot \Delta E \sim \hbar,$$

являются правильными по порядку величины. (Протяженность пакета здесь еще нельзя определить *количественно*, но это не имеет значения.)

До сих пор поле волн материи можно было считать аналогичным максвелловскому, и вещественное скалярное поле также еще не противоречит сделанным предположениям. Теперь следует *новая* группа предположений.

II.1. Понятие вероятности $W(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3$ найти частицу в точно определенное время t в бесконечно малом элементе объема $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ всегда имеет смысл. Тогда, во-первых, вероятность $W(\mathbf{x})$ должна быть существенно положительной

$$W(\mathbf{x}, t) \geqslant 0. \tag{1}$$

Во-вторых, должно выполняться условие

$$\int W(\mathbf{x}, t)\, dx_1 dx_2 dx_3 = 1, \tag{2}$$

и этот интеграл, следовательно, не должен зависеть от времени t.

Здесь надо особо подчеркнуть, что это предположение о существовании $W(\mathbf{x}, t)$ не является очевидным и не может быть получено из принципа дополнительности, выражением которого служат соотношения неопределенности (группа предположений I). Ибо здесь речь идет об определении положения частицы также *вне пределов применимости классической механики*, т. е. в областях пространства и времени, размеры которых малы по сравнению со средней длиной волны или периодом колебаний рассматриваемого волнового пакета. Правда, существование $W(\mathbf{x}, t)$ становится очевидным, как только будет показано следующее.

II.1′. Всегда существуют эксперименты, из которых с достоверностью можно заключить, находится частица в момент времени t в элементе объема $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ или нет (такие, что в первом случае одновременное прямое действие частицы в некотором другом месте исключается). Если подобные эксперименты существуют не всегда, то можно сомневаться в существовании вероятности $W(\mathbf{x}, t)$. Позднее я вернусь к этим сомнениям.

Теперь перехожу к поставленному вначале вопросу о необходимости по меньшей мере *двух* вещественных скаляров для волн де Бройля — Шредингера. Я утверждаю, что эта необходимость и вместе с ней мнимая единица появляются *при отыскании для плотности вероятности W выражения, удовлетворяющего требованиям* (1) *и* (2) *и не содержащего производных* ψ *по времени*. Последнее требование необходимо для однозначности понятия «число используемых скаляров». Ведь один вещественный скаляр, удовлетворяющий дифференциальному уравнению второго порядка по t, равносилен двум вещественным скалярам, удовлетворяющим дифференциальным уравнениям первого порядка (тогда можно положить $\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \psi_2$). Обратное утверждение также справедливо, как будет сейчас разъяснено. Итак, мы формулируем аксиому.

II.2. Если для определенного момента времени t_0 известны величины ψ_ρ (x, t) как функции x, то вероятность W для этого момента времени t_0 должна выражаться только через ψ_ρ (x, t_0) и притом, в качестве простейшей возможности. W должна быть квадратичной или билинейной функцией величин ψ_ρ (x, t).

Пояснение. Билинейный оператор W(x, t) сопоставляет двум комбинациям функций $\psi_\rho^{(1)}$ (x) и $\psi_\rho^{(2)}$ (x) одну функцию x, t таким образом, что

$$W(\mathbf{x}, t)\{f_\rho(\mathbf{x}'),\quad c_1 g_\rho^{(1)}(\mathbf{x}'') + c_2 g_\rho^{(2)}(\mathbf{x}'')\} = c_1 W(\mathbf{x}, t)\{f_\rho(\mathbf{x}'),\quad g_\rho^{(1)}(\mathbf{x}'')\} + c_2 W(\mathbf{x}, t)\{f_\rho(\mathbf{x}'),\quad g_\rho^{(2)}(\mathbf{x}'')\}$$

и

$$W(\mathbf{x}, t)\{c_1 f_\rho^{(1)}(\mathbf{x}') + c_2 f_\rho^{(2)}(\mathbf{x}'),\quad g_\rho(\mathbf{x}'')\} = c_1 W(\mathbf{x}, t)\{f_\rho^{(1)}(\mathbf{x}'),\quad g_\rho(\mathbf{x}'')\} + c_2 W(\mathbf{x}, t)\{f_\rho^{(2)}(\mathbf{x}'),\ g_\rho(\mathbf{x}'')\}.$$

Если оператор локальный, то он должен иметь вид квадратичной формы от ψ_ρ и конечного числа пространственных производных; если оператор нелокальный, то он может иметь вид

$$\sum_{\rho,\,\sigma}\iint a_{\rho\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'')\,\psi_\rho(\mathbf{x}', t)\,\psi_\sigma(\mathbf{x}'', t)\,d\mathbf{x}'d\mathbf{x}''.$$

Конечно, априори могло бы оказаться, что надо переходить к формам четвертого или более высокого порядка; но опыт показывает, что достаточно квадратичных форм.

Теперь надо различать релятивистский и нерелятивистский случаи. Рассмотрим сначала последний. В случае свободной частицы видно сразу: для данного k из вещественной части одной волны вида (I) и ее пространственных производных никакого квадратичного по амплитудам выражения, имеющего постоянный во времени интеграл по объему, составить нельзя, так как производная по времени от квадратичного выражения под интегралом может принимать любое заданное значение. В частности, если ψ будет той частью выражения (I), которая содержит только a_ρ, а ψ^* — частью (I), содержащей только b_ρ, то интегралы

$$\int \psi^2 dV \quad \text{и} \quad \int \psi^{*2} dV$$

будут переменными во времени; постоянным же будет только интеграл

$$\int \psi\psi^* dV.$$

Определенные этим способом ψ и ψ^* удовлетворяют дифференциальным уравнениям первого порядка [3]:

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \qquad \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = (\hat{H}\psi)^*, \qquad \hat{H} = E_0 - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

и, следовательно,

$$W(\mathbf{x}, t) = \psi^*\psi. \tag{II}$$

---

[3] $E_0\ (= m_0c^2)$ можно по желанию сохранять или опускать.



НИЛЬС БОР и В. ПАУЛИ
(Брюссель, 1948 г.)

Не только в случае свободной частицы, но и вообще тогда, когда оператор $\hat{H}$ веществен и не зависит от времени явно, существует другая возможность: ввести один *вещественный* скаляр U, удовлетворяющий дифференциальному уравнению второго порядка по t, так что ψ и ψ^* выражаются через единый вещественный «потенциал» и его первую производную $\partial U/\partial t$ (при данном t выбираемую произвольно). Имеем

$$\psi = \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}\right)U, \text{ а значит,}$$

$$\psi^* = \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}\right)U, \qquad (3)$$

и для вещественного потенциала U — дифференциальное уравнение

$$\left\{-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\hat{H})^2\right\}U = 0, \qquad \text{(III)}$$

и, следовательно, в случае свободной частицы

$$-\hbar^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left[E_0^2 - 2E_0\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\Delta\Delta\right]U = 0.$$

Из самого общего вещественного решения уравнения (III) мы получаем наиболее общее комплексное решение уравнения (II). Плотность W имеет вид

$$W(\mathbf{x}, t) = \hbar^2 \left(\frac{\partial U}{dt}\right)^2 + (\hat{H}U)^2. \tag{4}$$

Ее постоянство во времени вытекает также непосредственно из (III), если только $\hat{H}$ — вещественный самосопряженный оператор, не содержащий времени явно. Если оператор $\hat{H}$ эрмитов, но не веществен, то потенциал U тоже не будет вещественным. В физическом содержании теории введение U ничего не меняет; усложняются лишь формулы. Это находит отражение не только в теории преобразований, но и *при соединении двух независимых систем в одну общую систему*. Вместо простого *закона умножения* $\psi = \psi_1 \cdot \psi_2$ при введении U получается существенно более сложный закон.

В *релятивистском случае* необходимо удовлетворить еще одному требованию.

II.3. Для W существует такой вектор тока $\mathbf{J}$, что выполняется уравнение непрерывности

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$$

и величины ($\mathbf{J}/c$, iW) образуют 4-вектор.

Тогда в отсутствие внешних сил как (в основном) единственная возможность получается уравнение Дирака. В частности, введение величин с *двузначными* представлениями группы Лоренца становится недопустимым, так как наряду с II.3 должно выполняться также условие (I), требующее, чтобы вероятность W была существенно положительной. Проще всего это получается из первоначальной аргументации Дирака, и потому мы не будем здесь останавливаться на этом.

§ 2. Вопросы аналогии между фотонами и электронами и ее границы

Здесь прежде всего необходимо аккуратно ввести отсутствующее в статье Эренфеста различие между двумя разными видами полей. Мы будем различать *макрополя*, описывающие *большое* и при некоторых условиях *неопределенное число* частиц (для этих полей мы введем обозначение Ψ_ρ в случае материальных частиц, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — в случае фотонов), с одной стороны, и *микрополя*, сопоставленные *одной* частице (и обозначаемые ψ_ρ в случае материальных частиц и $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ — в случае фотона) — с другой. Непосредственное измерение самих микрополей принципиально невозможно, и самое большее, что можно сделать,— это измерить плотности вероятности, квадратичные по этим полям или их фурье-компонентам. Макрополя в квантовой теории характеризуются q-числами (операторами или матрицами), введенными для материальных частиц Клейном, Иорда-

ном и Вигнером; в случае фотонов эти числа с известной точностью, ограниченной конечностью кванта действия, можно рассматривать как классически измеряемые напряженности электромагнитного поля. Аналогию вообще можно проводить только между микрополями и между макрополями [хотя как микрополе (e, h), так и макрополе (E, H) в отсутствие зарядов удовлетворяют уравнениям Максвелла [4]]. Но даже обе эти правильные сами по себе аналогии имеют свои границы, которые мы теперь и обсудим.

1. *Границы аналогии между полями* (e, h) *и* ψ_ρ. Рассмотрим уравнения Максвелла в вакууме (отсутствие зарядов) для поля фотона (e, h), с одной стороны, и уравнение Дирака для свободной материальной частицы — с другой. Микрополе (e, h) пусть будет вещественным, поле ψ_ρ, если угодно, сначала тоже можно считать вещественным [5]. Тогда мы встречаемся прежде всего с уже отмеченным Эренфестом различием:

а) *Для фотона не существует четырехмерного вектора тока, удовлетворяющего уравнению непрерывности и имеющего положительно-определенную плотность* (предположения II.2 и II.3 не могут выполняться одновременно). Отсюда мы приходим к выводу, что для поля фотонов за пределами применимости геометрической (лучевой) оптики в случае немонохроматического поля понятие локальной пространственно-временной плотности частиц W (x, t) лишено смысла. Я считаю этот вывод окончательным и разделяю целиком и полностью высказанное Эренфестом в замечании В.3 мнение, что «все виртуозные статьи на тему об аналогиях между уравнениями Максвелла, с одной стороны, и уравнениями Дирака — с другой, не дали абсолютно ничего». Можно даже сказать: эти статьи дали нечто, прямо противоположное намерениям их авторов, именно то, что рассматриваемое различие нельзя устранить никакими самыми общими математическими формальными приемами. Несуществование удовлетворяющей предположению II плотности W как раз и позволяет в случае электромагнитного поля обойтись *однозначными* представлениями группы Лоренца (без спиноров). Физическое различие снова непосредственно отражается в (также никаким способом неустранимом) математическом различии между полевыми величинами, преобразуемыми по *однозначным* представлениям группы Лоренца, и величинами, преобразуемыми по ее *двузначным* представлениям.

Полагаю, что теперь я могу также ответить на дидактический вопрос, как надо рассматривать в квантовой механике аналогии между фотоном и электроном. Аналогии касаются тех свойств микрополей фотона и электрона, которые *следуют уже из предположений* I и для которых не требуется точного определения понятий плотности частиц в пространственно-временных областях, размеры которых сравнимы с длиной волны или пе-

---

[4] Недавняя попытка Л. де Бройля (C. R., 1932, 195, 536, 862) отказаться от уравнений Максвелла для поля (e, h) не представляется мне удачной, несмотря на возникающие из нее физические следствия.

[5] Следует учесть, что для свободной частицы при соответствующем выборе матриц α^i, β уравнения Дирака имеют вещественные решения для ψ_ρ.

риодом колебаний (например, траектория γ-лучей в камере Вильсона = = геометрическо-оптический путь светового кванта).

Отсутствие точного понятия плотности вероятности для фотона (дело не в том, что Ландау и Пайерлс не смогли найти правильного выражения для этой плотности, но в том, что правильного выражения для нее *не существует*) приводит к следствию: *исчезновение поля* (e, h) *в данной точке пространства-времени не имеет прямого физического смысла* в противоположность исчезновению поля ψ_ρ в пространственно-временнóй точке.

Добавим еще одно замечание о полях *монохроматического* излучения. В таких полях усредненные по времени (большому по сравнению с периодом колебаний) любые квадратичные функции полей e и h, как пространственные функции являются точно измеримыми. В областях, малых по сравнению с длиной волны, обычно применяемые приборы [6] определяют в интерференционных полях не $\overline{|e^2|} + \overline{|h^2|}$, а $\overline{|e^2|}$, что, как известно, доказывается опытами со стоячими световыми волнами. Важно то, что «$|e^2|$-приборы» и «$|h^2|$-приборы» измеряют разные пространственные функции.

б) Перейдем теперь ко *второму* отличию поля (e, h) от поля ψ_ρ, затронутому Эренфестом в замечании B.1 и связанному с единственно возможным при теперешнем состоянии наших знаний рассмотрением «состояний отрицательной энергии». Это рассмотрение для электрона и фотона различно. *Вещественные* решения уравнений Максвелла для поля (e, h) обладают тем свойством, что плотность энергии $\rho = {}^1/_2 (|\mathbf{e}|^2 + |\mathbf{h}|^2)$, (объемный интеграл от которой постоянен во времени) в заданной точке пространства не постоянна во времени, а осциллирует с частотой 2ν, где ν — частота самого поля. Значит, в теории, построенной таким образом, чтобы точное пространственно-временнóе распределение ρ и вместе с тем указанные осцилляции были наблюдаемыми [7], эти вещественные решения не описывают *стационарных* состояний. Если мы захотим найти для уравнений поля такие решения, которым соответствует в *точности* постоянная во времени плотность ρ в каждой пространственной точке, то придется *видоизменить поле* (e, h) *и выражение для* ρ. Наша теория испускания и поглощения света построена так, что для фотона с данной частотой и данным направлением распространения зависимость волновых функций от времени описывается комплексным множителем $e^{i\nu t}$ и что, кроме того, разрешается использовать только *ту* часть поля (e, h), фурье-разложение которой содержит множитель $e^{-i\nu t}$ лишь с *положительными* ν. *Эту* часть e обозначают f, другую же — f*. Тогда оказывается, что наряду с

$$\mathbf{e} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^*$$

---

[6] Фотоэлементы, фотопластинки.

[7] Обратим внимание, что осцилляций *самих* полей (e, h) или ψ_ρ просто не существует!

выполняется также равенство

$$\mathbf{h} = -\frac{i}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{rot}(\mathfrak{f} - \mathfrak{f}^*).$$

Часть поля (**e**, **h**), которая имеет зависимость от времени $e^{+i\nu t}$ ($\nu > 0$), давала бы испускание света в основном состоянии и поглощение света в возбужденном состоянии (фотоны с отрицательной энергией). Далее, $\frac{1}{2}(|e|^2 + |h|^2)$ следует заменить выражением

$$\rho = 2\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*$$

для стационарного состояния, уже не содержащим членов, зависящих от времени. Упомянутое свойство теории взаимодействия света и вещества является весьма общим, поскольку оно не вытекает из специального выбора оператора Гамильтона, а следует уже из требования, чтобы волновая функция полной системы в первом приближении вырождалась в произведение сомножителей, относящихся только к веществу или только к электромагнитному полю. (Важность этого требования уже была подчеркнута в § 1.)

[Между прочим, следует заметить, что аналогичное разложение макрополя (**E**, **H**) (q-числа) на **F** и **F*** необходимо в тех случаях, когда мы хотим отбросить нулевую энергию излучения.]

Теперь выявляется отличие от материального поля:

«Фотоны с отрицательной энергией» отсутствуют и при взаимодействии с веществом, тогда как в случае материального поля переходы из «состояний с положительной энергией» в «состояния с отрицательной энергией», как известно, исключить нельзя.

Величины $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{f}^*$ с необходимостью привносят в теорию нелокальный оператор $\sqrt{-\Delta}$ или $1/\sqrt{-\Delta}$; он появляется не только в случае зависимости этих величин от времени, но и (в отсутствие зарядов, изменяющих их зависимость от времени) вследствие их прямо-таки *необходимых* свойств при преобразованиях Лоренца. Здесь надо особо подчеркнуть, что для волн Дирака дополнительное требование применять только поля с состояниями с положительной энергией (Шредингер) также ввело бы в теорию *нелокальный* оператор, аналогичный $\sqrt{-\Delta}$ (а именно $\sqrt{mc^2 + \Delta}$). *Такие нелокальные операторы, вообще* не очень-то естественные, характерны для исключения состояний с отрицательной энергией.

Здесь мы встречаемся с нерешенной проблемой, как разумно поступить с «состояниями с отрицательной энергией». Всегда ли следовать утверждению: стационарному состоянию обязательно соответствует решение с зависимостью от времени вида $e^{-i\nu t}$? Это, конечно, зависит от того, как можно описывать взаимодействие между светом и веществом.

Еще важнее вопрос: сохранится ли в будущей теории поля материи, которая позволит избежать трудностей с состояниями с отрицательной энергией, понятие плотности вероятности W? Автор предполагает, что такая будущая теория приведет к существенному видоизменению понятия пространства-времени (а не только понятия поля) в областях размером

$\hbar/mc$ и соответственно $\hbar/mc^2$. Увеличатся или уменьшатся в такой теории рассмотренные здесь различия между фотонами или электронами? Этот вопрос приходится оставить открытым.

Перейдем теперь к более легкому вопросу.

2. *Различия между полями* Ψ_ρ *и* (**E**, **H**). Поле (**E**, **H**) обладает тем свойством, что в предельном случае больших чисел световых квантов оно переходит в классически измеримое поле, т. е. в нем тогда можно измерить с относительно очень высокой точностью не только амплитуды, но и фазы. Но при этом важным и решающим является следующее. *Всякое измерение* **E** *или* **H** *за конечный промежуток времени связано с неопределенным изменением числа имеющихся квантов*. Это видно из того, что для измерения фазы **E** или **H** необходимо применять силу Лоренца. Используемое пробное заряженное тело при ускорении в измеряемом поле будет излучать и (в зависимости от фазы измеряемого поля) испускать или поглощать энергию, а значит изменять число квантов света. (После измерения в течение времени T средняя частота рассеянных квантов при этом будет $\nu \sim 1/T$.) Это не случайность процесса измерения, а следствие из формального аппарата: число световых квантов N не коммутирует с **E** или **H**, и потому экспериментальные устройства для измерения этих величин взаимно исключают друг друга (дополнительность, как для p и q).

Но поле Ψ_ρ подчиняется не статистике Бозе, а статистике Ферми, и уже одно это не позволяет измерять его как классическое поле. Ведь собственные функции Ψ_ρ (x) тогда будут состоять не из совокупности всех непрерывных функций, а из значительно меньшей совокупности некоторых ступенчатых функций. Поэтому Ψ_ρ не является в данном случае полем в обычном смысле слова. С другой стороны, представим себе элементарные частицы, подчиняющиеся статистике Бозе, например α-частицы, и предположим, что они хотя и взаимодействуют друг с другом и с внешними полями излучения, но при этом не разрушаются, так что можно отвлечься от влияния их структуры и считать их элементарными частицами. Тогда, согласно Пайерлсу [8], справедливо следующее утверждение. В совокупности тождественных частиц, даже подчиняющихся статистике Бозе, Ψ_ρ-поле *принципиально неизмеримо, пока в нем не произойдут процессы, при которых изменяется общее число частиц*. Тогда в функцию Гамильтона будут входить только матричные элементы $\Psi_\rho^*\Psi_\sigma$ или $\Psi_\rho^* \frac{\partial}{\partial x} \Psi_\sigma$ (эти величины коммутируют с общим числом частиц). Выбор фаз Ψ_ρ и, следовательно, пространственной зависимости вещественной и мнимой частей оказывается несущественным. *Отсутствие таких процессов* (о процессах рассеяния мы не знаем ничего) *связано с отсутствием аналога силы Лоренца в поле материи*.

[8] Это замечание Пайерлса, взятое из его неопубликованного диссертационного доклада об аналогии между светом и веществом, воспроизводится здесь с его дружеского разрешения.

§ 3. К вопросу о возможности формулировки квантовой механики как теории близкодействия

Вопрос, о котором идет речь, очень сложен, и для него особенно верно то, что современная квантовая теория здесь отнюдь еще не является последним словом. И все же мне кажется, что этот вопрос можно рассматривать иначе, чем это сделал Эренфест в своей заметке.

Прежде всего представляется совсем необязательным отождествлять понятие *многомерной теории*, т. е. теории, описывающей N частиц с помощью $(3N + 1)$-мерного конфигурационного пространства, с понятием *теории дальнодействия*. В классической статистической механике, например, для описания статистических свойств совокупности частиц тоже вводится многомерное фазовое пространство (считая время особым измерением, мы имеем в нем, конечно, $6N + 1$ измерений вместо $3N + 1$ измерений в случае N частиц), даже если силы взаимодействия между частицами распространяются с конечной скоростью, т. е. когда о дальнодействии не может быть и речи. При этом $3N$ координат частиц понимаются как координаты в обычном трехмерном пространстве.

Поэтому поставленный здесь вопрос следует рассматривать не с точки зрения возможности возврата к четырехмерному пространству, а скорее следующим образом. В классической теории переход от теории дальнодействия к теории близкодействия осуществляют, переписывая закон Кулона путем введения электрического поля как промежуточного понятия в дифференциальных уравнениях поля. Теперь обсуждаемый здесь вопрос можно поставить так: *можно ли сделать нечто подобное и в квантовой механике*?

Будем сначала учитывать, как в первоначальной теории Шредингера в конфигурационном пространстве, только электростатическое взаимодействие частиц, пренебрегая, таким образом, запаздыванием и магнитным взаимодействием. Введем затем в качестве промежуточного понятия поле $E(\mathbf{x}, t)$, зависящее от c-числового пространства (и c-числового времени). При этом вектор $\mathbf{x}$ означает координаты *точки наблюдения* в противоположность $3N$ координатам $\mathbf{X}^{(s)}$ N частиц, где $s = 1, \ldots, N$. Координаты x_1, x_2, x_3 коммутируют со всеми величинами; $\mathbf{X}^{(s)}$ не коммутируют с импульсами $\mathbf{p}^{(s)} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(s)}}$. Поле $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ коммутирует с $\mathbf{X}^{(s)}$, но не с $\mathbf{p}^{(s)}$. Вместо закона Кулона должно выполняться уравнение

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi \sum_{1}^{N} e_s \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(s)}). \qquad (*)$$

Если $r_s = |\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(s)}|$ означает расстояние s-й частицы от точки наблюдения, то в действительности имеем

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum \frac{e_s}{r_s^2}\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(s)}}{r_s}.$$

Тогда вместо уравнения Шредингера надо было бы написать

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[-\sum_s \frac{\hbar^2}{2m_s}\Delta_s+\frac{1}{2}\int \mathbf{E}^2(x)\,dx_1dx_2dx_3\right]\psi(t,\mathrm{X}^{(s)})$$

$$\left(\Delta_s=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial X_k^{(s)2}}\right).$$

Это *было бы* тождественно с уравнением Шредингера, если бы не равенство

$$\frac{1}{2}\int \mathbf{E}^2(x)\,dx_1dx_2dx_3=\frac{1}{2}\sum_{s,\,s'}\frac{e_se_{s'}}{r_{ss'}},$$

где случай $s=s'$ *не* исключается. Значит, здесь содержатся члены собственной энергии $\frac{1}{r_{ss}}=\infty$. Впрочем, их можно сделать *конечными*, подставляя в равенство (*) вместо δ-функции конечную, заметно отличающуюся от нуля в области с линейными размерами порядка радиуса электрона D-функцию, которая характеризует форму электрона.

Как видно из квантовой электродинамики [9], этот процесс можно обобщить таким образом, чтобы учесть магнитное взаимодействие и эффекты излучения (запаздывание). Можно сохранить и D-функцию — форм-фактор электрона; только этот форм-фактор тогда был бы релятивистски-неинвариантным (точно так же, как в классической теории).

Вместо Ψ-макрополя для материальных частиц и поля Ландау — Пайерлса для световых квантов лучше применять поля **E** и **H** (некоммутирующие!) и конфигурационное пространство $X_k^{(s)}$ для материальных частиц, потому что именно *эти* величины в предельном случае переходят в соответствующие *классические*. Тогда уравнения для точечных частиц будут обладать свойством, которое можно рассматривать как релятивистскую инвариантность, причем его можно доказать (не используя Ψ-макрополе). Но и не касаясь вопроса о собственной энергии, я склонен считать теорию неудовлетворительной; *не потому*, что делается предположение о дальнодействии, которого, по-моему, больше *не существует*, а потому, что производится странное отделение пространства от времени, которое выражается в использовании *одного* t вместо того, чтобы ввести времена $t^{(s)}$ всех частиц наряду с временем точки наблюдения t, что придало бы теории более симметричный вид.

С другой стороны, проблема собственной энергии может, вероятно, получить удовлетворительное решение только при модификации теперешнего понятия пространства-времени. Такая модификация преобразовала бы также и понятия «дальнодействие» и «близкодействие», поскольку они существенно основываются на понятии обычного пространства-времени.

Поступила 17 декабря 1932 г.

Цюрих,
Физический институт Высшей технической школы

[9] См. по этому поводу обзор автора в «Handbuch der Physik». (Русск. пер.: *В. Паули*. Труды по квантовой теории. М., «Наука», 1975, с. 352.— *Ред.*).

1934

О КВАНТОВАНИИ СКАЛЯРНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ *

(Совместно с В. Вайскопфом)

Резюме. В настоящей работе формализм квантования волновых полей Гейзенберга — Паули последовательно применяется к скалярному релятивистскому волновому уравнению для полей материальных частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна. При этом существование противоположно заряженных частиц с равными массами, которые при поглощении или испускании электромагнитного излучения могут соответственно рождаться или аннигилировать парами, удается показать без привлечения дополнительных гипотез. Частота осуществления этих процессов по порядку величины оказывается такой же, как в дираковской теории дырок для частиц с тем же зарядом и массой. В отличие от теории дырок исследуемая нами аналогичная возможность существования противоположно заряженных частиц, также удовлетворяющая требованиям теории относительности, обладает тем преимуществом, что энергия автоматически получается положительно-определенной. Однако обсуждаемая нами теория так же, как и первоначальный подход в теории дырок, приводит к бесконечно большой собственной энергии и бесконечной поляризации вакуума.

§ 1. Связь скалярного релятивистского волнового уравнения с существованием противоположно заряженных частиц

Как известно, от скалярного релятивистского волнового уравнения, которое в отсутствие внешнего поля с помощью операторов

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad p_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{1}$$

можно записать в виде

$$\frac{E^2}{c^2} - \sum_{k=1}^{3} p_k^2 - m^2c^2 = 0 \tag{2}$$

(здесь и далее $\hbar$ всегда будет означать постоянную Планка, деленную на 2π; m — массу покоя электрона и c — скорость света), обычно отказывались в пользу четырехкомпонентного волнового уравнения Дирака. Это связано с тем, что первое уравнение не позволяет получать спин частиц и, следовательно, дает для электронов безусловно недостаточное приближение к опыту. Поскольку в дальнейшем мы вновь вернемся к обсуждению следствий из волнового уравнения (1), наше утверждение

---

* *Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung.*— Helv. phys. acta, 1934, 7, 709—731.

нуждается в особом обосновании. Таким обоснованием с нашей точки зрения может служить ссылка на то, что экспериментальное открытие позитрона и его теоретическое истолкование в рамках принадлежащей Дираку новой интерпретации состояний с отрицательной энергией, входивших в его первоначальную теорию, привели к необходимости пересмотра априорных аргументов Дирака, основанных иа общей квантовомеханической теории преобразований. С помощью этих аргументов он обосновывал переход от скалярного релятивистского волнового уравнения к своему спинорному уравнению. Ниже будет показано, что применение общих рецептов квантования волновых полей, сформулированных ранее Гейзенбергом и Паули [1], к рассматриваемой проблеме исключает сколько-нибудь серьезные возражения против скалярного волнового уравнения с точки зрения квантовомеханической теории преобразований. Более того, этим способом, сохраняя релятивистскую и градиентную инвариантность теории, *без привлечения дополнительных гипотез удается показать существование противоположно заряженных частиц и наличие процессов рождения и уничтожения пар таких частиц, причем энергия волнового поля материальных частиц автоматически всегда получается положительной.* При этом мы предполагаем, что частицы должны подчиняться статистике симметричных состояний (статистика Бозе — Эйнштейна); однако следует считать удовлетворительным то обстоятельство, что при сохранении релятивистской инвариантности теории принцип запрета нельзя ввести без одновременного введения спина.

Что же касается упоминавшихся априорных возражений Дирака против скалярного релятивистского волнового уравнения [2], то они основаны по существу на двух предположениях.

1. В релятивистской квантовой теории возможна непротиворечивая формулировка *проблемы одного тела.*

2. Понятие пространственной плотности частиц $\rho(x)$ (статистически интерпретируемое) имеет физический смысл. При интегрировании по любому конечному объему она приводит к «наблюдаемой» (в смысле теории преобразований) с собственными значениями 0 и $+1$.

Коль скоро первое предположение выполнено, необходимость применять к рассматриваемой проблеме формализм квантования волновых полей отпадает. Более того, в этом случае можно исходить из обычного волнового поля в трехмерном пространстве. Второе предположение приводит к тому, что плотность частиц должна не только быть четвертой компонентой 4-вектора и удовлетворять уравнению непрерывности, но и обладать также свойством неотрицательности. Кроме того, как показал Дирак, собственные значения соответствующей матрицы плотности после интегрирования по конечному объему будут правильными лишь при условии,

---

[1] Z. Phys., 1929, 56, 1. (Русск. пер. см. с. 30.— *Ред.*).

[2] Наиболее подробно они изложены в лейпцигских докладах 1932 г., опубликованных под общим названием «Quantentheorie und Chemie».

что плотность частиц имеет вид [3]

$$\rho(x) = \sum_r \overset{*}{\psi}_r \psi_r.$$

Плотность же частиц, отвечающая скалярному релятивистскому волновому уравнению, имеет вид

$$\rho(x) = \psi^* \left(i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} - e\Phi_0\psi \right) - \left(i\hbar \frac{\partial\psi^*}{\partial t} + e\Phi_0\psi^* \right)\psi, \tag{3}$$

где e — заряд частицы, а Φ_0 — внешний скалярный потенциал. Поскольку эта плотность не имеет требуемого вида, противоречие считается установленным.

Как известно, Дирак (опираясь на тот факт, что согласно его волновому уравнению волновой пакет из состояний с отрицательной энергией движется во внешнем поле так, как если бы ему соответствовала частица с противоположным зарядом, той же массой и положительной энергией) следующим образом использовал состояния с отрицательной энергией для описания позитрона. Наблюдаемыми, т. е. дающими вклад в «истинную» (создающую поле) плотность заряда и собственную (положительную) энергию, должны быть лишь отклонения от того случая, когда все состояния имеют отрицательную энергию, — «дырки» в области состояний с отрицательной энергией.

Не останавливаясь более подробно на трудностях непротиворечивой релятивистски- и градиентно-инвариантной формулировки дираковской теории дырок для электрона и позитрона во внешних полях, неоднократно обсуждавшихся в литературе, отметим лишь следующие обстоятельства.

1. Ввиду процессов образования пар и новой интерпретации состояний с отрицательной энергией вообще невозможно ограничиться проблемой одного тела.

2. Плотность частиц [4] не может более иметь непосредственный физический смысл. Однако в отсутствие внешнего поля число частиц с заданным импульсом (плотность вероятности в импульсном пространстве), а следовательно и полное число частиц, является «наблюдаемым», все еще имеющим физический смысл.

---

[3] Только из такой формулы для ρ можно заключить, что волновые уравнения должны быть первого порядка относительно $\partial/\partial t$.

[4] Если ψ_ρ^+ — «положительная» (составленная из состояний с положительной энергией), а ψ_ρ^- — «отрицательная» часть волновой функции в дираковской теории дырок, то плотность заряда, рассматриваемая как оператор, имеет вид

$$\rho(x) = \sum_{\rho=1}^{4} \{\psi_\rho^{+*}\psi_\rho^+ - \psi_\rho^{-*}\psi_\rho^- + \psi_\rho^+\psi_\rho^- + \psi_\rho^{+*}\psi_\rho^{-*}\}.$$

Из-за смешанных членов при наличии внешних полей ее нельзя уже разбить на две части так, чтобы каждая часть в отдельности удовлетворяла уравнению непрерывности и представляла собой четвертую компоненту 4-вектора.

3. Наоборот, не только полный заряд, но и плотность заряда $\rho(x)$ имеют физический смысл. После интегрирования по любому конечному объему они должны (если воспользоваться формализмом квантования волновых полей) иметь собственные значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$, которые на этот раз могут быть как положительными, так и отрицательными (те же утверждения справедливы и в том случае, когда имеется внешнее поле). (В случае принципа запрета число N при заданных размерах рассматриваемой области пространства ограничено сверху.) Плотность заряда $\rho(x)$ и полное число частиц между собой не коммутируют.

Эти требования столь сильно отличаются от первоначальной релятивистской проблемы одного тела, *что нет никаких причин, по которым плотность заряда должна была бы иметь специальный вид*: $\sum\limits_r \overset{*}{\varphi}_r \varphi_r$. Кроме того, мы покажем, что последнее из сформулированных требований в скалярной релятивистской теории для бесспиновых частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, выполняется так же, как и дираковской теории дырок. При этом, разумеется, выражение (3) следует интерпретировать не как плотность частиц, а как плотность заряда.

Основной интерес скалярной релятивистской теории, на наш взгляд, заключается в том, что энергия материальных частиц в ней после квантования волновых полей автоматически, т. е. без привлечения новой гипотезы, эквивалентной идее дырок, и без предельных переходов и искусственных вычитательных процедур [5], чуждых формализму квантовой теории, оказывается положительной. Следствием этого является тот факт, что функция Гамильтона для волнового поля материальных частиц в обсуждаемой нами скалярной теории в отличие от соответствующего выражения в дираковской спинорной теории всегда принимает вид *положительно-определенной* формы

$$\overline{H} = \int dV \left\{ \left| ih \frac{\partial \psi}{\partial t} - e\Phi_0 \psi \right|^2 + \sum_{k=1}^{3} \left| ihc \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + e\Phi_k \psi \right|^2 + m^2 c^4 |\psi|^2 \right\}. \quad (4)$$

Ввиду свободы в выборе гипотез нашей скалярной релятивистской теории на первый взгляд может показаться весьма странным, почему «природа» «никак не использует» [6] возможность существования противоположно заряженных частиц без спина, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна и могущих возникать и исчезать при излучении и соответственно превращении в другие частицы. Следует, однако, иметь в виду, что вопрос о применимости рассматриваемой здесь теории, например к α-частицам, выходит за рамки справедливости современной квантовой теории, поскольку для этого круга явлений существенную роль играют эффекты, связанные со строением ядра. Тем не менее, как будет

---

[5] *P. A. M. Dirac*. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1934, 30, pt II, 150; *R. Peierls*. Proc. Roy. Soc., 1934, **146**, 420; *W. Heisenberg*. Z. Phys., 1934, **90**, 209.

[6] Ср. *P. A. M. Dirac*. Proc. Roy. Soc., 1931, **133**, 60, в особенности с. 71.

показано в § 4, обсуждаемая теория в вопросах поляризации вакуума приводит к тем же бесконечностям, что и первоначальная форма теории дырок [7]. Впрочем, она точно так же приводит к бесконечной собственной энергии не только для заряженных частиц, но и к бесконечной собственной энергии световых квантов [8]. Поэтому дальнейшего продвижения в этих вопросах можно было бы ожидать лишь после того, как теория сможет объяснить численное значение постоянной тонкой структуры Зоммерфельда.

§ 2. Квантование свободного волнового поля [9]

Функция Лагранжа скалярной релятивистской теории имеет вид

$$L = -h^2c^2 \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} - m^2c^4\psi^*\psi =$$

$$= h^2 \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - h^2c^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - m^2c^4\psi^*\psi \tag{5}$$

(индексы μ, ν, ... принимают значения от 1 до 4; $x_4 = ict$).

Релятивистский тензор энергии-импульса будет

$$T_{\mu\nu} = -h^2c^2\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}\right) - L\delta_{\mu\nu}. \tag{6}$$

Следовательно, энергию (функцию Гамильтона) можно записать в виде

$$\overline{H} = \int T_{44}dV = \int\left\{h^2 \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + h^2c^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m^2c^4\psi^*\psi\right\} dV, \tag{7}$$

а импульс — в виде

$$G_k = \frac{i}{c}\int T_{4k}dV = -\int h^2\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dV. \tag{8}$$

Величины ψ^* и ψ теперь мы должны считать q-числами (операторами, действующими на функционал Шредингера), причем ψ^* означает величину, эрмитово-сопряженную с ψ. В последующем мы всегда будем обозначать оператор, эрмитово-сопряженный с данным q-числом, значком *. Импульсы π и π^*, канонически-сопряженные с ψ и ψ^*, следует образо-

---

[7] *P. A. M. Dirac.* Solvay-Report, 1933.

[8] Аналогичные результаты получил Гейзенберг (см. прим. 5). То, что в некоторых формулировках теории дырок, несмотря на конечность поляризационных эффектов, собственные энергии все же бесконечны, вряд ли имеет значение.

[9] Выражения для функции Лагранжа, тензора энергии-импульса и вектора тока в скалярной релятивистской теории см. также, например, в работе: *B. W. Gordon.* Z. Phys., 1926, 40, 117.

вывать по правилу:

$$\pi = \frac{1}{h}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} = h\frac{\partial\psi^*}{\partial t}, \quad \pi^* = \frac{1}{h}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)} = h\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{9}$$

В случае частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, они удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям (сокращенно п. с.):

$$i\,[\pi(x,t),\psi(x',t)] = \delta(x-x'), \quad i\,[\pi^*(x,t),\psi^*(x',t)] = \delta(x-x'), \tag{I}$$

где $\delta(x-x')$ в правой части означает известную δ-функцию Дирака и, как обычно,

$$[\mathrm{A},\mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}. \tag{10}$$

Величины ψ, ψ^*, а также π, π^* коммутируют друг с другом; кроме того, π коммутирует с ψ^*, а π^* — с ψ.

Применение правила

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{i}{h}[\bar{H}, f] \tag{11}$$

к ψ и ψ^* приводит к тождеству; применение этого правила к π, π^* с учетом (9) приводит к волновым уравнениям:

$$h^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = h^2c^2\Delta\psi - m^2c^4\psi, \tag{12}$$

$$h^2\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2} = h^2c^2\Delta\psi^* - m^2c^4\psi^*. \tag{12*}$$

Кроме того, правило

$$\frac{\partial f}{\partial x^k} = -\frac{i}{h}[G_k, f], \tag{13}$$

как и должно быть, выполняется для всех f. Нетрудно видеть, что порядок следования множителей приводит к двузначности лишь в выражении для импульса. Этот порядок выбран так, что подынтегральное выражение в (8), имеющее смысл плотности импульса, является эрмитовым оператором.

Перейдем теперь к выражениям для плотности заряда ρ и плотности тока $\mathbf{i} = c\mathbf{s}$ (измеренных в единицах e — электрического заряда частиц), которые при условии $s_4 = i\rho$ образуют 4-вектор s_ν, удовлетворяющий уравнению непрерывности

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{i} = 0. \tag{14}$$

Эти выражения имеют следующий вид:

$$s_\nu = hci\left(\overline{\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}\psi^*}\right), \tag{15}$$

или

$$\rho = -hi\left(\overline{\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^*}\right) = -hi\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^*\right) =$$

$$= -hi\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right), \tag{15а}$$

$$s_k = hci\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\psi^*\right). \tag{15б}$$

Черта над правой частью указывает на неоднозначность порядка сомножителей в выражении для плотности ρ и должна означать, что отдельные слагаемые должны быть приведены к эрмитовому виду. Установление последовательности сомножителей на основе требования эрмитовости одного лишь оператора плотности в этом случае невозможно. Однако, как будет показано позднее, принятое здесь правило фиксирования порядка сомножителей оказывается целесообразным, поскольку не приводит к нулевой плотности. Кроме того, оно находится в соответствии с релятивистской инвариантностью и уравнением непрерывности.

Нетрудно видеть, что с учетом (9) плотность можно записать также и в виде

$$\rho = -i(\pi\psi - \pi^*\psi^*) = -i(\psi\pi - \psi^*\pi^*). \tag{16}$$

Покажем теперь, что в некоторой точке пространства x_0 плотность имеет собственные значения

$$\rho(x) = N\cdot\delta(x - x_0)$$

с $N = 0, \pm 1, \ldots$ Для этого проще всего представить ψ в виде суммы эрмитовых операторов

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + iu_2), \qquad \psi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 - iu_2),$$

а π — соответственно в виде суммы операторов

$$\pi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + ip_2), \qquad \pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - ip_2),$$

откуда

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^*), \qquad u_2 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^*),$$

$$p_1 = h\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^* + \pi), \qquad p_2 = h\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\pi^* - \pi).$$

Тогда

$$i\,[p_1(x),\ u_1(x')] = \delta(x - x'),\qquad i\,[p_2(x),\ u_2(x)] = \delta(x - x')$$

и любая величина с индексом 1 будет коммутировать с любой величиной с индексом 2. Поскольку энергия, импульс и волновые уравнения распадаются в сумму выражений, зависящих лишь от p_1, u_1 и соответственно от p_2, u_2, то

$$\rho = p_1 u_2 - p_2 u_1. \tag{16a}$$

Отсюда по аналогии с выражением для компоненты момента импульса тотчас же устанавливаем, что $\rho(x)$ имеет собственные значения $N\delta(x - x')$ с $N = 0, \pm 1, \ldots$ [Наличие множителя $\delta(x - x')$ можно обосновать с помощью предельного перехода от некоторого дискретного распределения в пространстве к непрерывному.] Поскольку значения плотности в различных точках пространства коммутируют между собой, находящийся внутри произвольной конечной области v заряд (измеренный в единицах e) $e_v = \int\limits_v \rho dV$ обладает собственными значениями $0, \pm 1, \ldots, \pm N$.

Заметим, что в рассматриваемой теории все соотношения, содержащие п.с., остаются верными, если все операторы в них заменить эрмитово-сопряженными. Поскольку 4-ток при этом изменит свой знак, отсюда следует симметрия теории относительно положительных и отрицательных зарядов.

Вместе с тем следует заметить, что разложение плотности ρ на коммутирующие части, имеющие только положительные и только отрицательные собственные значения, можно осуществить бесконечно многими способами; однако ни одна из этих частей не удовлетворяет уравнению непрерывности и не является релятивистски-инвариантной [10].

Исследуем теперь, как выглядят полученные соотношения в импульсном пространстве. Это важно для приложений и само по себе представляет физический интерес. Чтобы вместо интегралов в импульсном пространстве получить суммы, применим известный формальный метод, налагая на

---

[10] Такие разложения получают, например, вводя произвольную константу a размерности (энергия)$^{1/2}$ (например, $a = \sqrt{mc^2}$) по формулам:

$$\pi = \frac{a}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2^*),\qquad \psi = \frac{-i}{\sqrt{2}\,a}(\varphi_1^* - \varphi_2),$$

$$\pi^* = \frac{a}{\sqrt{2}}(\varphi_1^* + \varphi_2),\qquad \psi^* = \frac{-i}{\sqrt{2}\,a}(\varphi_2^* - \varphi_1).$$

Тогда

$$[\varphi_1(x),\ \varphi_1^*(x')] = \delta(x - x'),\ [\varphi_2(x),\ \varphi_2^*(x')] = \delta(x - x'),$$

величины с индексом 1 коммутируют с величинами, имеющими индекс 2. При этом

$$\rho = \varphi_2^*\varphi_2 - \varphi_1^*\varphi_1.$$

Отсюда следует еще одно доказательство для собственных значений плотности ρ.

волновое поле условие периодичности. Областью периодичности будет служить куб с ребром L и, следовательно, объемом $V = L^3$. Компоненты волнового вектора $\mathbf{k}$ в этом случае должны быть целыми, кратными величине $2\pi/L$. В качестве полной системы ортонормированных собственных функций (c-числа) выберем

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\mathbf{kx})}, \tag{17}$$

для которых

$$\int\limits_V u_k^*(x) u_l(x)\, dV = \delta_{kl}. \tag{18}$$

Здесь и далее мы для простоты пишем лишь один индекс k вместо трех индексов, соответствующих трем компонентам вектора $\mathbf{k}$. Аналогичное замечание относится и к суммированию по k.

Если мы разложим теперь функции ψ, π, ψ^* и π^* по u_k

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k q_k e^{i(\mathbf{kx})}, \qquad \psi^* = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k q_k^* e^{-i(\mathbf{kx})}, \tag{19а}$$

$$\pi^* = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k p_k^* e^{i(\mathbf{kx})}, \qquad \pi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k p_k e^{-i(\mathbf{kx})}, \tag{19б}$$

с формулами обращения

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \int\limits_V \psi e^{-i(\mathbf{kx})}\, dV, \qquad q_k^* = \frac{1}{\sqrt{V}} \int\limits_V \psi^* e^{i(\mathbf{kx})}\, dV, \tag{19в}$$

$$p_k^* = \frac{1}{\sqrt{V}} \int\limits_V \pi^* e^{-i(\mathbf{kx})}\, dV, \qquad p_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \int\limits_V \pi e^{i(\mathbf{kx})}\, dV, \tag{19г}$$

то q-числа p_k, q_k, p_k^*, q_k^* (заметим, что операторы p_k, q_k не являются эрмитовыми, а p_k^*, q_k^* — операторы, эрмитово-сопряженные с p_k, q_k) согласно (I) будут удовлетворять п. с.

$$i\,[p_k, q_l] = \delta_{kl}, \qquad i\,[p_k^*, q_l^*] = \delta_{kl}, \tag{II}$$

в то время как q_k будут коммутировать с q_l^*, p_k — с p_l^*, а p_k^* — с q_l^* и p_k^* — с q_l. Кроме того, согласно (9)

$$p_k = h\dot{q}_k^*, \qquad p_k^* = h\dot{q}_k. \tag{20}$$

Из выражений (7) и (8) получаем для функции Гамильтона и импульса:

$$\overline{H} = \sum_k (p_k^* p_k + E_k^2 q_k^* q_k), \tag{21}$$

$$\mathrm{G} = -ih \sum_k \mathbf{k}\,(p_k q_k - q_k^* p_k^*). \tag{22}$$

Здесь для краткости мы ввели обозначение

$$E_k^2 = c^2 (h^2 k^2 + m^2 c^2). \tag{23}$$

Под

$$E_k = + c \sqrt{h^2 k^2 + m^2 c^2} \tag{23a}$$

впредь мы будем всегда понимать положительное значение корня.

Нетрудно видеть, что для p_k, q_k, p_k^*, q_k^* справедливо правило (11); в частности,

$$\dot{p}_k = \frac{i}{h} [\overline{H}, p_k] = - \frac{1}{h} E_k^2 q_k^*, \tag{24a}$$

$$\dot{p}_k^* = \frac{i}{h} [\overline{H}, p_k^*] = - \frac{1}{h} E_k^2 q_k. \tag{24б}$$

Далее, из соотношений (16) и (15б) находим разложения для полного заряда

$$\bar{e} = \int\limits_V \rho dV$$

и полного тока

$$\frac{1}{c} \mathbf{J} = \int\limits_V \mathbf{s} dV$$

по различным импульсным собственным функциям:

$$\bar{e} = - i \sum_k (p_k q_k - p_k^* q_k^*), \tag{25}$$

$$\frac{1}{c} \mathbf{J} = 2hc \sum_k \mathbf{k} q_k^* q_k. \tag{26}$$

Очевидно, что последнее выражение непостоянно по времени.

Покажем теперь, что компоненты отдельного собственного колебания k в выражении для полного заряда, энергии и импульса можно разбить на две части, которые допускают простую физическую интерпретацию. Введем для этого переменные a_k, a_k^*,

b_k, b_k^*:

$$p_k = \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}} (a_k^* + b_k), \qquad q_k = \frac{-i}{\sqrt{2}\sqrt{E_k}} (- a_k + b_k^*), \tag{27}$$

$$p_k^* = \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}} (a_k + b_k^*), \qquad q_k^* = \frac{-i}{\sqrt{2}\sqrt{E_k}} (a_k^* - b_k), \tag{27*}$$

с формулами обращения:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}}\, p_k^* - i\sqrt{E_k}\, q_k\right), \qquad a_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}}\, p_k + i\sqrt{E_k}\, q_k^*\right), \tag{28а}$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}}\, p_k - i\sqrt{E_k}\, q_k^*\right), \qquad b_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}}\, p_k^* + i\sqrt{E_k}\, q_k\right). \tag{28б}$$

Для новых переменных выполняются п. с.

$$[a_k, a_l^*] = \delta_{kl}, \qquad [b_k, b_l^*] = \delta_{kl}, \tag{III}$$

в то время как a_k коммутируют с a_k^* , b_k — с b_k^*, a_k — с b_l^* и a_k^* — с b_l.

Далее для функции Гамильтона и импульса имеем:

$$\bar{H} = \sum_k E_k \frac{1}{2}(a_k a_k^* + a_k^* a_k + b_k^* b_k + b_k b_k^*) = \sum_k E_k (a_k^* a_k + b_k^* b_k + 1), \tag{29}$$

$$\mathbf{G} = h\sum_k k\,\frac{1}{2}(a_k^* a_k + a_k a_k^* - b_k^* b_k - b_k b_k^*) = h\sum_k \mathbf{k}\,(a_k^* a_k - b_k^* b_k). \tag{30}$$

Кроме того, полный заряд запишем в виде

$$\bar{e} = \sum_k \frac{1}{2}(a_k^* a_k + a_k a_k^* - b_k^* b_k - b_k b_k^*) = \sum_k (a_k^* a_k - b_k^* b_k). \tag{31}$$

Наконец, из (26) найдем для полного тока

$$\frac{1}{c}\,\mathbf{J} = hc\sum_k \frac{\mathbf{k}}{E_k}(a_k^* a_k + b_k b_k^* - a_k^* b_k^* - a_k b_k) =$$

$$= hc\sum_k \frac{\mathbf{k}}{E_k}(a_k^* a_k + b_k^* b_k - a_k^* b_k^* - a_k b_k + 1). \tag{32}$$

Из п. с. для a, b, a^*, b^* следует, что операторы

$$N_k^+ = a_k^* a_k, \qquad N_k^- = b_k^* b_k \tag{33}$$

коммутируют друг с другом и имеют неотрицательные собственные значения 0, 1, 2, . . . Выражения для заряда, энергии и импульса в рассматриваемом нами случае свободного поля позволяют обосновать следующую их интерпретацию:

N_k^* означает число частиц с зарядом +1 и импульсом $h\mathbf{k}$, а N_k^- — число частиц с зарядом —1 и импульсом — $h\mathbf{k}$ [11].

[11] Необходимо еще раз заметить, что дать соответствующее, имеющее физический смысл, определение пространственной плотности $\rho^+(x)$ и $\rho^-(x)$ для частиц различных сортов невозможно. Например, если составить из a_k и b_k выражения:

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k a_k e^{i(\mathbf{kx})}, \qquad b(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k b_k e^{-i(\mathbf{kx})},$$

то окажется, что $a^*(x)a(x) - b^*(x)b(x)$ *не соответствует* плотности заряда.

Следует также заметить, что член с $+1$ в выражении для энергии означает нулевую энергию (энергию вакуума), которую по аналогии с нулевой энергией электромагнитного излучения можно вычеркнуть, не нарушая релятивистской инвариантности теории и не изменяя результатов всех приложений. Аналогичное утверждение справедливо и для члена с $+1$ в выражении для тока. С физической точки зрения исключительно важное значение имеет тот факт, что независимо от этого члена энергия всегда положительна. Члены с $a_k b_k$ и $\overset{*}{a}_k \overset{*}{b}_k$ в выражении для тока, нарушающие его постоянство во времени в отсутствие внешнего поля, играют важную роль. Как видно из уравнений движения

$$\dot{a}_k = -i \frac{E_k}{h} a_k, \qquad \dot{b}_k = -i \frac{E_k}{h} b_k \tag{34}$$

и их интегралов

$$a_k = a_k(0)\, e^{-i \frac{E_k}{h} t}, \qquad b_k = b_k(0)\, e^{-i \frac{E_k}{h} t}, \tag{35}$$

$$\overset{*}{a}_k = a_k(0)\, e^{+i \frac{E_k}{h} t}, \qquad \overset{*}{b}_k = \overset{*}{b}_k(0)\, e^{+i \frac{E_k}{h} t}, \tag{35*}$$

получающихся с помощью (11) из (III) и (29), эти члены имеют лишь отдаленную аналогию с шредингеровским «дрожанием» и, как будет показано в следующем параграфе, при наличии соответствующих внешних полей приводят к процессам рождения и уничтожения пар.

Как уже упоминалось во введении, непротиворечивая скалярная релятивистская волновая теория для частиц, подчиняющихся принципу запрета, невозможна, поскольку, как показывает более подробное исследование функции Гамильтона, выраженной через переменные a и b, нельзя гарантировать релятивистскую инвариантность 4-тока, если предположить, что частицы подчиняются статистике Ферми. Это связано с тем, что из соотношений

$$\psi(x)\psi^*(x') + \psi^*(x')\psi(x) = 0, \qquad \psi(x)\psi(x') + \psi(x')\psi(x) = 0$$

следовало бы, что $\psi(x) = 0$ и $\psi^*(x) = 0$.

§ 3. Частицы во внешнем поле

Для частиц с зарядом e переход от случая, когда внешнее поле отсутствует, к случаю, когда имеется внешнее электромагнитное поле с 4-потенциалом Φ_μ ($\Phi_4 = i\Phi_0$), совершают, заменяя оператор p_μ по формуле

$$p_\mu \to p_\mu - \frac{e}{c} \Phi_\mu, \tag{36}$$

что отвечает подстановкам [12]

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^{\mu}} \to \frac{\partial\psi}{\partial x^{\mu}} - \frac{ie}{hc}\Phi_{\mu}\psi, \qquad \frac{\partial\psi^*}{\partial x^{\mu}} \to \frac{\partial\psi^*}{\partial x^{\mu}} + \frac{ie}{hc}\Phi_{\mu}\psi^*. \tag{36a}$$

В этом случае функция Лагранжа для поля материальных частиц имеет вид

$$L = -h^2c^2\sum_{\nu=1}^{4}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^{\nu}} + \frac{ie}{hc}\Phi_{\nu}\psi^*\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{\nu}} - \frac{ie}{hc}\Phi_{\nu}\psi\right) - m^2c^4\psi^*\psi =$$
$$= h^2\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \frac{ie}{h}\Phi_0\psi^*\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{ie}{h}\Phi_0\psi\right) -$$
$$- h^2c^2\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^{k}} + \frac{ie}{hc}\Phi_{k}\psi^*\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{k}} - \frac{ie}{hc}\Phi_{k}\psi\right) - m^2c^4\psi^*\psi, \tag{37}$$

а функция Гамильтона для того же поля

$$\overline{H}^m = \int\left\{\left(h\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - ie\Phi_0\psi^*\right)\left(h\frac{\partial\psi}{\partial t} + ie\Phi_0\psi\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{3}\left(hc\frac{\partial\psi^*}{\partial x^{k}} + ie\Phi_k\psi^*\right)\left(hc\frac{\partial\psi}{\partial x^{k}} - ie\Phi_k\psi\right) + m^2c^4\psi^*\psi\right\}dV. \tag{37a}$$

Если к этим выражениям добавить выражения для функции Лагранжа электромагнитного поля

$$L^{\text{эл}} = \frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2) \tag{38}$$

и соответственно для энергии электромагнитного поля

$$\overline{H}^{\text{эл}} = \frac{1}{8\pi}\int(E^2 + H^2)\,dV, \tag{38a}$$

то получим интеграл энергии

$$\overline{H}^m + \overline{H}^{\text{эл}} = \text{const}.$$

Далее, варьируя интеграл действия

$$\int(L^m + L^{\text{эл}})\,dV\,dt$$

---

[12] В теории Дирака вводится подстановка

$$p_{\mu} \to p_{\mu} + \frac{e}{c}\Phi_{\mu},$$

поскольку в этой теории заряд электрона обозначается через $(-e)$. Наши обозначения совпадают с обозначениями Гордона (см. цитированную в прим. 9 работу этого автора).

по переменным поля ψ, ψ^*, Φ_μ, находим волновые уравнения:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial t} - ie\Phi_0\right)\left(h\frac{\partial}{\partial t} - ie\Phi_0\right)\psi =$$
$$= \sum_{k=1}^{3}\left(hc\frac{\partial}{\partial x^k} + ie\Phi_k\right)\left(hc\frac{\partial}{\partial x^k} + ie\Phi_k\right)\psi + m^2c^4\psi, \qquad (39)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial t} + ie\Phi_0\right)\left(h\frac{\partial}{\partial t} + ie\Phi_0\right)\psi^* =$$
$$= \sum_{k=1}^{3}\left(hc\frac{\partial}{\partial x^k} - ie\Phi_k\right)\left(hc\frac{\partial}{\partial x^k} - ie\Phi_k\right)\psi^* + m^2c^2\psi^*, \qquad (39^*)$$

с одной стороны, и уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\mathbf{E} = 4\pi e\frac{1}{c}\,\mathfrak{i} = 4\pi e\mathfrak{s}, \qquad (40)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi e\rho \qquad (41)$$

— с другой. Здесь выражения для ρ и $\mathfrak{s}$ имеют вид:

$$\rho = i\left[\left(h\frac{\partial\psi}{\partial t} + ie\Phi_0\psi\right)\psi^* - \left(h\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - ie\Phi_0\psi^*\right)\psi\right] =$$
$$= hi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^* - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right) - 2e\Phi_0\psi^*\psi, \qquad (42)$$

$$\mathfrak{s}_k = i\left[\left(hc\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k} + ie\Phi_k\psi^*\right)\psi - \left(hc\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - ie\Phi_k\psi\right)\psi^*\right] =$$
$$= ihc\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\psi^*\right) - 2e\Phi_k\psi^*\psi, \qquad (43)$$

и отличаются от соответствующих выражений в случае отсутствия внешнего поля (15а) и (15б) на характерные добавки. Справедливость уравнения непрерывности (14) для новых выражений ρ и s_k следует как из волновых уравнений (39), так и из уравнений Максвелла. Непосредственным следствием преобразования (36) является инвариантность функций Лагранжа и Гамильтона, а также выражений для тока и плотности заряда относительно градиентного преобразования:

$$\Phi'_\mu = \Phi_\mu + \frac{\partial\lambda}{\partial x^\mu}, \qquad \psi' = \psi e^{i\frac{e}{hc}\lambda}. \qquad (36б)$$

Существенно, что волновые уравнения, уравнения Максвелла и функция Гамильтона остаются без изменений при перестановке ψ и ψ^* и одновременной замене e на $-e$. Отсюда следует симметрия теории относительно положительного и отрицательного зарядов. Все утверждения останутся в силе, если ψ, ψ^* и Φ_μ рассматривать как q-числа.

Важно также и то, что π и π^* имеют теперь иной смысл, нежели в (9), и определяются формулами:

$$\pi = \frac{1}{h} \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} = h\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - ie\Phi_0\psi^*, \tag{44}$$

$$\pi^* = \frac{1}{h} \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)} = h\frac{\partial\psi}{\partial t} + ie\Phi_0\psi. \tag{44*}$$

Эти новые π удовлетворяют п. с. (I)

$$i\,[\pi(x, t), \psi(x', t)] = \delta(x - x'), \qquad i\,[\pi^*(x, t), \psi^*(x', t)] = \delta(x - x')$$

и перестановочны с переменными электромагнитного поля.

Плотность заряда и в этом случае согласно (42) формально совпадает с выражением (16):

$$\rho = i(\pi^*\psi^* - \pi\psi) = i(\psi^*\pi^* - \psi\pi). \tag{16}$$

Поэтому собственные значения плотности заряда и при наличии внешнего потенциала остаются теми же, что и в случае отсутствия внешних полей.

Ту часть функции Гамильтона, которая относится к полю материальных частиц, можно записать в виде

$$\overline{H}^m = \overline{H}_0 + \overline{H}_1,$$

где

$$\overline{H}_0 = \int\left\{\pi\pi^* + h^2c^2\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m^2c^4\psi^*\psi\right\}dV, \tag{45$_0$}$$

$$\overline{H}_1 = \int\left\{ehc\sum_{k=1}^{3}\Phi_k\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\psi\right) + e^2\sum_{k=1}^{3}\Phi_k^2\psi^*\psi\right\}dV. \tag{45$_1$}$$

Поэтому квантовую электродинамику можно формулировать, как обычно, с помощью известных п. с. для напряженностей поля и с помощью электродинамических потенциалов, причем уравнения Максвелла (40) можно получить, если воспользоваться правилом (11):

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{i}{h}[\overline{H}, \mathbf{E}].$$

Не останавливаясь на этом более подробно, напомним лишь известные трудности, возникающие вследствие того, что уравнение (41) коммутирует с одними градиентно-инвариантными величинами $\psi\pi$, $\psi^*\pi^*$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, но не коммутирует с другими величинами, такими, как π, π^*, ψ, ψ^*, Φ_μ. Если бы для этих величин выполнялось правило (11)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{i}{h}[\overline{H}, f],$$

то к суммам, входящим в формулы (38а), (45_0) и (45_1), следовало бы формально добавить выражение[13]

$$\int \Phi_0 (4\pi e\rho - \operatorname{div} \mathbf{E})\, dV. \tag{46}$$

Таким образом, для той части H' функции Гамильтона, которая не совпадает с (37а),

$$H' = \overline{H}_0 + \overline{H}_1 + \overline{H}_2, \tag{47}$$

$$\overline{H}_2 = e\int \Phi_0 \rho\, dV = ie\int \Phi_0 (\pi^* \psi^* - \pi\psi)\, dV, \tag{45_2}$$

справедливы уравнения:

$$\dot{\pi} = \frac{i}{h}\,[H', \pi], \qquad \dot{\psi} = \frac{i}{h}\,[H', \psi]. \tag{48}$$

Аналогичные соотношения возникают и для канонически-сопряженных величин π^*, ψ^*.

Поэтому такая (неградиентно-инвариантная) функция Гамильтона H' еще и постоянна по времени, если потенциалы Φ_0 и Φ_k зависят от пространственных координат, но не зависят от времени. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть 4-потенциал как заданную c-числовую функцию и вычислить для этого случая функцию Гамильтона H'. Впрочем, последнюю можно получить и с помощью канонического преобразования L^m по формуле

$$H' = \int \pi\dot{\psi}\, dV + \int \pi^* \dot{\psi}^* dV - L^m.$$

Запишем теперь добавочные члены H_1 и H_2 функции Гамильтона в импульсном пространстве так же, как в предыдущем параграфе это уже было сделано с ее основной частью H_0 [ср. формулу (21)]. Если матричный элемент функции $f(x)$ (например, потенциала) относительно ортогональной системы функций (17) определяется, как обычно, по формуле

$$f_{kl} = \frac{1}{V}\int f(x)\, e^{-i[(\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{x}]} dV, \tag{49}$$

то из (19а), (19б) непосредственно следует, что

$$\overline{H}_2 = ie \sum_l \sum_k \Phi^0_{kl} (\overset{*}{p}_l \overset{*}{q}_k - p_k q_l), \tag{50}$$

$$\overline{H}_1 = -\sum_l \sum_k [hce\,(\boldsymbol{\Phi}_{kl}, \mathbf{k} + \mathbf{l}) - e^2 (\boldsymbol{\Phi})^2_{kl}]\, \overset{*}{q}_k q_l, \tag{51}$$

---

[13] По этому поводу см. статью: *W. Heisenberg*, *W. Pauli*. Z. Phys., 1930, 59, 168, в особенности уравнение (38). (Русск. пер. см. с. 89 этого тома.— *Ред.*).

или, если воспользоваться формулами (27), (28) и ввести переменные a_k, b_k, в которых задана H_0, в (29),

$$\overline{H}_2 = \frac{1}{2} e \sum_l \sum_k \Phi^0_{kl} \left[\frac{E_k + E_l}{\sqrt{E_k E_l}} (\overset{*}{a}_k a_l - \overset{*}{b}_l b_k) + \frac{E_k - E_l}{\sqrt{E_k E_l}} (a_l b_k - \overset{*}{a}_k \overset{*}{b}_l) \right], \quad (52)$$

$$\overline{H}_1 = \frac{1}{2} \sum_l \sum_k \frac{1}{\sqrt{E_k E_l}} [hce (\Phi_{kl}, \mathbf{k} + \mathbf{l}) - e^2 (\Phi)^2_{kl}] (\overset{*}{a}_k a_l + b_k \overset{*}{b}_l - \overset{*}{a}_k \overset{*}{b}_l - b_k a_l). \quad (53)$$

§ 4. Образование пар световыми квантами и поляризация вакуума

Из перестановочных соотношений (III) для $\overset{*}{a}_k$, a_k и $\overset{*}{b}_k$, b_k известным образом следуют свойства этих операторов, применяемых к зависящему от чисел заполнения N_k^+, N_k^- функционалу Шредингера $c\,(\ldots N_k^+\ldots;\ \ldots N_k^-\ldots)$:

$$\begin{aligned}
\overset{*}{a}_k c\,(\ldots N_k^+\ldots;\ldots N_k^-\ldots) &= \sqrt{N_k^+ + 1}\, c\,(\ldots N_k^+ + 1\ldots;\ldots N_k^-\ldots);\\
a_k c\,(\ldots N_k^+\ldots;\ldots N_k^-\ldots) &= \sqrt{N_k^+}\, c\,(\ldots N_k^+ - 1\ldots;\ldots N_k^-\ldots);\\
\overset{*}{b}_k c\,(\ldots N_k^+\ldots;\ldots N_k^-\ldots) &= \sqrt{N_k^- + 1}\, c\,(\ldots N_k^+\ldots;\ldots N_k^- + 1\ldots);\\
b_k c\,(\ldots N_k^+\ldots;\ldots N_k^-\ldots) &= \sqrt{N_k^-}\, c\,(\ldots N_k^+\ldots;\ldots N_k^- - 1\ldots).
\end{aligned} \quad (54)$$

Отсюда ясно, что добавочные слагаемые $\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$, входящие при наличии внешних полей в функцию Гамильтона, вследствие множителей $\overset{*}{a}_k \overset{*}{b}_l$ и $b_k a_l$ содержат члены, приводящие к рождению и уничтожению пар. Действительно, эти члены приводят к матричным элементам, взятым между состояниями, отличающимися ровно на одну положительную и одну отрицательную частицу, в то время как множители $\overset{*}{a}_k a_l$ и соответственно $b_k \overset{*}{b}_l$ приводят лишь к переходам одной положительной и соответственно одной отрицательной частицы из одного состояния в другое.

Далее на основе выражений (52) и (53) вычислим вероятность образования пары световым квантом с энергией $h\nu > 2mc^2$, чтобы сравнить ее с соответствующими выражениями, вычисленными Бете и Гайтлером [14] на основе теории дырок.

В свободном пространстве эта вероятность, согласно закону сохранения энергии и импульса, равна нулю. Предположим поэтому, что в пространстве имеется некое электрическое поле (типа кулоновского поля ядра), определяемое не зависящим от времени скалярным потенциалом Φ_0, которому может быть передан излишек импульса.

Влияние поля будем учитывать, следуя Бете и Гайтлеру, лишь в первом приближении, взяв в качестве исходного свободное пространство и

---

[14] *H. Bethe*, *W. Heitler*. Proc. Roy. Soc., 1934, **A146**, 83.

рассматривая Φ_0 не только как потенциал световой волны, но и как возмущение.

Если теперь мы спросим, какова вероятность W того, что в единицу времени в пустом пространстве при поглощении светового кванта $h\nu = E_k + E_l$ возникают одна положительная и одна отрицательная частицы с импульсами $h\mathbf{k}$ и $-h\mathbf{l}$ и энергиями E_k и E_l, то отличный от нуля результат мы получим лишь во втором приближении:

$$W = \frac{1}{h^2}\left|\sum_C \frac{\overline{H}_1(AC)\,\overline{H}_2(CB)}{E_B - E_C} + \frac{\overline{H}_2(AC)\,\overline{H}_1(CB)}{E_A - E_C}\right|^2. \tag{55}$$

Пусть A — состояние вакуума (все $N = 0$), B — конечное состояние ($N_k^+ = 1$, $N_l^- = 1$, все остальные $N = 0$), C — любое промежуточное состояние. Тогда $\overline{H}_1\,(AC)$, . . . означает матричный элемент величины $\overline{H}_1$, взятый между состояниями A и C, причем в $\overline{H}_2$ следует подставлять скалярный потенциал Φ_0, а в $\overline{H}_1$ — векторный потенциал $\mathbf{\Phi}$ световой волны с частотой ν. Закон сохранения импульса, учитываемый при вычислении $\overline{H}_1$, приводит лишь к четырем промежуточным состояниям:

$$C_1 \to N_k^+ = 1, \quad N_{k-n}^- = 1, \quad C_3 \to N_k^+ = 1, \quad N_{l+n}^- = 1,$$
$$C_2 \to N_{l+n}^+ = 1, \quad N_l^- = 1, \quad C_4 \to N_{k-n}^+ = 1, \quad N_l^- = 1,$$

все остальные $N = 0$.

Соответствующие матричные элементы можно вычислить, воспользовавшись выражениями (52) и (53). При этом мы приходим к выражению, которое можно рассматривать как дифференциальное сечение dQ процесса образования неполяризованным квантом света с частотой ν одной положительной частицы с энергией, заключенной между E_+ и $E_+ + dE$, и одной отрицательной частицы с энергией, заключенной между E_- и $E_- - dE$ ($E_+ + E_- = h\nu$), причем импульсы p_+ и p_- частиц образуют с направлением распространения кванта света углы ϑ_+ и ϑ_-:

$$dQ = \frac{1}{8\pi^3}\frac{e^2}{hc}\frac{1}{h^3\nu^3}\sin\vartheta_+\sin\vartheta_-\,d\vartheta_+\,d\vartheta_-\,d\varphi\,\frac{p_+p_-}{h^4}\,dE\,|\Phi_0(\mathbf{q})|^2 \times$$
$$\times\left\{\frac{E_-^2p_+^2\sin^2\vartheta_+}{(E_+ - cp_+\cos\vartheta_+)^2} + \frac{E_+^2p_-^2\sin^2\vartheta_-}{(E_- - cp_-\cos\vartheta_-)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2E_+E_-p_+p_-\sin\vartheta_+\sin\vartheta_-\cos\varphi}{(E_+ - cp_+\cos\vartheta_+)(E_- - cp_-\cos\vartheta_-)}\right\}. \tag{56}$$

Здесь φ — угол между плоскостями, образованными направлением распространения светового кванта и соответственно направлениями p_+ и p_-; $\Phi_0\,(\mathbf{q})$ — матричный элемент:

$$\Phi_0(\mathbf{q}) = \int \Phi_0\,(x)\,e^{i(\mathbf{q},\mathbf{x})}\,dV$$

[в отличие от (49) полный объем V в него уже не входит], а

$$h\mathbf{q} = (\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_- - h\mathbf{n})$$

— передаваемый электрическому полю импульс ($\mathbf{n}$ — волновой вектор светового кванта).

В кулоновском поле $\left(\Phi_0 = \frac{Ze}{r}\right)$ матричный элемент следует взять равным

$$\Phi_0(\mathbf{q}) = 4\pi Ze \frac{1}{q^2}.$$

Согласно Бете и Гайтлеру, соответствующее выражение, получаемое на основе теории дырок, имеет вид

$$dQ = \frac{1}{8\pi^3} \frac{e^2}{hc} \frac{1}{h^3\nu^3} \sin\vartheta_+ \sin\vartheta_- d\vartheta_+ d\vartheta_- d\varphi \frac{p_+p_-}{h^2} dE \, |\Phi_0(\mathbf{q})|^2 \times$$
$$\times \left\{\frac{p_+^2 \sin^2\vartheta_+ (E_-^2 - h^2c^2q^2/4)}{(E_+ - cp_+\cos\vartheta_+)^2} + \frac{p_-^2 \sin^2\vartheta_- (E_+^2 - h^2c^2q^2/4)}{(E_- - cp_-\cos\vartheta_-)^2} + \right.$$
$$+ \frac{2p_-p_+ \sin\vartheta_- \sin\vartheta_+ \cos\varphi\,(E_-E_+ + c^2h^2q^2/4)}{(E_+ - cp_+\cos\vartheta_+)(E_- - cp_-\cos\vartheta_-)} -$$
$$\left. - \frac{\frac{1}{2} h^2\nu^2 [p_+^2 \sin^2\vartheta_+ + p_-^2 \sin^2\vartheta_- + 2p_+p_- \sin\vartheta_+ \sin\vartheta_- \cos\varphi]}{(E_+ - cp_+\cos\vartheta_+)(E_- - cp_-\cos\vartheta_-)}\right\}.$$

От выражения (56), полученного из скалярного волнового уравнения, оно отличается лишь третьим слагаемым в фигурных скобках (и входящими в него членами с q^2). Однако при больших энергиях этими членами можно пренебречь, так как $hc\,|\mathbf{q}| \ll h\nu$ при $h\nu \gg mc^2$.

Если в качестве Φ_0 выбрать кулоновский потенциал, то интегрирование по углам в предельном случае $h\nu \gg mc^2$ осуществляется без труда [15], и мы получаем

$$dQ = \frac{Z^2e^2}{hc}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{32}{3} \frac{E_+E_-}{h^3\nu^3}\left(\ln\frac{2E_+E_-}{h\nu mc^2} - \frac{1}{2}\right)$$

и для полного сечения

$$Q = \frac{Z^2e^2}{hc}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{16}{9}\ln\frac{2h\nu}{mc^2} - \frac{104}{27}\right).$$

Согласно Бете и Гайтлеру, соответствующие выражения в теории дырок имеют вид

$$dQ = \frac{Z^2e^2}{hc}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 4\,\frac{E_+^2 + E_-^2 + \frac{2}{3}E_+E_-}{h^3\nu^3}\left(\ln\frac{2E_+E_-}{h\nu mc^2} - \frac{1}{2}\right)$$

[15] Мы весьма признательны Бете, предоставившему нам рукопись своей работы, которая будет опубликована в «Proc. Cambridge Philos. Soc.» и содержит аналогичное интегрирование. (*H. Bethe*. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1934, 30, 524.— *Ред.*).

и

$$Q = \frac{Z^2e^2}{hc}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{28}{9}\ln\frac{2h\nu}{mc^2} - \frac{218}{27}\right).$$

Итак, сечение в предельном случае $h\nu \gg mc^2$ по нашей теории составляет $^4/_7$ от сечения на основе теории дырок.

В заключение вычислим поляризацию вакуума, возникающего при наложении электростатического поля. Для этого вычислим добавочную плотность заряда $\rho(x)$, возникающую за счет поля Φ_0 имеющейся в пространстве плотности «внешнего» заряда $\rho_0(x)$. Таким образом, $\rho(x)$ представляет собой плотность заряда, индуцированного потенциалом Φ_0 в пространстве, которое *пусто* в отношении положительных и отрицательных частиц, описываемых волновым уравнением.

Полезно воспользоваться разложением Фурье для плотности. Коэффициенты Фурье получаем из (16) и (19):

$$\rho(\zeta) = \frac{1}{V}\int \rho(x)\, e^{-i(\zeta x)} dV = \sum_k (p_l^* q_k^* - p_k q_l),$$

где $\mathbf{l} = \mathbf{k} + \boldsymbol{\zeta}$. Далее, из (27), вводя операторы a и b, находим

$$\rho(\zeta) = \frac{1}{2}\sum_k\left\{\frac{E_k - E_l}{\sqrt{E_k E_l}}(a_k^* a_l - b_l^* b_k) + \frac{E_k + E_l}{\sqrt{E_k E_l}}(a_k^* b_l^* - a_l b_k)\right\}. \tag{57}$$

Применим теперь этот оператор к функционалу Шредингера для вакуума $c\,(\ldots 0\ldots;\ \ldots 0\ldots)$, возмущенного внешним полем Φ_0. В первом порядке теории возмущений из (52) получим

$$c(\ldots 0\ldots;\ \ldots 0\ldots) = c_0(\ldots 0\ldots;\ \ldots 0\ldots) -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{kl}\Phi_{kl}^0\,\frac{E_k - E_l}{\sqrt{E_k E_l}\,(E_k + E_l)}\,c_0(\ldots 1_k\ldots;\ \ldots 1_l\ldots), \tag{58}$$

где $c_0(\ldots 0\ldots;\ \ldots 0\ldots)$ и $c_0(\ldots 1_k\ldots;\ \ldots 1_l\ldots)$ — функционалы состояний в вакууме в отсутствие внешнего поля и соответственно в случае ($N_k^+ = 1$, $N_l^- = 1$, все остальные $N = 0$). Если теперь записать математическое ожидание оператора $\rho\,(\zeta)$ для состояния $c\,(\ldots 0\ldots;\ \ldots 0\ldots)$, то оно окажется равным

$$\bar{\rho}(\zeta) = -\frac{l}{2}\Phi_0(\zeta)\sum_k\frac{(E_k - E_l)^2}{E_k E_l (E_k + E_l)}, \qquad \mathbf{l} = \mathbf{k} + \boldsymbol{\zeta}.$$

Нетрудно видеть, что сумма по k логарифмически расходится. Действительно, интегрируя по направлениям $\mathbf{k}$, находим

$$\bar{\rho}(\zeta) = -\frac{e}{12hc\pi^2\zeta^2}\Phi_0(\zeta)\int_{k_0}^{\infty}\frac{d|k|}{|k|} + \text{конечный член}.$$

Возвращаясь к координатному пространству, получаем:

$$\bar{\rho}(x) = K\Delta\Phi_0 + \text{конечный член},$$

$$K = \frac{1}{12\pi^2}\frac{e}{hc}\int\frac{d\,|k|}{|k|}.$$

Плотность индуцированного заряда и плотность внешнего заряда $\left(\rho_0 = -\frac{1}{4\pi}\Delta\Phi_0\right)$ имеют противоположные знаки и пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности $4\pi K$ расходится, вследствие чего любой внешний заряд должен был бы полностью компенсироваться индуцированным зарядом. Этот результат полностью совпадает с результатами Дирака [16], полученными на основе теории дырок. Коэффициент b/k также совпадает.

Цюрих,
Физический институт Высшей технической школы

[16] *P. A. M. Dirac.* Solvay-Bericht, 1933.

ЗАМЕЧАНИЯ О ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ЭФФЕКТАХ В ТЕОРИИ ПОЗИТРОНОВ *

(Совместно с М. Роузом)

Указан простой метод вычисления 4-вектора индуцированной плотности заряда, основанный на вычислительном формализме вычитания в теории позитронов. Далее, в общем случае полей, зависящих от времени, результат получен непосредственно, без использования лоренц-инвариантности теории.

Введение

Настоящая статья публикуется с целью показать, что интегралы, определяющие дополнительную плотность поляризации δj_0 и соответствующую плотность тока $\delta \mathbf{j}$, индуцируемые согласно теории позитронов первоначальной плотностью заряда j_0 и плотностью тока $\mathbf{j}$, можно вычислять более простым способом, чем это было сделано раньше [1]. Мы будем, однако, последовательно ограничиваться приближением, в котором учитываются только эффекты, пропорциональные первой степени постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$. В этом случае связь δj_0 и $\delta \mathbf{j}$ со скалярным и векторным потенциалами A_0 и $\mathbf{A}$ первоначального поля оказывается линейной, и потому мы можем, не ограничивая общности, брать потенциал поля в виде плоских волн:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \exp(i\,[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) - k_0 t]) + \text{компл.-сопр.}, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{a} \exp(i\,[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) - k_0 t]) + \text{компл.-сопр.} \end{aligned} \tag{1}$$

Ниже мы будем считать $\hbar/mc$ единицей длины, $\hbar/mc^2$ — единицей времени и массу электрона m — единицей массы.

Для простоты мы отдельно рассмотрим частный случай $\mathbf{A} = 0$, интересуясь только плотностью заряда j_0, но не плотностью тока $\mathbf{j}$. Согласно Серберу [1], тогда нетрудно будет рассмотреть и общий случай, характеризуемый формулами (1). В частном случае

$$A_0 = a_0 \exp(i[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) - k_0 t)]) + \text{компл.-сопр.}, \quad \mathbf{A} = 0, \tag{1a}$$

где в соответствии с уравнениями Максвелла имеем

$$j_0 = (k^2/4\pi)\, A_0; \tag{2}$$

далее, по Гейзенбергу [2], для разности матриц плотности в присутствии внешнего поля и без поля, умножая на заряд электрона e и суммируя по

---

* *Remarks on the polarization effects in the positron theory.*— Phys. Rev., 1936, 49, 462—465.

[1] *W. Heisenberg.* Z. Phys., 1934, 90, 209; *R. Serber.* Phys. Rev., 1935, 48, 49; *E. A. Uehling.* Phys. Rev., 1935, 48, 55.

[2] *W. Heisenberg.* Z. Phys., 1934, 90, 221 [уравнение (34) и далее].

спиновому индексу, мы получаем в рассматриваемом приближении следующее выражение:

$$e\sum_{\rho=1}^{4}(\mathbf{x}', \rho\,|\,\delta R\,|\,\mathbf{x}'', \rho) = -\frac{\alpha}{\pi}F(\mathbf{k}, k_0, \mathbf{x})\,j_0. \tag{3}$$

Здесь

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}'', \tag{4}$$

а F определяется как

$$F(\mathbf{k}, k_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{\pi k^2}\int \frac{\varepsilon\varepsilon' - \left(q^2 + 1 - \frac{k^2}{4}\right)}{\varepsilon\varepsilon'}\,\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{(\varepsilon + \varepsilon')^2 - k_0^2}\exp\{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})\}\,d\mathbf{q}, \tag{5}$$

причем

$$\varepsilon = \left[1 + \left(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2\right]^{1/2}, \qquad \varepsilon' = \left[1 + \left(\mathbf{q} - \frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{6}$$

Для больших значений q, или, что то же самое, для малых k, имеем разложение

$$\varepsilon \sim \varepsilon' \sim (1 + q^2)^{1/2}$$

и более точно

$$\varepsilon\varepsilon' \sim 1 + q^2 + \frac{k^2}{4} - \frac{1}{2}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2(1 + q^2)^{-1},$$

так что F можно разделить на два слагаемых

$$F(\mathbf{k}, k_0, \mathbf{x}) = F_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + F_1(\mathbf{k}, k_0, \mathbf{x}), \tag{7}$$

где

$$F_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\left[1 - \frac{q^2\cos^2\vartheta}{1 + q^2}\right]\frac{\exp\{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})\}}{(1 + q^2)^{3/2}}\,d\mathbf{q}. \tag{8}$$

Здесь ϑ — угол между направлениями векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{x}$, а F_1 — функция, конечная при $x = 0$ и имеющая там значение

$$f(\mathbf{k}, k_0) \equiv F_1(\mathbf{k}, k_0, 0) = \frac{1}{\pi k^2}\int\left\{\frac{\varepsilon\varepsilon' - \left(q^2 + 1 - \frac{k^2}{4}\right)}{\varepsilon\varepsilon'}\,\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{(\varepsilon + \varepsilon')^2 - k_0^2} - \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{q^2\cos^2\vartheta}{1 + q^2}\right)\frac{1}{(1 + q^2)^{3/2}}\right\}d\mathbf{q}. \tag{9}$$

Хотя каждая из частей последней формулы при больших $|\mathbf{q}|$ уменьшается пропорционально $|\mathbf{q}|^{-2}$ и потому соответствующие части интеграла логарифмически расходятся, разность в подынтегральном выражении уменьшается при этом быстрее, а именно как $|\mathbf{q}|^{-5}$, и в целом интеграл сходится. Напротив, интеграл (8), который можно выразить через цилиндрические функции, для малых значений $\mathbf{x}$ ведет себя как $\ln|\mathbf{x}| + \mathrm{const}$.

Однако в принятом в настоящее время формальном аппарате теории позитронов, который, к сожалению, еще не заменен более удовлетворительным формализмом, левая часть уравнения (3) для $\mathbf{x} = 0$ сразу не

отождествляется с физической плотностью электрического заряда, но сначала в нее вводятся зависящие от x вычитаемые члены, подобранные таким образом, чтобы разность оставалась конечной при x = 0 («вычитательная физика»). При этом мы сохраним согласие с более общим предположением Гейзенберга, отождествляя, в рассматриваемом здесь случае и в применяемом приближении (члены, пропорциональные α), вычитаемые члены с функцией F_0 (**k**, x), определяемой формулой (8). Тогда в соответствии с соотношением (3) мы получаем

$$\delta j_0 = -\frac{\alpha}{\pi} f(\mathbf{k}, k_0)\, j_0, \tag{10}$$

где функция f определена формулой (8).

Вычисление интеграла

В то время как Сербер вычислил интеграл (9) только для частного случая $k_0 = 0$ (поля́, не зависящие от времени), а для получения результата в общем случае использовал лоренц-инвариантный вычитательный формализм, мы вычислим здесь общий интеграл (9) непосредственно. Для этого введем кроме азимута φ вокруг координатной оси, параллельной **k**, также переменные v, w, определяемые формулами:

$$\frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon') = v, \qquad \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon') = w, \tag{11}$$

где ε и ε' заданы уравнениями (6). Из этих уравнений, вычисляя функциональный определитель, получаем для элемента объема **q**-пространства простое выражение

$$d\mathbf{q} = \frac{2}{k}\varepsilon\varepsilon' dv\,dw\,d\varphi = \frac{1}{\varkappa}\varepsilon\varepsilon' dv\,dw\,d\varphi. \tag{12}$$

Здесь мы ввели для удобства сокращенное обозначение

$$k/2 = \varkappa. \tag{13}$$

Из уравнений (6) далее получаем:

$$\frac{1}{2}(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) = v^2 + w^2 = q^2 + \varkappa^2 + 1, \tag{14а}$$

$$\frac{1}{4}(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) = vw = \frac{1}{2}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}). \tag{14б}$$

Из этих уравнений следуют неравенства:

$$v^2 w^2 \leqslant \varkappa^2 (w^2 - \varkappa^2 - 1 + v^2), \qquad v^2 \leqslant \varkappa^2 \frac{w^2 - \varkappa^2 - 1}{w^2 - \varkappa^2}.$$

Интегрирование по всему **q**-пространству можно выполнить, если сначала проинтегрировать по поверхности w = const при фиксированном значении

w, причем v принимает значения в интервале

$$-\varkappa\left(\frac{w^2-\varkappa^2-1}{w^2-\varkappa^2}\right)^{1/2}\leqslant v\leqslant\varkappa\left(\frac{w^2-\varkappa^2-1}{w^2-\varkappa^2}\right)^{1/2}, \tag{15}$$

и после этого w изменять в интервале от $(\varkappa^2+1)^{1/2}$ до ∞:

$$(\varkappa^2+1)^{1/2}\leqslant w\leqslant\infty. \tag{16}$$

Точка $v=0$, $w=(\varkappa^2+1)^{1/2}$ соответствует началу координат $\mathbf{q}=0$.

Прежде чем приступить к вычислению интеграла (9), заметим, что для второй (вычитаемой) части (9) использовать переменные v и w было бы неудобно. Для устранения этого неудобства мы воспользуемся тем обстоятельством, что для больших значений W поверхность $w=\text{const}=W$ близка к сферической. Точнее говоря, из (14а) следует, что наименьшие и наибольшие значения q на этой поверхности, соответствующие $v=0$ и $v_{\text{макс}}$ и определяемые формулами:

$$q_1^2=W^2-\varkappa^2-1,$$

$$q_2^2=(W^2-\varkappa^2-1)\left(1+\frac{\varkappa^2}{W^2-\varkappa^2}\right),$$

обладают тем свойством, что отношение q_2/q_1 стремится к единице, если W возрастает бесконечно. В таком случае нам следовало бы сначала интегрировать обе части (9) по объему, ограниченному той же поверхностью $w=\text{const}$, а затем переходить к пределу $W\to\infty$. Вместо этого мы распространим вычитаемый интеграл только по сфере с радиусом $q_1=(W^2-\varkappa^2-1)^{1/2}$, вписанной в рассматриваемую поверхность. Вносимая этим ошибка безусловно меньше, чем вычитаемый интеграл, взятый по сферическому слою между радиусами q_1 и q_2, определенными выше, так как знак подынтегрального выражения в этой области не изменяется; этот же интеграл стремился к нулю при $W\to\infty$, поскольку вычитаемый интеграл расходится только логарифмически, а $\lim q_2/q_1=1$.

Выполняя интегрирование по азимуту и вводя в вычитаемом интеграле сферические полярные координаты, теперь получаем из (9)

$$f(k,k_0)=\lim_{W\to\infty}[J_1(W)-J_2(W)], \tag{17}$$

где

$$J_1(W)=\frac{1}{2\varkappa^3}\int\limits_{(\varkappa^2+1)^{1/2}}^{W}\frac{w\,dw}{w^2-k_0^2/4}\int\limits_{-\varkappa z}^{\varkappa z}(\varkappa^2-v^2)\,dv, \tag{18}$$

z означает

$$z=[(w^2-\varkappa^2-1)/(w^2-\varkappa^2)]^{1/2} \tag{19}$$

и

$$J_2(W)=\int\limits_0^{(W^2-\varkappa^2-1)^{1/2}}\left(1-\frac{q^2/3}{1+q^2}\right)\frac{q^2dq}{(1+q^2)^{3/2}}. \tag{20}$$

Производя в (18) интегрирование по v и вводя вместо w в качестве переменной интегрирования z по формуле (19), получаем

$$w^2 = \frac{1+\varkappa^2(1-z^2)}{1-z^2}, \qquad wdw = \frac{zdz}{(1-z^2)^2},$$

$$J_1(Z) = \int\limits_0^Z \frac{z^2 - z^4/3}{1-z^2} \frac{dz}{1+(\varkappa^2 + k_0^2/4)(1-z^2)}.$$

Здесь переменная Z связана с верхним пределом W в интеграле (18) соотношением, аналогичным формуле (19):

$$Z = [(W^2 - \varkappa^2 - 1)/(W^2 - \varkappa^2)]^{1/2}, \tag{19a}$$

и при $W \to \infty$ стремится к единице.

После замены переменной в интеграле (20)

$$q/(1+q^2)^{1/2} = z, \qquad dq/(1+q^2)^{3/2} = dz$$

верхний предел его, выраженный через новую переменную z, будет точно совпадать с величиной Z, определенной формулой (19a), и мы получаем

$$J_2(W) = \int\limits_0^Z \frac{z^2 - z^4/3}{1-z^2}\, dz. \tag{20a}$$

Подынтегральное выражение для разности $J_1 - J_2$ конечно при $z = 1$, и мы теперь легко можем перейти к пределу $Z \to 1$ (соответственно к пределу $W \to \infty$) и получить окончательный результат

$$f(k, k_0) = -\int\limits_0^1 \frac{(\varkappa^2 - k_0^2/4)(z^2 - z^4/3)}{1+(\varkappa^2 - k_0^2/4)(1-z^2)}\, dz. \tag{21}$$

Наиболее важен здесь тот факт, что f зависит не от самих k и k_0 в отдельности, а от их простой комбинации:

$$L = \varkappa^2 - k_0^2/4 = (k^2 - k_0^2)/4, \tag{22}$$

$$f(k, k_0) = f(L) = -L\int\limits_0^1 \frac{z^2 - z^4/3}{1+L(1-z^2)}\, dz. \tag{21a}$$

Этот результат следует из лоренц-инвариантности формального аппарата и на этом основании был введен Сербером без прямого доказательства [3].

---

[3] В частном случае $k_0 = 0$ Сербер дает для $f(k^2)$ (наша функция f связана с его функцией χ соотношением $f = \chi/\pi k^2$) формулу [ср. его равенство (7)]

$$f = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-z^2)\ln[1+(k^2/4)(1-z^2)]\, dz.$$

Используя равенство $(1-z^2)dz = d\,(z - z^3/3)$ и интегрируя по частям, мы сразу получаем отсюда наше выражение (21) при $k_0 = 0$.

Для малых значений L можно пренебречь в знаменателе членом, пропорциональным L, после чего в согласии с первоначальным результатом Гейзенберга находим

$$f(L) \cong -4L/15 \text{ для } |L| \ll 1. \tag{23}$$

Далее, из (21а) для $f(L)$ получается степенной ряд по L, сходящийся при $|L| < 1$.

Точное вычисление интеграла (21а), выполняемое элементарно, дает следующий результат:

$$f(L) = -\frac{1}{3}\left[-\frac{5}{3} + \frac{1}{L} + \frac{(L+1)(2L-1)}{L}\varphi(L)\right], \tag{24}$$

где

$$\varphi(L) = \int_0^1 dz\,[1 + L(1 - z^2)]^{-1}. \tag{25}$$

Имеем:

$$\varphi(L) = [L(1+L)]^{-1/2} \ln[(1+L)^{1/2} + L^{1/2}] \text{ для } L > 0, \tag{26а}$$

$$\varphi(L) = [|L|(1-|L|)]^{-1/2} \arcsin|L|^{1/2} \text{ для } -1 < L < 0, \tag{26б}$$

$$\varphi(L) = -[|L|(|L|-1)]^{-1/2} \ln[(|L|-1)^{1/2} + |L|^{1/2}] \text{ для } L < -1. \tag{26в}$$

В последнем случае знаменатель подынтегрального выражения в некоторой точке пути интегрирования обращается в нуль, и потому необходимо брать в ней главное значение. Для больших положительных значений L получается асимптотическое выражение

$$f(L) \cong \frac{5}{9} - \frac{2}{3}\ln(2L^{1/2}) \text{ для } L \gg 1^4. \tag{27}$$

Что касается упомянутого нами в начале общего случая, когда присутствует также векторный потенциал, определяемый формулой (1), то рассматриваемый здесь метод снова подтверждает общий результат Сербера:

$$\delta j_0 = -\frac{\alpha}{\pi} f(L)\, j_0, \qquad \delta\mathbf{j} = -\frac{\alpha}{\pi} f(L)\,\mathbf{j}, \tag{28}$$

[4] В случае $k_0 = 0$ имеем $L = k^2/4$, и формулы (24) и (26а) дают

$$f = -\frac{1}{3}\left\{-\frac{5}{3} + \frac{4}{k^2} + 2\frac{(k^2+4)^{1/2}(k^2-2)}{k^3}\ln\frac{(k^2+4)^{1/2}+k}{2}\right\}.$$

Этот результат в неявном виде содержится в формуле (22) работы Юлинга (см. прим. 1). Действительно, чтобы вычислить в борновском приближении рассеяние двух частиц, окруженных непрерывно распределенным зарядом, следует разложить плотность электрического заряда в ряд Фурье и отождествить k с разностью волновых векторов падающего и рассеянного потоков частиц (измеряемой в единицах $mc/\hbar$).

где f опять определяется равенством (21а). В этом случае только вычитаемые интегралы, обусловленные наличием сингулярностей, становятся более сложными [5].

Функция $U(r)$

В заключение мы сделаем несколько замечаний по поводу функции $U(r)$, определяемой уравнением

$$\delta j_\lambda(\mathbf{x}') = \frac{\alpha}{4\pi^2}\int U(r)\,\Delta j_\lambda(\mathbf{x}'')\,d\mathbf{x}'', \qquad r = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|. \tag{29}$$

Эта формула справедлива в случае, когда j_λ не зависит от времени. Согласно Юлингу [6], эта функция определяет также энергию взаимодействия $V(r)$ двух частиц с зарядами $Z'e$ и $Z''e$, разделенных расстоянием r:

$$V(r) = Z'Z''e^2\,[1/r - (\alpha/\pi)\,U(r)].$$

Из определений (29) и (28) следует, что

$$U(r) = \frac{1}{2\pi^2}\int \frac{f(k^2)}{k^2}\exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\}\,d\mathbf{k} = \frac{2}{\pi}\int \frac{f(k^2)}{k^2}\frac{\sin kr}{r}\,kdk. \tag{30}$$

Теперь в интеграле (21) для f (с $k_0 = 0$) можно элементарным образом выполнить интегрирование по k, после чего оставшийся интеграл по z с помощью подстановки $z = (q^2 - 1)^{1/2}/q$ и интегрирования по частям сводится к известным интегралам для функций Бесселя второго рода:

$$K_0(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-qx}}{(q^2-1)^{1/2}}\,dq, \qquad K_1(x) = x\int_1^\infty e^{-qx}(q^2-1)^{1/2}\,dq,$$

и к неопределенному интегралу от K_0

$$B(x) = \int_x^\infty K_0(y)\,dy = \int_1^\infty \frac{e^{-qx}}{q\,(q^2-1)^{1/2}}\,dq.$$

Окончательный результат имеет вид

$$U(r) = \frac{1}{3r}\left\{2\left(\frac{r^2}{3}+1\right)K_0(2r) - \frac{2r}{3}(2r^2+5)\,K_1(2r) + r\left(\frac{4r^2}{3}+3\right)B(2r)\right\}.$$

Из этого выражения можно легко получить асимптотические формулы для $U(r)$ при больших и малых значениях r. Они были найдены Юлингом [7].

---

[5] Тот факт, что рассматриваемые здесь поляризационные эффекты исчезают для $L = 0$, если даже k и k_0 отличны от нуля, ведет к тому, что вывод Гейзенберга о поправке порядка α к формуле Клейна — Нишины для рассеяния света свободными электронами (ср. *W. Heisenberg*. Z. Phys., 1934, 90, 223, Anm. 1) не может быть сохранен. Действительно, рассмотренный им эффект исчезает, потому что интенсивность рассеянного света определяется только членами с $L = 0$. Однако определенный ответ на вопрос о поправках к формуле Клейна — Нишины в рассматриваемом здесь приближении может быть получен лишь при более детальном исследовании.

[6] *E. Uehling*. Phys. Rev., 1935, 48, 55 [прим. 1, формула (21)].

[7] Там же, формулы (9) и (10).

К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МАТРИЦ ДИРАКА *

§ 1. Введение

Под матрицами Дирака мы будем понимать матрицы, которые удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) = \delta_{\mu\nu} \tag{I}$$

$$(\delta_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu,\ \delta_{\nu\nu} = 1;\ \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Для простоты мы всегда будем говорить о матрицах с четырьмя строками и четырьмя столбцами. Известно, что все существенные свойства таких матриц не зависят от их конкретного выбора и однозначно определяются соотношениями (I) и тем, что матрицы имеют четыре строки и четыре столбца. Поэтому мы будем сознательно избегать всего, что связано с конкретным выбором используемых матриц.

Тем не менее существует ряд теорем, единственное известное к настоящему времени доказательство которых связано именно с конкретным выбором матриц. Такова, например, следующая фундаментальная теорема.

Фундаментальная теорема. Если γ^{μ} *и* γ'^{μ} *— две системы матриц с четырьмя строками и четырьмя столбцами, причем обе удовлетворяют одним и тем же соотношениям*:

$$\frac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) = \delta_{\mu\nu}, \qquad \frac{1}{2}(\gamma'^{\mu}\gamma'^{\nu} + \gamma'^{\nu}\gamma'^{\mu}) = \delta_{\mu\nu}, \tag{I'}$$

то существует неособенная матрица S (т. е. такая, что ее определитель отличен от нуля, и, следовательно, существует обратная ей матрица S^{-1}), *удовлетворяющая условию*

$$\gamma'^{\mu} = S\gamma^{\mu}S^{-1}. \tag{1}$$

В частности, эта теорема неоднократно встречается в книге Ван-дер-Вардена[1]. Однако доказательство, приведенное в этой книге, основано на общей теории групп, и наша теорема появляется как частный случай общей теоремы о представлении конечных групп матрицами. Мы считали полезным дать ее элементарное доказательство для физиков и обнаружили, что метод Шура[2] позволяет легко выполнить эту задачу.

Ниже (§ 3) мы подробно излагаем это доказательство. Затем выводим из фундаментальной теоремы некоторые следствия относительно того, как ведут себя волновые функции Дирака при преобразованиях Лоренца, а

---

* *Contributions mathématique à la théorie des matrices de Dirac.*— Ann. Inst. H. Poincaré 1936, 6, 109—136.

[1] *B. L. van der Waerden.* Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Berlin, 1932. (Русск. пер.: *Б. Л. Ван-дер-Варден.* Метод теории групп в квантовой механике. Харьков, 1938.— *Ред.*).

[2] *J. Schur.* Berliner Sitzungsberichte, Math.-phys. Kl., 1905, S. 406.

также относительно соответствия между волновыми функциями с положительной энергией и волновыми функциями с отрицательной энергией — соответствия, которое однозначно и, следовательно, инвариантно относительно преобразований Лоренца. Существование такого соответствия хорошо известно и было использовано Л. де Бройлем [3] в его работе, посвященной природе света. Мы устанавливаем это соответствие (и это ново), не обращаясь к конкретному численному выражению матриц Дирака.

Наконец, мы докажем при тех же условиях несколько тождеств между квадратами величин, ковариантных относительно преобразований Лоренца. Эти тождества известны, но до сих пор их лишь проверяли, подставляя конкретные численные значения; алгебраического же вывода их не существовало [4]. При доказательстве этих тождеств мы используем, с одной стороны, одно тождество, полученное при доказательстве фундаментальной теоремы [см. соотношение (II)], а с другой стороны — существование некоторой матрицы, полученной при рассмотрении физических приложений группы Лоренца в § 4 [соотношение (15)].

§ 2. Некоторые предварительные замечания

Рассмотрим 16 элементов

$$
\begin{array}{l}
I, \\
\gamma^1,\ \gamma^2,\ \gamma^3,\ \gamma^4, \\
i\gamma^2\gamma^3,\ \ i\gamma^3\gamma^1,\ i\gamma^1\gamma^2,\ i\gamma^1\gamma^4,\ i\gamma^2\gamma^4,\ i\gamma^3\gamma^4, \\
i\gamma^1\gamma^2\gamma^3,\ i\gamma^1\gamma^2\gamma^4,\ i\gamma^3\gamma^1\gamma^4,\ \ i\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \\
\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4,
\end{array}
\qquad (2)
$$

образующих систему гиперкомплексных чисел. Обозначим различные строки этой таблицы через

$$I,\ \gamma^{\mu},\ \gamma^{[\mu\nu]},\ \gamma^{[\lambda\mu\nu]},\ \gamma^5, \qquad (2')$$

где скобки указывают на антисимметрию величин γ относительно заключенных в эти скобки индексов, а в выражения $\gamma^{[\mu\nu]}$ и $\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ необходимо включить множители i. Эти множители выбираются так, чтобы квадрат каждой величины γ^A был равен единичной матрице:

$$(\gamma^A)^2 = I$$

(если индексы пробегают всю гиперкомплексную систему от 1 до 16, мы будем использовать в качестве индексов большие латинские буквы A, B, ...).

Лемма 1. Произведение двух элементов γ^A и γ^B с точностью до численного множителя ε_{AB}, который может принимать значения ± 1, $\pm i$,

---

[3] *L. de Broglie.* Une nouvelle conception de la lumière. Paris, 1934.

[4] *L. de Broglie.* L'électron magnétique. Paris, 1934, в частности, с. 161, формула (14); с. 189, формула (14); с. 220, формула (24), с. 221, формула (28). (Русск. пер.: *Л. де Бройль.* Магнитный электрон. Харьков, 1936.— *Ред.*).

всегда равно третьему элементу γ^C:

$$\gamma^A\gamma^B = \varepsilon_{AB}\gamma^C. \tag{3}$$

Это утверждение следует непосредственно из соотношений (I).

Лемма 2. Если в произведении $\gamma^A\gamma^B$ *элемент* γ^A *фиксирован, а* γ^B *пробегает всю систему из* 16 *элементов, то элемент* γ^C, *определяемый соотношением* (3), *также пробегает всю систему из* 16 *элементов.*

Действительно, из $\gamma^A\gamma^B = \gamma^A\gamma^D$ следует, что $\gamma^B = \gamma^D$. Поэтому при выбранном γ^A 16 элементов $\gamma^A\gamma^B$ отличны друг от друга.

Будем представлять теперь γ^μ, а следовательно и γ^A, матрицами с четырьмя строками и четырьмя столбцами.

Лемма 3. Сумма диагональных элементов (которую мы для краткости будем называть «диагональной суммой» и обозначать D) *всех* γ^A, *за исключением единичной матрицы, равна нулю*:

$$D(\gamma^A) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma^A \neq I.$$

Справедливость этого утверждения следует из соотношений (I) и того факта, что диагональная сумма произведения двух матриц не зависит от порядка сомножителей:

$$D(AB) = D(BA).$$

Например, при $\mu \neq \nu$

$$\frac{1}{2}[-\gamma^\nu\cdot(\gamma^\mu\gamma^\nu) + (\gamma^\mu\gamma^\nu)\cdot\gamma^\nu] = \gamma^\mu$$

и поэтому

$$D(\gamma^\mu) = 0.$$

Следовательно, это рассуждение верно и при $\mu = 5$ $(\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4)$:

$$D(\gamma^5) = 0.$$

С другой стороны, при $\mu \neq \nu$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu,$$

откуда следует, что соотношение

$$D(\gamma^{[\mu\nu]}) = 0$$

верно и при $\mu = 5$:

$$D(\gamma^5\gamma^\nu) = D(\gamma^{[\lambda\mu\nu]}) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что 15 величин, отличных от I, не могут быть представлены единичной матрицей.

Лемма 4. Матрицы γ^A *линейно-независимы.*

Из

$$\sum_{A=1}^{16} C_A\gamma^A = 0,$$

где C_A — обычные числа, следует, что

$$C_A = 0 \quad \text{при всех } A.$$

Действительно, чтобы убедиться в том, что коэффициент C_B при некотором произвольно фиксированном γ^B равен нулю, достаточно умножить равенство

$$\sum_A C_A \gamma^A = 0$$

на γ^B:

$$\sum_{\substack{A \\ (A \neq B)}}' C_A \gamma^A \gamma^B + C_B = 0.$$

Произведения $\gamma^A \gamma^B$ при $A \neq B$ отличны от единичной матрицы; следовательно, если мы образуем диагональную сумму, то из леммы 3 будет следовать, что $C_B = 0$.

Лемма 4 весьма существенна, ибо позволяет сделать заключение о том, что соотношениям (I) не могут удовлетворять матрицы, у которых число строк и столбцов меньше четырех. Действительно, если число строк и столбцов меньше четырех, то не может существовать 16 линейно-независимых матриц. Наоборот, имеется ровно 16 линейно-независимых матриц с четырьмя строками и столбцами, поскольку число элементов таких матриц равно 16. Отсюда следует лемма.

Лемма 5. Любую матрицу X с четырьмя строками и четырьмя столбцами можно представить в виде

$$X = \sum_A x_A \gamma^A,$$

если выбрать надлежащим образом числа x_A; γ^A — матрицы системы (2).

Лемма 6. При всех γ^μ и γ^A

$$\gamma^\mu \gamma^A \gamma^\mu = \pm \gamma^A,$$

и любой наперед заданной матрице γ^A можно поставить в соответствие $\gamma^\varkappa$, такую, что в правой части будет стоять знак минус:

$\gamma^\varkappa \gamma^A \gamma^\varkappa = -\gamma^A$ при $\gamma^A \neq I$ и надлежащим образом выбранной $\gamma^\varkappa$.

Первое утверждение следует непосредственно из соотношений (I). Что же касается второго, то ясно, что в качестве $\gamma^\varkappa$ можно выбрать:

при $\gamma^A = \gamma^\varkappa$ $\quad \gamma^\varkappa \neq \gamma^\nu$,

при $\gamma^A = \gamma^{[\mu\nu]}$ $\quad \gamma^\varkappa = \gamma^\mu$,

при $\gamma^A = \gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ $\quad \varkappa$ отлична от λ, μ и ν,

при $\gamma^A = \gamma^5$ $\quad$ любую γ^μ.

Отсюда вытекает следующая, весьма важная лемма.

Лемма 7. Если матрица X с четырьмя строками и четырьмя столбцами коммутирует с любой γ^μ (и, следовательно, с любой γ^A), то она кратна единичной матрице I.

Из равенства $X\gamma^\mu = \gamma^\mu X$ при всех γ^μ следует $X = c\cdot I$, где c — обычное число.

Лемма 5 позволяет представить X в виде

$$X = \sum_A x_A\gamma^A.$$

Пусть $\gamma^B \neq I$ — произвольно выбранная матрица. Выберем $\gamma^\varkappa$ так, чтобы $\gamma^\varkappa\gamma^B\gamma^\varkappa = -\gamma^B$ (по лемме 6 такая матрица $\gamma^\varkappa$ существует). Составим выражение

$$\gamma^\varkappa X\gamma^\varkappa = -x_B\gamma^B + \sum_{\substack{A\\(\gamma^A\neq\gamma^B)}}' \pm x_A\gamma^A.$$

С другой стороны,

$$X = +x_B\gamma^B + \sum_{(\gamma^A\neq\gamma^B)}' x_A\gamma^A.$$

По предположению,

$$\gamma^\varkappa X\gamma^\varkappa = X,$$

что возможно лишь при $x_B = 0$. Но γ^B — любой из 15 элементов $\gamma^A \neq I$. Отсюда следует, что коэффициент при I в сумме $\Sigma x_A\gamma^A$ есть единственный коэффициент, отличный от нуля, что и требовалось доказать.

§ 3. Доказательство фундаментальной теоремы

Прежде чем переходить к фундаментальной теореме, отметим соотношение (4)

$$\gamma^A\gamma^B = \varepsilon_{AB}\gamma^C, \tag{4}$$

которое получится, если учесть соотношение (3)

$$\gamma^B = \varepsilon_{AB}\gamma^A\gamma^C$$

и записать обратную матрицу согласно тому же равенству (3)

$$\gamma^B = \frac{1}{\varepsilon_{AB}}\gamma^C\gamma^A,$$

отсюда

$$\gamma^C\gamma^A = \gamma^B\varepsilon_{AB}. \tag{5}$$

Если рассмотреть теперь второй набор матриц γ'^μ, удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{1}{2}(\gamma'^\mu\gamma'^\nu + \gamma'^\nu\gamma'^\mu) = \delta_{\mu\nu},$$

то соотношение

$$\gamma'^A\gamma'^B = \varepsilon_{AB}\gamma'^C \tag{4'}$$

будет выполняться и для этой системы с тем же коэффициентом ε_{AB}, поскольку эти соотношения представляют собой не что иное, как следствия соотношений (I′).

Следуя методу Шура, образуем прежде всего с помощью произвольной матрицы с четырьмя строками и четырьмя столбцами, которую обозначим через F, выражение

$$\sum_{B=1}^{16} \gamma'^B F \gamma^B = S. \tag{6}$$

Из соотношения (4′) получим

$$\gamma'^A S = \sum_{B=1}^{16} \varepsilon_{AB}\gamma'^C F \gamma^B.$$

Но если A фиксировано, а B пробегает всю систему матриц γ, то C также пробегает всю систему и каждое значение принимает ровно один раз. Следовательно, записывая выражение

$$\gamma'^A S = \sum_{C=1}^{16} \varepsilon_{AB}\gamma'^C F \gamma^B,$$

мы лишь изменяем обозначения.

С другой стороны, пусть

$$S = \sum_{C=1}^{16} \gamma'^C F \gamma^C.$$

Составим выражение $S\gamma^A$, которое получится, если принять во внимание (5):

$$S\gamma^A = \sum_{C=1}^{16} \gamma'^C F \gamma^B \varepsilon_{AB}.$$

Сравнивая два полученных выражения, находим

$$\gamma'^A S = S\gamma^A. \tag{7}$$

Тем самым мы уже получили бы доказательства фундаментальной теоремы, если бы случай, когда матрица S и ее определитель обращаются в нуль, был исключен заранее.

Итак, требуется доказать, что при надлежащим образом выбранных матрицах F всегда можно исключить случай вырожденной матрицы S.

Прежде всего нетрудно видеть, что всегда можно получить матрицу S, отличную от нулевой. Действительно, если бы матрица S, определяемая соотношением (6), была равна нулю при всех F, то равенство

$$\sum_A \gamma'^A_{\rho\sigma}\gamma^A_{\bar\rho\bar\sigma} = 0$$

выполнялось бы при всех ρ, σ, $\bar{\rho}$, $\bar{\sigma}$ ($\gamma^A_{\rho\sigma}$ — элементы матрицы γ^A; ρ, σ принимают значения от 1 до 4). Но это противоречило бы линейной независимости матриц γ^A (лемма 4 из предыдущего параграфа). Следовательно, в дальнейшем можно считать, что F подобрана так, чтобы выполнялось неравенство $S \neq 0$.

Для доказательства того, что определитель отличен от нуля, можно воспользоваться леммой Шура [5]. Пусть S — матрица с определителем, равным нулю, которая удовлетворяет соотношению (7). Сама матрица отлична от нулевой. Лемма Шура позволяет построить для такой S матрицы γ^A, у которых число строк и столбцов меньше четырех, также удовлетворяющие соотношениям (I). Но лемма 4 показывает, что это невозможно. Следовательно, в нашем случае отличие от нуля определителя матрицы S следует из того, что $S \neq 0$.

Не обращаясь к лемме Шура, тот же результат можно получить следующим образом. Поменяв ролями γ^A и γ'^A, построим с помощью соответственно выбранной матрицы G матрицу

$$T = \sum_B \gamma^B G \gamma'^B.$$

Можно показать, что она так же, как и S, удовлетворяет соотношению

$$\gamma^A T = T\gamma'^A. \qquad (7')$$

Из соотношений (7) и (7') следует, что

$$\gamma^A TS = TS\gamma^A,$$

откуда, используя лемму 7, находим

$$TS = c \cdot I, \qquad (8)$$

где c — обычное число.

Теперь уже нетрудно доказать, что при фиксированной $T \neq 0$ матрицу F всегда можно подобрать так, чтобы

$$TS \neq 0.$$

Действительно, в противном случае соотношения

$$\sum_B (T\gamma'^B)_{\rho\sigma} \gamma^B_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} = 0$$

выполнялись бы при всех ρ, σ, $\bar{\rho}$, $\bar{\sigma}$. Но это противоречит лемме 4, поскольку не все элементы $(T\gamma'^B)_{\rho\sigma}$, среди которых при $\gamma'^B = I$ содержатся и сами $T_{\rho\sigma}$, равны нулю.

Таким образом, мы знаем, что

$$TS = c \cdot I \quad \text{и} \quad TS \neq 0,$$

---

[5] См. *B. L. van der Waerden*, l. c., p. 55.

откуда следует, что $c \neq 0$. Следовательно,

$$\operatorname{Det} S \neq 0, \qquad S^{-1} = \frac{1}{c} T,$$

$$\gamma'^A = S\gamma^A S^{-1}. \tag{9}$$

Итак, фундаментальная теорема доказана.

Рассмотрим частный случай результатов (6) и (7) при $\gamma'^A = \gamma^A$. В этом случае при всех F, таких, что

$$\sum_B \gamma^B F \gamma^B = S,$$

справедливо соотношение

$$\gamma^A S = S\gamma^A,$$

откуда, применяя лемму 7, получаем

$$S = \sum_B \gamma^B F \gamma^B = c \cdot I.$$

Но это соотношение должно выполняться при всех F; следовательно,

$$\sum_A \gamma^A_{\rho\sigma}\gamma^A_{\bar\rho\bar\sigma} = c_{\sigma\bar\rho}\delta_{\rho\bar\sigma}.$$

Чтобы найти $c_{\sigma\bar\rho}$, положим $\rho = \bar\sigma$ и просуммируем по этому индексу. Получим

$$\sum_A \sum_{\rho=1}^{4} \gamma^A_{\bar\sigma\rho}\gamma^A_{\rho\sigma} = \sum_A (\gamma^A)^2_{\bar\rho\sigma} = 4c_{\sigma\bar\rho}.$$

Но согласно (3)

$$(\gamma^A)^2_{\bar\rho\sigma} = \delta_{\rho\bar\sigma};$$

поэтому

$$16\delta_{\rho\bar\sigma} = 4c_{\sigma\bar\rho}, \qquad c_{\sigma\bar\rho} = 4\delta_{\bar\rho\sigma},$$

откуда получаются тождества

$$\sum_{A=1}^{16} \gamma^A_{\sigma\rho}\gamma^A_{\bar\rho\bar\sigma} = 4\delta_{\bar\rho\sigma}\delta_{\rho\bar\sigma}, \tag{II}$$

которыми мы воспользуемся впоследствии.

Перейдем теперь к приложениям фундаментальной теоремы.

§ 4. Определение матриц A и B

В физических приложениях матрицы γ^μ, по предположению, эрмитовы, т. е. элемент $\gamma^\mu_{\sigma\rho}$ равен $\gamma^{\mu *}_{\rho\sigma}$ — величине, комплексно-сопряженной с $\gamma^\mu_{\rho\sigma}$. Мы не будем априори делать здесь такое предположение, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что бóльшая часть наших утверждений относительно γ^μ не зависит от эрмитовости этих матриц.

В общем случае мы будем обозначать через $\gamma^{\dagger\mu}$-матрицу, эрмитово-сопряженную (транспонированную и комплексно-сопряженную) с γ^μ (т. е. такую, что $\gamma^{\dagger\mu}_{\rho\sigma} = \gamma^{*\mu}_{\sigma\rho}$). Заметим, что, как следует из (I), матрицы $\gamma^{\dagger\mu}$ также удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{2}(\gamma^{\dagger\mu}\gamma^{\dagger\nu} + \gamma^{\dagger\nu}\gamma^{\dagger\mu}) = \delta_{\mu\nu} \tag{9'}$$

(поскольку матрица $\gamma^{\dagger\mu}\gamma^{\dagger\nu}$ эрмитово-сопряженная с $\gamma^\nu\gamma^\mu$).

Зная это, на основании фундаментальной теоремы заключаем, что существует матрица A, для которой справедливы соотношения

$$\gamma^{\dagger\mu} = A\gamma^\mu A^{-1} \text{ (или } \gamma^{\dagger\mu}A = A\gamma^\mu). \tag{10}$$

Лемма 7 позволяет утверждать, что при заданных γ^μ матрица A определена с точностью до числового множителя.

Кроме того, перейдя в правой и левой частях равенства (10) к эрмитово-сопряженным величинам, получим

$$A^\dagger\gamma^\mu = \gamma^{\dagger\mu}A^\dagger,$$

откуда

$$A^{-1}A^\dagger\gamma^\mu = \gamma^\mu A^{-1}A^\dagger$$

и по лемме 7

$$A^{-1}A^\dagger = c\cdot I, \quad A^\dagger = c\cdot A.$$

Нормируя неопределенный множитель, мы всегда можем добиться, чтобы

$$A^\dagger = A, \tag{11}$$

т. е. чтобы и сама матрица A была эрмитовой (вещественный множитель в A пока еще остается неопределенным). Подставляя (11) в (10), находим что

$$\gamma^{\dagger\mu}A^\dagger = (A\gamma^\mu)^\dagger = A\gamma^\mu,$$

или, иными словами, что *матрицы* $A\gamma^\mu$ *эрмитовы*. Нетрудно проверить, наконец, что при всех γ^A матрица

$$A\gamma^A \text{ — эрмитова,} \tag{12}$$

если γ^A (с надлежащим образом подобранными множителями i) так же, как и раньше, удовлетворяют условию $(\gamma^A)^2 = I$.

Заметим еще, что в преобразовании

$$\gamma'^\mu = S^{-1}\gamma S$$

можно произвести замену

$$A' = S^\dagger AS \tag{13}$$

и получить

$$\gamma^{\dagger\prime\mu} = A'\gamma^{\dagger\mu}A^{-1}.$$

Правда, во всех физических приложениях матрицы γ^μ можно считать эрмитовыми и, следовательно, $A = I$. Я хочу не только показать независимость некоторых теорем от этой гипотезы, но и подчеркнуть аналогию,

существующую между матрицей A и матрицей B, определяемой следующим образом [6]. Рассмотрим матрицы $\overline{\gamma}^{\mu}$, которые получаются из γ^{μ}, если в последних поменять местами строки и столбцы, и назовем такие матрицы *транспонированными* по отношению к γ^{μ}. Ясно, что $\overline{\gamma}^{\mu}_{\rho\sigma} = \gamma^{\mu}_{\sigma\rho}$. Это обозначение сохраним для всех матриц a и $\bar{a}$, таких, что $\bar{a}_{\rho\sigma} = a_{\sigma\rho}$. Назовем матрицу a *симметричной*, если $\bar{a} = a$, и *антисимметричной*, если $\bar{a} = -a$. Кроме того, $\overline{(ab)} = \bar{b}\bar{a}$, так что операция $a \to \bar{a}$ аналогична операции $a \to a^{\dagger}$. С другой стороны, для алгебраистов может оказаться интересным, что понятие комплексного сопряжения не является необходимым для определения транспонирования.

Мы видим, что $\overline{\gamma}^{\mu}$ также удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{2}\left(\overline{\gamma}^{\mu}\overline{\gamma}^{\nu} + \overline{\gamma}^{\nu}\overline{\gamma}^{\mu}\right) = \delta_{\mu\nu}. \tag{14}$$

Отсюда с помощью фундаментальной теоремы мы так же, как это было сделано для $\gamma^{\dagger\mu}$, покажем, что существует матрица B, удовлетворяющая соотношениям

$$\overline{\gamma}^{\mu} = B\gamma^{\mu}B^{-1} \text{ (или } \overline{\gamma}^{\mu}B = B\gamma^{\mu}). \tag{15}$$

Транспонируя это равенство, находим, что $B^{-1}\overline{B}$ коммутирует со всеми γ^{μ}, и, следовательно, по лемме 7,

$$\overline{B} = cB.$$

Отсюда $B = c\overline{B}$ и, следовательно, $c^2 = 1$, $c = \pm 1$. Возникают две возможности:

$$\text{либо } \overline{B} = B, \text{ либо } \overline{B} = -B.$$

Чтобы установить различие между ними, необходимо (следуя методу, которым я обязан Хаантьесу) рассмотреть, к каким утверждениям относительно $B\gamma^{\mu}$, $B\gamma^{[\mu\nu]}$, $B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ и $B\gamma^5 = B\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ приводит каждая из них. Если заметить, что перестановки $(12) \to (21)$, $(123) \to (321)$ нечетны, в то время как перестановка $(1234) \to (4321)$ четна, то станет ясно, что первая возможность ($\overline{B} = B$) приводит к тому, что матрицы B, $B\gamma^{\mu}$, $B\gamma^5$ симметричны; $B\gamma^{[\mu\nu]}$, $B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ — антисимметричны; вторая же возможность, наоборот,— к тому, что

$$\begin{gathered} B,\ B\gamma^{\mu},\ B\gamma^5 \text{ — антисимметричны,} \\ B\gamma^{[\mu\nu]},\ B\gamma^{[\lambda\mu\nu]} \text{ — симметричны.} \end{gathered} \tag{16}$$

Первую возможность можно исключить, просто перебирая матрицы. Действительно, десять матриц $B\gamma^{[\mu\nu]}$, $B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ линейно-независимы так же, как и десять матриц $\gamma^{[\mu\nu]}$, $\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$, поскольку существует матрица B^{-1}, обратная B (шесть матриц B, $B\gamma^{\mu}$, $B\gamma^5$ также линейно-независимы). Но

[6] Эту матрицу я ввел в работе о теории спиноров в пятимерном пространстве (Ann. Phys., 1933, 18, 337). Позднее я установил, что B допускает также и более непосредственные физические приложения.

антисимметричная матрица с четырьмя строками и четырьмя столбцами имеет лишь шесть независимых элементов. Поэтому существует лишь шесть антисимметричных линейно-независимых матриц с четырьмя строками и с четырьмя столбцами (с другой стороны, существует десять независимых симметричных матриц того же типа). Следовательно, невозможно, чтобы все десять матриц $B\gamma^{[\mu\nu]}$, $B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ были *антисимметричны, и реализоваться может лишь вторая возможность.*

Итак, справедливы утверждения (16), и

$$\bar{B} = -B, \tag{16'}$$

$$\overline{\gamma^{[\mu\nu]}} = -B\gamma^{[\mu\nu]}B^{-1}, \quad \overline{\gamma^{[\lambda\mu\nu]}} = -B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}B^{-1}, \quad \overline{\gamma^5} = +B\gamma^5 B^{-1}. \tag{17}$$

В преобразование

$$\gamma'^{\mu} = S^{-1}\gamma^{\mu}S$$

введем

$$B' = \bar{S}BS \tag{18}$$

так, чтобы выполнялось условие

$$\overline{\gamma^{\mu'}} = B'\gamma'^{\mu}B'^{-1}.$$

Численный множитель, входящий в B, пока еще не определен.

Следует заметить, что равенства

$$\bar{\gamma}^{\mu}B = B\gamma^{\mu}$$

весьма удобны для нахождения B, если численные значения элементов γ^{μ} известны. С другой стороны, матрица B, отличная от A, вследствие соотношения (18) неинвариантна относительно унитарных преобразований γ^{μ}.

Наконец, можно установить связь между A и B, если учесть, что операции $\gamma^{\mu} \to \overline{\gamma^{\mu}}$ и $\gamma^{\mu} \to \gamma^{\dagger\mu}$ коммутируют между собой, т. е.

$$(\overline{\gamma^{\mu\dagger}}) = (\overline{\gamma^{\mu}})^{\dagger} \ (= \gamma^{*\mu}).$$

Действительно,

$$(\overline{\gamma^{\mu}})^{\dagger} = (B\gamma^{\mu}B^{-1})^{\dagger} = B^{\dagger-1}\ \gamma^{\mu}B^{\dagger} = B^{\dagger-1}A\gamma^{\mu}A^{-1}B^{\dagger}$$

и

$$(\overline{\gamma^{\mu\dagger}}) = (\overline{A\gamma^{\mu}A^{-1}}) = \overline{A^{-1}}\overline{\gamma^{\mu}}\bar{A} = \bar{A}^{-1}B\gamma^{\mu}B^{-1}\bar{A},$$

откуда

$$\bar{A}^{-1}B = cB^{\dagger-1}A \quad \text{и} \quad A^{-1}B^{\dagger} = cB^{-1}\bar{A},$$

где

$$B^{\dagger} = cAB^{-1}\bar{A}.$$

Множитель, входящий в определение B, можно нормировать так, чтобы c было равно 1. Тогда

$$B^{\dagger} = AB^{-1}\bar{A}. \tag{19}$$

В частном случае, когда матрицы γ^{μ} эрмитовы и $A = I$, получим просто

$$B^{\dagger} = B^{-1}, \tag{19'}$$

т. е. что матрица B унитарна.

§ 5. Преобразование Лоренца волновых функций Дирака. Квадратичные коварианты

Введем, как обычно, вещественные координаты x_k для пространства[7] и мнимую координату $x_4 = ict$ для времени и рассмотрим преобразования Лоренца

$$x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu, \tag{20}$$

удовлетворяющие известным условиям ортогональности

$$\sum_\mu a_{\mu\rho} a_{\mu\sigma} = \sum_\mu a_{\rho\mu} a_{\sigma\mu} = \delta_{\rho\sigma}, \tag{21}$$

где коэффициенты a_{ik}, a_{44} вещественны, в то время как коэффициенты a_{4i} чисто мнимы. Ниже нам придется различать одну часть преобразований Лоренца, понимаемых в ограниченном смысле, для которых

$$\operatorname{Det} | a_{\mu\nu} | = +1$$

(эти преобразования получаются из тождественного *непрерывным* путем), от другой части — отражений

$$\operatorname{Det} | a_{\mu\nu} | = -1,$$

которая получится из первой, если присоединить отражения

$$x'_k = -x_k, \qquad x'_4 = +x_4, \tag{20a}$$

$$x'_k = +x_k, \qquad x'_4 = -x_4. \tag{20б}$$

Запишем волновое уравнение Дирака в виде

$$\sum_\mu \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \psi = 0, \tag{22}$$

где γ^μ удовлетворяют соотношениям (I), $\gamma^\mu \psi$ — сокращенное обозначение $\sum_\sigma \gamma^\mu_{\rho\sigma} \psi_\sigma$, а $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π.

Пусть при преобразовании Лоренца ψ переходит в

$$\psi'_\rho = \sum_\sigma \Lambda_{\rho\sigma} \psi_\sigma \quad (\text{или кратко } \psi' = \Lambda\psi). \tag{23}$$

Постулируем, что ψ' в системе координат x'^μ удовлетворяет уравнению

$$\sum_\mu \gamma^\mu \frac{\partial \psi'}{\partial x'_\mu} + \frac{mc}{h} \psi' = 0 \tag{22'}$$

с теми же γ^μ. Условие того, что это уравнение следует из старого урав-

---

[7] Мы используем латинские индексы $i, k, \ldots$, принимающие значения от 1 до 3, для пространственных координат; греческие же индексы $\mu, \nu, \ldots$ принимают значения от 1 до 4.

нения (22), определяется равенством

$$\Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda = \sum_{\nu} a_{\mu\nu}\gamma^{\nu}. \tag{24}$$

Заметим, что непосредственное доказательство существования такой матрицы Λ весьма сложно, в то время как предыдущие рассуждения позволяют сразу же вывести ее как простой частный случай из нашей фундаментальной теоремы. Действительно, нетрудно видеть, что матрицы

$$\gamma'^{\mu} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu}\gamma^{\nu}$$

также удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{2}(\gamma'^{\mu}\gamma'^{\nu} + \gamma'^{\nu}\gamma'^{\mu}) = \delta_{\mu\nu}$$

в силу условий ортогональности (21). Именно это и позволяет воспользоваться названной теоремой.

Рассмотрим теперь более подробно матрицы Λ, удовлетворяющие равенству (24) и зависящие от $a_{\mu\nu}$, и, в частности, установим условия, которые позволяют определить матрицы Λ. Прежде всего, матрица Λ определена с точностью до произвольного численного множителя. Ее можно нормировать, потребовав, чтобы определитель Λ был равен единице:

$$\mathrm{Det}\,\Lambda = 1. \tag{25}$$

Во-вторых, посмотрим, к чему приводит упоминавшаяся выше вещественность $a_{\mu\nu}$. Ясно, что коэффициенты преобразований, связывающие

$$\gamma'^{k},\ i\gamma'^{4} \text{ с } \gamma^{k},\ i\gamma^{4},$$

вещественны. Однако если определить новую матрицу

$$\beta = A\gamma^{4}$$

(в частном случае, когда матрицы γ^{μ} эрмитовы и $\Lambda = I$, матрица $\beta = \gamma^{4}$), то матрицы

$$i\beta\gamma^{k},\ \beta\gamma^{4} = A$$

будут эрмитовыми, и в силу (10) и (I)

$$(\gamma^{k})^{\dagger} = -\beta\gamma^{k}\beta^{-1}, \qquad (i\gamma^{4})^{\dagger} = -\beta(i\gamma^{4})\beta^{-1},$$

поскольку $\beta^{-1} = \gamma^{4}A^{-1}$. Отсюда следует вещественность коэффициентов преобразования

$$(\gamma^{k},\ i\gamma^{4}) \rightarrow (\gamma'^{k},\ i\gamma'^{4}),$$

а также то, что

$$(\gamma'^{k})^{\dagger} = -\beta\gamma'^{k}\beta^{-1}, \qquad (i\gamma'^{4})^{\dagger} = -\beta\,(i\gamma^{4})\beta^{-1}.$$

С другой стороны, из (24) так же, как ранее для соотношения (13), следует, что

$$\beta' = \Lambda^{\dagger}\beta\Lambda,$$

и мы получаем новые условия:

$$(\gamma'^k)^\dagger = -\beta'\gamma'^k\beta^{-1}, \qquad (i\gamma'^4)^\dagger = -\beta'(i\gamma^4)\beta'^{-1},$$

откуда

$$\beta' = \Lambda^\dagger\beta\Lambda = c\beta.$$

Что касается множителя c, то из (24) имеем $c^4 = 1$. Отсюда вследствие непрерывности и для собственных преобразований Лоренца находим $c = 1$. Следовательно,

$$\Lambda^\dagger\beta\Lambda = \beta \text{ (или } \Lambda^\dagger A\gamma^4\Lambda = A\gamma^4). \tag{26}$$

Ход рассуждений в случае матрицы B еще проще, поскольку на этот раз не затрагивается вещественность преобразований Лоренца. Из

$$\bar{\gamma}^\mu = B\gamma^\mu B^{-1} \tag{15}$$

для $\gamma'^\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu}\gamma^\nu$ с той же матрицей B тотчас же следует, что

$$\bar{\gamma}'^\mu = B\gamma'^\mu B^{-1};$$

при

$$B' = \bar{\Lambda}B\Lambda$$

из (23) и (18) получаем

$$\bar{\gamma}' = B'\gamma^\mu B'^{-1}.$$

Кроме того, из (24) мы находим, что $c^4 = 1$. Вследствие непрерывности $c = 1$ для всех собственных преобразований Лоренца

$$\bar{\Lambda}B\Lambda = B. \tag{27}$$

Рассмотрим теперь отражения. Пусть

$$\Lambda = \gamma^4 \text{ при } x'_k = -x_k, \qquad x'_4 = +x_4, \tag{28a}$$

$$\Lambda = \gamma^5\gamma^4 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3 \text{ при } x'_k = +x_k, \qquad x'_4 = -x_4. \tag{28б}$$

Ясно, что (27) выполняется и для отражений, но равенство (26) справедливо лишь при $x'_k = -x_k$, $x'_4 = +x_4$. Наконец, $x'_4 = -x_4$ приводит к равенству

$$\Lambda^\dagger\beta\Lambda = -\beta, \tag{26'}$$

справедливому лишь при $x'_4 = -x_4$. В дальнейшем мы для простоты не будем рассматривать такие преобразования.

Последние условия, которым удовлетворяет Λ, получим, введя в рассмотрение матрицу

$$\gamma'^5 = \gamma'^1\gamma'^2\gamma'^3\gamma'^4 = \mathrm{Det}\,|a_{\mu\nu}|\,\gamma^5,$$

откуда

$$\Lambda\gamma^5 = \pm\gamma^5\Lambda, \tag{28}$$

причем знак плюс относится к собственным преобразованиям Лоренца, а знак минус — к отражениям.

Условия (24), (26), (27) и (28), полученные для Λ, полны в том смысле, что любая матрица Λ, удовлетворяющая этим условиям, позволяет построить матрицу

$$\gamma'^{\mu} = \Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda,$$

для которой выполняется равенство

$$\gamma'^{\mu} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu}\gamma^{\nu}$$

с коэффициентами $a_{\mu\nu}$ преобразования Лоренца.

Наметим лишь общий ход доказательства. Запишем равенство

$$\Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda = \sum_{A} c_{\mu,\,A}\,\gamma^{A}.$$

Сумма диагональных элементов у матрицы γ'^{μ} та же, что и у матрицы γ^{μ}, а поскольку сумма диагональных элементов последней равна нулю, то и коэффициент при единичной матрице должен быть равен нулю. Из соотношения (27) следует, что матрица $B\gamma'^{\mu}$ так же, как и $B\gamma^{\mu}$, антисимметрична, в силу чего коэффициенты при $\gamma^{[\varkappa\lambda]}$ и $\gamma^{[\varkappa\lambda\nu]}$ также должны обратиться в нуль. Из (28) следует, что $\gamma'^{\mu}\gamma^{5} = -\gamma^{5}\gamma'^{\mu}$; поэтому коэффициент $c_{\mu,\,5}$ при γ^{5} равен нулю. Таким образом,

$$\gamma'^{\mu} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu}\gamma^{\nu},$$

а из (26) [или (26′)] следует, что a_{ik}, a_{44} и ia_{k4} вещественны. Наконец, из соотношения

$$\frac{1}{2}(\gamma'^{\mu}\gamma'^{\nu} + \gamma'^{\nu}\gamma'^{\mu}) = \delta_{\mu\nu}$$

получим, что коэффициенты $a_{\mu\nu}$ удовлетворяют условиям ортогональности (21).

Известно, что с помощью соотношений (23) для любой функции $\psi^{\dagger}$, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\frac{\partial\psi^{\dagger}}{\partial x^{\mu}}\gamma^{\mu} - \frac{mc}{h}\psi^{\dagger} = 0, \qquad (22^{\dagger})$$

и функции, в которую она переходит под действием преобразования Лоренца

$$\psi_{\sigma}^{\dagger\prime} = \sum_{\rho}\psi_{\rho}^{\dagger}\Lambda_{\rho\sigma}^{-1} \quad (\text{сокращенно } \psi^{\dagger\prime} = \psi^{\dagger}\Lambda^{-1}), \qquad (23^{\dagger})$$

можно построить следующие инварианты: скаляр (инвариант)

$$\psi^{\dagger}\psi = i\Omega_{1}, \qquad (29_1)$$

вектор

$$\psi^{\dagger}\gamma^{\mu}\psi = S_{\mu}, \qquad (29_2)$$

антисимметричный тензор второго ранга

$$\psi^\dagger\gamma^{[\mu\nu]}\psi = iM_{[\mu\nu]}, \quad (29_3)$$

антисимметричный тензор третьего ранга (аксиальный вектор)

$$\psi^\dagger\gamma^{[\lambda\mu\nu]}\psi = S_{[\lambda\mu\nu]} \quad (29_4)$$

и, наконец, «псевдоскаляр»

$$\Omega_2 = \psi^\dagger\gamma^5\psi. \quad (29_5)$$

В частности, функцию $\psi^\dagger$, удовлетворяющую условиям ($22^\dagger$) и ($23^\dagger$), можно получить, если воспользоваться функцией ψ^*, комплексно-сопряженной с ψ, и соотношениями (26) и составить выражение

$$\psi^\dagger = i\psi^*\beta = i\psi^* A\gamma^4. \quad (30)$$

Действительно, закон преобразования ψ^* имеет вид

$$\psi^{*\prime} = \psi^*\Lambda^\dagger, \quad (23)$$

а волновое уравнение (не следует забывать о том, что координата x_4 — мнимая!)

$$-\frac{\partial\psi^*}{\partial x^4}\gamma^{4\dagger} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\gamma^{\dagger k} + \frac{mc}{h}\psi^* = 0, \quad (22^*)$$

или

$$-\frac{\partial\psi^*}{\partial x^4}A\gamma^4 + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}A\gamma^k + \frac{mc}{h}\psi^* A = 0.$$

Последнее уравнение после подстановки (30) должно совпасть с ($22^\dagger$).

Множители i в выражениях (29_1) и (29_3) введены для того, чтобы после подстановки (30) компоненты всех величин были вещественными или чисто мнимыми в зависимости от того, сколько раз — четное или нечетное число — встречается индекс 4. Физический смысл величин, задаваемых формулами (29_1) — (29_5), читатель сможет найти в соответствующих работах [8].

Матрица B позволяет ответить на два вопроса. Первый вопрос, относящийся к теории радиоактивного β-распада, предложенной Ферми, заключается в следующем. Пусть ψ_ρ и φ_ρ — две волновые функции, преобразующиеся по *одному и тому же* закону

$$\psi' = \Lambda\psi, \qquad \varphi' = \Lambda\varphi$$

при преобразованиях группы Лоренца. Как построить ковариантные величины (скаляр, вектор, тензор и т. д.), билинейные по ψ и φ [имеются в виду выражения, аналогичные выражениям (29_2) — (29_5)]? Заметим, что

[8] См., например, *L. de Broglie.* L'électron magnétique. Paris, 1934. (Русск. пер.: *Л. де Бройль.* Магнитный электрон. Харьков, 1936.— *Ред.*).

закон преобразования $\varphi' = \Lambda\varphi$ *тождественно совпадает* с другим законом

$$\varphi' = \varphi\overline{\Lambda}, \tag{$\overline{23}$}$$

поскольку $\varphi' = \varphi\overline{\Lambda}$ означает, что $\varphi'_\sigma = \sum_\rho \varphi_\rho \overline{\Lambda}_{\rho\sigma}$, а $\overline{\Lambda}_{\rho\sigma} = \Lambda_{\sigma\rho}$. Но согласно (27) для любой матрицы F

$$\varphi\overline{\Lambda}BF\psi = \varphi B\Lambda^{-1}F\psi,$$

откуда

$$\varphi' BF\psi' = \varphi B\Lambda^{-1}F\Lambda\psi.$$

Таким образом, мы получаем скаляр

$$i\Omega_1 = \varphi B\psi, \tag{31_1}$$

вектор

$$S_\mu = \varphi B\gamma^\mu\psi, \tag{31_2}$$

тензор второго ранга

$$-iM_{[\mu\nu]} = \varphi B\gamma^{[\mu\nu]}\psi, \tag{31_3}$$

тензор третьего ранга

$$S_{[\lambda\mu\nu]} = \varphi B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}\psi \tag{31_4}$$

и псевдоскаляр

$$\Omega_2 = \varphi B\gamma^5\psi. \tag{31_5}$$

Можно перейти к частному случаю и положить $\varphi = \psi$. Тогда Ω_1, S_μ и Ω_2 обратятся в нуль, поскольку соответствующие матрицы антисимметричны.

Второй вопрос заключается в следующем. Известно, что волновые уравнения Дирака имеют решения, соответствующие не только состояниям с положительной энергией, но и состояниям с отрицательной энергией. Попытаемся установить однозначное и релятивистски-инвариантное соответствие между данным решением с положительной энергией и каким-нибудь решением с отрицательной энергией, и наоборот. Проблема будет решена, если нам удастся найти матрицу C, такую, что φ, помимо соотношения

$$\varphi^* = C\psi, \quad \text{или} \quad \psi = C^{-1}\varphi^*, \tag{32}$$

будет удовлетворять тому же уравнению (22), что и ψ, и, кроме того, будет преобразовываться по тому же закону (23), что и ψ, по крайней мере, если речь идет о собственных преобразованиях Лоренца. Действительно, если ψ содержит только состояния с положительной энергией, то в силу (32) φ будет содержать только состояния с отрицательной энергией, и наоборот.

Чтобы решить проблему, заметим прежде всего, что из уравнения (22*), примененного к φ, и (32) следует, что

$$-\gamma^{*4}\frac{\partial\varphi^*}{c\partial t} + \sum_k \gamma^{*k}\frac{\partial\varphi^*}{\partial x^k} + \frac{mc}{h}\varphi^* = 0,$$

$$-\gamma^{*4}C\frac{\partial\psi}{c\partial t}+\sum_k\gamma^{*k}C\frac{\partial\psi}{\partial x^k}+\frac{mc}{h}C\psi=0,$$

$$-C^{-1}\gamma^{*4}C\frac{\partial\psi}{c\partial t}+\sum_{k=1}^{3}C^{-1}\gamma^{*k}C\frac{\partial\psi}{\partial x^k}+\frac{mc}{h}\psi=0.$$

Сравнивая с (22), находим:

$$C^{-1}\gamma^{*4}C=-\gamma^4,\qquad C^{-1}\gamma^{*k}C=\gamma^k,$$

откуда

$$\gamma^{*4}=-C\gamma^4C^{-1},\qquad \gamma^{*k}=C\gamma^kC^{-1}.$$

Ранее мы установили, что

$$\gamma^{*\mu}=\bar{A}^{-1}B\gamma^\mu B^{-1}\bar{A};$$

с другой стороны, матрица $\gamma^4\gamma^5$ коммутирует с γ_k, но антикоммутирует с γ^4. Следовательно, решение (с точностью до произвольного численного множителя) имеет вид

$$C=\bar{A}^{-1}B\gamma^4\gamma^5=-\bar{A}^{-1}B\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \qquad (33)$$

(если матрицы γ^μ — эрмитовы и $A=I$, то $C=B\gamma^4\gamma^5$). Согласно (19)

$$C^*C=I,\qquad C^*=C^{-1}; \qquad (33а)$$

следовательно, соотношения (32) останутся справедливыми и в том случае, если ψ и φ поменять местами:

$$\psi^*=C\varphi,\quad \varphi=C^{-1}\psi^*. \qquad (32а)$$

Наконец, из (26) — (28) получим — в случае собственных преобразований Лоренца,— что постулат инвариантности также выполнен.

В силу того, что

$$\psi'=\Lambda\psi,\qquad \varphi'=\Lambda\varphi,$$

из (32) найдем

$$\varphi'^*=C\psi',\ \psi'=C^{-1}\varphi'^*. \qquad (32')$$

§ 6. Тождества между квадратами ковариантов

Известно [9], что между квадратами величин Ω_1, Ω_2, S_μ, $M_{[\mu\nu]}$, $S_{[\lambda\mu\nu]}$, определяемых равенствами (29_1) — (29_5), существуют тождества относительно волновых функций ψ и $\psi^\dagger$. Эти тождества имеют следующий вид:

$$-\sum_\mu S_\mu^2\equiv S_0^2-\sum_{k=1}^{3}S_k^2=\Omega_1^2+\Omega_2^2, \qquad (34_1)$$

$$\sum_{[\mu\nu]}M_{[\mu\nu]}^2\equiv\sum_{ik}M_{[ik]}^2-\sum_k M_{0k}^2=\Omega_1^2-\Omega_2^2, \qquad (34_2)$$

$$-\sum_{[\lambda\mu\nu]}S_{[\lambda\mu\nu]}^2\equiv-S_{[123]}^2+\sum_{[ik]}S_{[ik0]}^2=\Omega_1^2+\Omega_2^2, \qquad (34_3)$$

[9] См., например, *L. de Broglie*. L'électron magnétique. Paris, 1934.

$$-\frac{i}{2}\sum_{[\varkappa\lambda],[\mu\nu]} M_{[\varkappa\lambda]}, M_{[\mu\nu]} \equiv M_{23}M_{10}+M_{31}M_{20}+M_{12}M_{30}=\Omega_1\Omega_2, \qquad (34_4)$$

$$\sum_{\varkappa,[\lambda\mu\nu]} S_\varkappa S_{[\lambda\mu\nu]}=0. \qquad (34_5)$$

Мы считаем, что $a_{\ldots 4}=ia_{\ldots 0}$; кроме того, индексы $\varkappa\lambda\mu\nu$ в (34_4) и (34_5) должны быть отличны друг от друга и образовывать четную перестановку цифр 1234.

Вводя тензоры, дуальные к $M_{[\mu\nu]}$ и $S_{[\lambda\mu\nu]}$, по формулам

$$\widehat{M}_{[\varkappa\lambda]}\equiv M_{[\mu\nu]}, \qquad \widehat{S}_\varkappa \equiv S_{\lambda\mu\nu}, \qquad (35)$$

равенства (34_4) и (34_5) можно представить также и в виде

$$-\frac{i}{2}\sum_{[\mu\nu]}\widehat{M}_{[\mu\nu]}M_{[\mu\nu]}=\Omega_1\Omega_2 \qquad (34_4)$$

и

$$\sum_\varkappa S_\varkappa \widehat{S}_\varkappa = 0. \qquad (34_5)$$

По аналогии с (35) матрицы $\hat{\gamma}^{[\varkappa\lambda]}$ и $\hat{\gamma}^{\varkappa}$, дуальные к $\gamma^{[\mu\nu]}$ и $\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$, можно определить как

$$\begin{gathered}\hat{\gamma}^{[\varkappa\lambda]}=\gamma^{[\mu\nu]}\,(\hat{\gamma}^{[12]}=\gamma^{[34]},\ \hat{\gamma}^{[31]}=\gamma^{[24]},\ \hat{\gamma}^{[23]}=\gamma^{[14]},\\ \hat{\gamma}^{[34]}=\gamma^{[12]},\ \hat{\gamma}^{[24]}=\gamma^{[31]},\ \hat{\gamma}^{[14]}=\gamma^{[23]});\end{gathered} \qquad (36а)$$

$$\begin{gathered}\hat{\gamma}^{\varkappa}=\gamma^{[\lambda\mu\nu]}\,(\hat{\gamma}^{1}=\gamma^{[234]},\ \hat{\gamma}^{2}=\gamma^{[314]},\ \hat{\gamma}^{3}=\gamma^{[124]},\\ \hat{\gamma}^{4}=\gamma^{[321]}=-\gamma^{[123]}).\end{gathered} \qquad (36б)$$

Отметим, наконец, следующую цепочку соотношений (причем, как всегда, $\gamma^5=\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$):

$$\hat{\gamma}^{[\varkappa\lambda]}=-\gamma^5\gamma^{[\varkappa\lambda]}=-\gamma^{[\varkappa\lambda]}\gamma^5, \qquad (37а)$$

$$\hat{\gamma}^{\varkappa}=-i\gamma^5\gamma^{\varkappa}=+i\gamma^{\varkappa}\gamma^5. \qquad (37б)$$

Важно подчеркнуть, что справедливость этих тождеств не зависит от предположения об эрмитовости γ_μ и соотношения (30) между $\psi^\dagger$ и ψ^*. Наоборот, мы будем предполагать, что величины ψ и $\psi^\dagger$ произвольны и не зависят друг от друга.

При доказательстве тождеств (34_1) — (34_5) будем исходить из тождества (II), приведенного в конце § 3:

$$\sum_{A=1}^{16}\gamma^A_{\rho\sigma}\gamma^A_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}=4\delta_{\rho\bar{\sigma}}\delta_{\bar{\rho}\sigma}, \qquad (II)$$

где

$$\delta_{\rho\sigma}\delta_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}+\gamma^5_{\rho\sigma}\gamma^5_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}+\sum_\mu\gamma^\mu_{\rho\sigma}\gamma^\mu_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}+\sum_{[\mu\nu]}\gamma^{[\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\mu\nu]}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}+\sum_{\lambda\mu\nu}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}=4\delta_{\rho\bar{\sigma}}\delta_{\bar{\rho}\sigma}. \qquad (38)$$

Умножив на $\varphi^{\dagger}_{\rho}\psi^{\dagger}_{\bar{\rho}}\varphi_{\sigma}\psi_{\bar{\sigma}}$, просуммировав по индексам ρ, $\bar{\rho}$, σ, $\bar{\sigma}$ и обозначив штрихами те величины, которые составлены из $\varphi^{\dagger}$, φ так же, как другие,— из $\psi^{\dagger}$ и ψ, получим

$$-\Omega_1'\Omega_1+\Omega_2'\Omega_2+\sum_{\mu}S_{\mu}'S_{\mu}-\sum_{[\mu\nu]}M'_{[\mu\nu]}M_{[\mu\nu]}+\\+\sum_{[\lambda\mu\nu]}S'_{[\lambda\mu\nu]}S_{[\lambda\mu\nu]}=4(\psi^{\dagger}\varphi)(\varphi^{\dagger}\psi). \tag{39}$$

В частности, при $\varphi^{\dagger}=\psi^{\dagger}$ и $\varphi=\psi$

$$-\Omega_1^2+\Omega_2^2+\sum_{\mu}S_{\mu}^2-\sum_{[\mu\nu]}M^2_{[\mu\nu]}+\sum_{[\lambda\mu\nu]}S^2_{[\lambda\mu\nu]}=-4\Omega_1^2. \tag{39a}$$

Ясно, что (39a) следует из соотношений (34); но соотношения (39a) недостаточно для того, чтобы доказать (34). Однако для получения из (II) или (38) новых тождеств можно воспользоваться операцией умножения на γ^5 (применяемой один или два раза).

Образуем прежде всего выражение

$$\sum_{A}\gamma^{A}_{\rho\sigma}(\gamma^5\gamma^A\gamma^5)_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}=4\gamma^5_{\bar{\rho}\sigma}\gamma^5_{\rho\bar{\sigma}},$$

или

$$\delta_{\rho\sigma}\delta_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}+\gamma^5_{\rho\sigma}\gamma^5_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}-\sum_{\mu}\gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\gamma^{\mu}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}+\sum_{[\mu\nu]}\gamma^{[\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\mu\nu]}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}-\sum_{[\lambda\mu\nu]}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}=4\gamma^5_{\bar{\rho}\sigma}\gamma^5_{\rho\bar{\sigma}}; \tag{40}$$

комбинируя с (38), приходим к соотношениям:

$$\delta_{\rho\sigma}\delta_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}+\gamma^5_{\rho\sigma}\gamma^5_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}+\sum_{[\mu\nu]}\gamma^{[\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\mu\nu]}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}=2(\delta_{\bar{\rho}\sigma}\delta_{\rho\bar{\sigma}}+\gamma^5_{\bar{\rho}\sigma}\gamma^5_{\rho\bar{\sigma}}), \tag{41}$$

$$\sum_{\mu}\gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\gamma^{\mu}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}+\sum_{[\lambda\mu\nu]}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}=2(\delta_{\bar{\rho}\sigma}\delta_{\rho\bar{\sigma}}-\gamma^5_{\bar{\rho}\sigma}\gamma^5_{\rho\bar{\sigma}}). \tag{42}$$

Из этих соотношений с учетом (39) получим тождества:

$$-\Omega_1'\Omega_1+\Omega_2'\Omega_2-\sum_{[\mu\nu]}M'_{[\mu\nu]}M_{[\mu\nu]}=2[(\psi^{\dagger}\varphi)(\varphi^{\dagger}\psi)+(\psi^{\dagger}\gamma^5\varphi)(\varphi^{\dagger}\gamma^5\psi)], \tag{43}$$

$$\sum_{\mu}S_{\mu}'S_{\mu}+\sum_{[\lambda\mu\nu]}S'_{[\lambda\mu\nu]}S_{[\lambda\mu\nu]}=2[(\psi^{\dagger}\varphi)(\varphi^{\dagger}\psi)-(\psi^{\dagger}\gamma^5\varphi)(\varphi^{\dagger}\gamma^5\psi)] \tag{44}$$

и, в частности, при $\varphi^{\dagger}=\psi^{\dagger}$ и $\varphi=\psi$

$$-\Omega_1^2+\Omega_2^2-\sum_{[\mu\nu]}M^2_{[\mu\nu]}=2(-\Omega_1^2+\Omega_2^2) \tag{43a}$$

— тождество, совпадающее с (34_2), и

$$-\sum S_{\mu}^2-\sum_{[\lambda\mu\nu]}S^2_{[\lambda\mu\nu]}=2(\Omega_1^2+\Omega_2^2). \tag{44a}$$

Мы видим, что последнее соотношение есть не что иное, как сумма (34_1) и (34_3).

Образуем теперь выражения:

$$\sum_A \gamma^A_{\rho\sigma}\frac{1}{2}(\gamma^5\gamma^A+\gamma^A\gamma^5)_{\bar\rho\bar\sigma} = 2(\gamma^5_{\bar\rho\sigma}\delta_{\rho\bar\sigma}+\delta_{\bar\rho\sigma}\gamma^5_{\rho\bar\sigma})$$

и

$$\sum_A \gamma^A_{\rho\sigma}\frac{1}{2}(\gamma^5\gamma^A-\gamma^A\gamma^5)_{\bar\rho\bar\sigma} = 2(\gamma^5_{\bar\rho\sigma}\delta_{\rho\bar\sigma}-\delta_{\bar\rho\sigma}\gamma^5_{\rho\bar\sigma}).$$

Тогда с учетом (37а) и (37б) получим:

$$\delta_{\rho\sigma}\delta^5_{\bar\rho\bar\sigma}+\gamma^5_{\rho\sigma}\delta_{\bar\rho\bar\sigma}-\sum_{[\mu\nu]}\gamma^{[\mu\nu]}_{\rho\sigma}\hat\gamma^{[\mu\nu]}_{\bar\rho\bar\sigma} = 2(\gamma^5_{\bar\rho\sigma}\delta_{\rho\bar\sigma}+\delta_{\bar\rho\sigma}\gamma^5_{\rho\bar\sigma}) \tag{45}$$

и

$$i\sum_\mu \gamma^\mu_{\rho\sigma}\hat\gamma^\mu_{\bar\rho\bar\sigma}-i\sum_\mu\hat\gamma^\mu_{\rho\sigma}\gamma^\mu_{\bar\rho\bar\sigma} = 2(\gamma^5_{\bar\rho\sigma}\delta_{\rho\bar\sigma}-\delta_{\bar\rho\sigma}\gamma^5_{\rho\bar\sigma}), \tag{46}$$

откуда

$$i\Omega_1'\Omega_2+i\Omega_2'\Omega_1+\sum_{[\mu\nu]}M'_{[\mu\nu]}\hat M_{[\mu\nu]} = 2[(\psi^\dagger\gamma^5\varphi)(\varphi^\dagger\psi)+(\psi^\dagger\varphi)(\varphi^\dagger\gamma^5\psi)] \tag{47}$$

и

$$i\sum_\mu S'_\mu\hat S_\mu - i\sum_\mu \hat S'_\mu S_\mu = 2[(\psi^\dagger\gamma^5\varphi)(\varphi^\dagger\psi)-(\psi^\dagger\varphi)(\varphi^\dagger\gamma^5\psi)]. \tag{48}$$

В том частном случае, когда $\psi^\dagger=\varphi^\dagger$ и $\psi=\varphi$, из (47) следует

$$2i\Omega_1\Omega_2+\sum_{[\mu\nu]}M_{[\mu\nu]}\hat M_{[\mu\nu]} = 4i\Omega_1\Omega_2 \tag{47а}$$

— выражение, тождественное (34_4). При $\psi^\dagger=\varphi^\dagger$ и $\psi=\varphi$ соотношение (48) обратилось бы просто в $0=0$.

Должен заметить, что мне нигде не доводилось встречать тождеств, которые обладали бы большей общностью, чем тождества (43), (44), (47), (48).

Нам осталось еще вывести два соотношения: (34_1) или (34_3) и (34_5). Я установил, что сделать это можно, лишь вводя матрицу B, определенную в § 4. Действительно, учитывая соотношения (15) и (17) из § 4, знаки которых имеют решающее значение для последующих выводов, находим:

$$\sum_A\gamma^A_{\rho\sigma}(B\gamma^A B^{-1})_{\bar\sigma\bar\rho} = 4B_{\bar\sigma\sigma}B^{-1}_{\rho\bar\rho},$$

$$\delta_{\rho\sigma}\delta_{\bar\rho\bar\sigma}+\gamma^5_{\rho\sigma}\gamma^5_{\bar\rho\bar\sigma}+\sum_\mu\gamma^\mu_{\rho\sigma}\gamma^\mu_{\bar\rho\bar\sigma}-\sum_{[\mu\nu]}\gamma^{[\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\mu\nu]}_{\bar\rho\bar\sigma}-\sum_{[\lambda\mu\nu]}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\bar\rho\bar\sigma} = 4B_{\bar\sigma\sigma}B^{-1}_{\rho\bar\rho}, \tag{49}$$

откуда, комбинируя с (38), получаем

$$\delta_{\rho\sigma}\delta_{\bar\rho\bar\sigma}+\gamma^5_{\rho\sigma}\gamma^5_{\bar\rho\bar\sigma}+\sum_\mu\gamma^\mu_{\rho\sigma}\gamma^\mu_{\bar\rho\bar\sigma} = 2(\delta_{\bar\rho\sigma}\delta_{\rho\bar\sigma}+B_{\bar\sigma\sigma}B^{-1}_{\rho\bar\rho}). \tag{50}$$

После умножения на $\psi^\dagger_\rho\psi^\dagger_{\bar\rho}\psi_\sigma\psi_{\bar\sigma}$ и суммирования по индексам ρ, $\bar\rho$, σ, $\bar\sigma$ *те члены правой части, которые содержат* B, *обратятся в нуль*, поскольку

ку матрица B антисимметрична, а мы заранее положили $\psi^\dagger = \varphi^\dagger$, $\psi = \varphi$. Таким образом,

$$-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \sum_\mu S_\mu^2 = -2\Omega_1^2, \tag{51}$$

что совпадает с (34_1). Выражение (34_3) выводится из (51) и (44а).

Наконец, для того чтобы получить последнее соотношение — (34_5), воспользуемся формулой (46):

$$i \sum_\mu \gamma^\mu_{\rho\sigma} (B\hat{\gamma}^\mu B^{-1})_{\bar{\sigma}\bar{\rho}} - i \sum_\mu \hat{\gamma}^\mu_{\rho\sigma} (B\gamma^\mu B^{-1})_{\bar{\sigma}\bar{\rho}} = 2\,[(B\gamma^5)_{\bar{\sigma}\sigma} B^{-1}_{\rho\bar{\rho}} - B_{\bar{\sigma}\sigma} (B\gamma^5)^{-1}_{\rho\bar{\rho}}],$$

или с учетом знаков [соотношения (17)]

$$-i \sum_\mu \gamma^\mu_{\rho\sigma} \hat{\gamma}^\mu_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} - i \sum_\mu \hat{\gamma}^\mu_{\rho\sigma} \gamma^\mu_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} = 2\,[(B\gamma^5)_{\sigma\bar{\sigma}} B^{-1}_{\rho\bar{\rho}} - B_{\bar{\sigma}\sigma} (B\gamma^5)^{-1}_{\rho\bar{\rho}}]. \tag{52}$$

Поскольку матрицы $B\gamma^5$, B и обратные им антисимметричны, соотношение (34_5) будет непосредственно следовать из (52), если последнее умножить на $\psi^\dagger_\rho \psi^\dagger_{\bar{\rho}} \psi_\sigma \psi_{\bar{\sigma}}$ и просуммировать по индексам ρ, $\bar{\rho}$, σ, $\bar{\sigma}$.

Выведенные выше тождества являются единственными тождествами рассмотренного типа, содержащими релятивистски-инвариантные выражения.

КВАНТОВАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ЧАСТИЦ, ПОДЧИНЯЮЩИХСЯ СТАТИСТИКЕ БОЗЕ — ЭЙНШТЕЙНА * [1]

§ 1. Введение

Известно, что при выводе своего волнового уравнения первого порядка с четырьмя компонентами ψ_r («спинорами») Дирак исходил из постулата, согласно которому плотность $\rho(x)$ частиц должна быть положительно-определенной и иметь вид

$$\rho(x) = \sum_r \psi_r^* \psi_r.$$

Дирак считал, что этот постулат можно вводить априори, опираясь лишь на общую теорию преобразований в волновой механике, и независимо от того эмпирического факта, что электрон обладает моментом импульса, равным $^1/_2\, h$. Такая аргументация правильна лишь до тех пор, пока речь идет о проблеме одного тела (частицы) или, точнее, до тех пор, пока, не впадая в противоречие, задачу можно считать одночастичной. Последующее развитие теории Дирака привело к предположению о том, что рождение и аннигиляция пар частиц с противоположными электрическими зарядами составляют неотъемлемую часть релятивистской теории материальных частиц. В этом случае ситуация существенно изменяется и приведенная выше аргументация Дирака перестает быть применимой априори. Действительно, в этом случае речь идет не о том, чтобы найти выражение для плотности частиц (которая, вообще говоря, не будет измеримой в пространственных областях, размеры которых порядка h/mc), а об отыскании, с одной стороны, выражения для плотности электрического заряда и ее собственных значений, положительных и отрицательных, а с другой — выражения для плотности энергии и ее собственных значений (только положительных).

Я не буду останавливаться здесь на том, каким образом можно было бы попытаться решить последнюю проблему в рамках дираковской теории дырок, но подчеркну то обстоятельство, что релятивистскую теорию частиц без спина, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, можно развить исходя из волнового уравнения второго порядка Шредингера — Гордона. Эта теория уже будет содержать рождение пар и с логической и дидактической точек зрения будет более удовлетворительной, чем теория дырок. Действительно, в этой теории отпадает необходимость во введении с помощью искусственных приемов предельного перехода для того, чтобы получить конечное значение разности двух бесконечных сумм, как это

---

* *Théorie quantique relatiste des particules obéissant à la statistique de Einstein — Bose.* Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 137—152.

[1] Излагаемые здесь результаты были получены совместно с В. Вайскопфом, причем часть из них опубликована в Helv. phys. acta, 1934, 7, 709. (Русск. пер. см. с. 194. — *Ред.*).

приходится делать в теории дырок. Кроме того, в скалярной теории плотность энергии является положительно-определенной даже в том случае, когда волновая функция ψ и комплексно-сопряженная функция ψ^* рассматриваются как обычные числа. Как следует из общего формализма Гейзенберга — Паули, для того чтобы получить рождение и аннигиляцию пар *дискретными квантами* электрического заряда и энергии, необходимо вторичное квантование.

Применение формализма вторичного квантования к скалярному релятивистскому уравнению в отсутствие внешних полей будет изложено в § 2. Более подробный анализ возможностей формального построения скалярной релятивистской теории для частиц без спина, но подчиняющихся принципу запрета, содержится в § 3. Получен удовлетворительный результат, состоящий в том, что свойства измеримости плотности электрического заряда в случае, когда выполняется принцип запрета, оказываются гораздо более сложными, чем в случае статистики Бозе — Эйнштейна, и что последний случай отличается от первого даже с чисто формальной точки зрения. С другой стороны, необходимо иметь в виду, что применимость рассматриваемой теории к реальности имеет определенные пределы, поскольку частицы без спина (такие, как α-частица) весьма сложны. Мы не знаем, в какой мере структура этих частиц сказывается в релятивистской области. Тем не менее в § 4 приводятся некоторые краткие сведения о величине эффектов, вызываемых структурой частиц при наличии внешних полей, а полученные результаты сравниваются с аналогичными результатами теории дырок.

§ 2. Квантование волнового поля в отсутствие внешних полей

Известно, что скалярное релятивистское волновое уравнение можно записать в виде

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{h^2}\psi = 0, \tag{1}$$

если исходить из функции Лагранжа

$$L = -h^2c^2\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - m^2c^4\psi^*\psi = h^2\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - h^2c^2\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - m^2c^4\psi^*\psi$$

и воспользоваться вариационным принципом

$$\delta\int L\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4 = 0.$$

Тогда релятивистский тензор плотности энергии-импульса примет вид

$$T_{\mu\nu} = -h^2c^2\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}\right) - L\delta_{\mu\nu};$$

следовательно, выражение для энергии (функция Гамильтона) будет

$$\overline{H} = \int T_{44}\, dV = \int \left\{ h^2 \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + h^2 c^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + m^2 c^4 \psi^* \psi \right\} dV, \qquad (2)$$

а выражение для импульса —

$$G_k = \frac{i}{c} \int T_{4k}\, dV = -\int h^2 \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dV. \qquad (3)$$

Ясно, что плотность энергии является положительно-определенной.

Будем считать теперь ψ и ψ^* операторами (q-числами), причем ψ^* означает оператор, эрмитово-сопряженный относительно ψ. Следуя каноническому формализму квантования, введем импульсы π и π^*, канонически-сопряженные с ψ и ψ^*, согласно равенствам:

$$\pi = \frac{1}{h} \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial t)} = h \frac{\partial \psi^*}{\partial t}, \qquad \pi^* = \frac{1}{h} \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi^* / \partial t)} = h \frac{\partial \psi}{\partial t}. \qquad (4)$$

Перестановочные соотношения запишем в виде:

$$i\,[\pi(x, t), \psi(x', t)] = \delta(x - x'), \qquad i\,[\pi^*(x, t), \psi^*(x', t)] = \delta(x - x'), \qquad (\mathrm{I})$$

где $\delta(x)$ — известная дельта-функция Дирака, а скобки $[A, B]$ означают коммутатор A и B:

$$[AB] = AB - BA.$$

Величины ψ, ψ^* и π, π^* коммутируют между собой; кроме того, π коммутирует с ψ^*, а π^* — с ψ.

Нетрудно проверить, что для величин ψ, ψ^*, π, π^* выполняется правило

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{i}{h} [\overline{H}, f] \qquad (5)$$

и что, кроме того,

$$\frac{\partial f}{\partial x^k} = -\frac{i}{h} [G_k, f]. \qquad (5')$$

Последовательность сомножителей в выражении для импульса выбрана так, чтобы оператор был эрмитовым.

Рассмотрим выражения для компонент 4-вектора электрической плотности заряда-тока, которые записываются в виде $i_k = cS_k$ для тока и $S_4 = i\rho$ — для плотности заряда и удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial S_\nu}{\partial x^\nu} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{i} = 0, \qquad (6)$$

где e — абсолютное значение заряда частицы, а S_ν в этом случае определяется по формуле

$$S_\nu = ehci \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^\nu} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \psi^* \right), \qquad (7)$$

где

$$\rho = -ehi\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^*\right), \tag{7a}$$

$$S_k = ehci\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\psi^*\right). \tag{7б}$$

Порядок сомножителей в выражении для ρ выбран так, чтобы (как мы увидим далее) в вакууме не существовало никакой нулевой плотности; при этом эрмитов характер ρ остается без изменений.

Выражение для ρ с помощью (4) можно записать в виде

$$\rho = -ei(\pi\psi - \pi^*\psi^*). \tag{8}$$

Из уравнений (I) можно вывести основное свойство ρ: *значения ρ в двух пространственных точках x и x' коммутируют друг с другом*:

$$[\rho(x), \rho(x')] = 0. \tag{9}$$

Действительно, именно это свойство $\rho(x)$ позволяет говорить об измеримом распределении электрического заряда в пространстве даже в том случае, когда речь идет о пространственных областях, имеющих размеры порядка h/mc.

Позже мы увидим, что полный заряд

$$\bar{e} = \int \rho dV$$

имеет собственные значения $(0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N, \ldots)\, e$. Поскольку собственные значения $\rho(x)$ не зависят от x, из (9) следует, что собственные значения $\rho(x)$ равны

$$(0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N \ldots)\, e\, \delta(x - x'),$$

где значение x' произвольно [2].

Перейдем теперь к выражениям для различных физических величин в импульсном пространстве. Чтобы перейти в этом пространстве от интегралов к суммам, воспользуемся методом, состоящим во введении условия периодичности: будем считать, что волновые функции периодичны относительно куба с ребром L (и объемом $V = L^3$). В этом случае компоненты волнового вектора $\mathbf{k}$, который входит в фазы $e^{i(\mathbf{kx})}$ волн, должны быть равны целым кратным $2\pi/L$.

Операторы ψ и π можно представить в виде

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k q_k e^{i(\mathbf{kx})}, \qquad \psi^* = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k q_k^* e^{-i(\mathbf{kx})}, \tag{10a}$$

$$\pi^* = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k p_k e^{i(\mathbf{kx})}, \qquad \pi = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k p_k e^{-i(\mathbf{kx})} \tag{10б}$$

---

[2] Прямое доказательство см. в цитированной выше работе в Helv. phys. acta. (См. прим. 1.— *Ред.*).

с формулами обращения

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \int \psi e^{-i(\mathbf{kx})}\, dV, \qquad \overset{*}{q}_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \int \psi^* e^{i(\mathbf{kx})}\, dV, \tag{10в}$$

$$\overset{*}{p}_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \int \pi^* e^{-i(\mathbf{kx})}\, dV, \qquad p_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \int \pi e^{i(\mathbf{kx})}\, dV. \tag{10г}$$

Операторы p_k, q_k, p_k^*, q_k^* удовлетворяют соотношениям коммутации:

$$i\,[p_k, q_l] = \delta_{kl}, \qquad i\,[\overset{*}{p}_k, \overset{*}{q}_l] = \delta_{kl}. \tag{II}$$

Остальные переменные коммутируют между собой.

Если ввести обозначения:

$$E_k^2 = c^2 (h^2 k^2 + m^2 c^2), \tag{11}$$

$$E_k = + c \sqrt{h^2 k^2 + m^2 c^2}, \tag{11а}$$

то из (2) и (3) мы получим для полной энергии и полного импульса

$$\overline{H} = \sum_k (\overset{*}{p}_k p_k + E_k^2 \overset{*}{q}_k q_k) \tag{12}$$

и

$$\mathbf{G} = -\, ih \sum_k \mathbf{k}\, (p_k q_k - \overset{*}{q}_k \overset{*}{p}_k). \tag{13}$$

Наконец, из правила (4) найдем:

$$p_k = h \dot{\overset{*}{q}}_k, \qquad \overset{*}{p}_k = h \dot{q}_k, \tag{14а}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{1}{h} E_k^2 \overset{*}{q}_k, \qquad \dot{\overset{*}{p}}_k = -\frac{1}{h} E_k^2 q_k. \tag{14б}$$

Согласно (8) полный электрический заряд будет равен

$$\bar{e} = \int \rho\, dV = -\, ei \sum_k (p_k q_k - \overset{*}{p}_k \overset{*}{q}_k), \tag{15}$$

а полный ток —

$$\frac{1}{c} \mathbf{I} = \int \mathbf{s}\, dV = 2hc \sum_k \mathbf{k} \overset{*}{q}_k q_k. \tag{16}$$

Мы хотим доказать, что ту часть энергии, импульса и полного заряда, которая отвечает собственному колебанию $\mathbf{k}$, можно разложить на два члена, допускающие простую интерпретацию. Для этого введем вместо p_k, p_k^*, q_k, q_k^* переменные a_k, a_k^*, b_k, b_k^*, определяемые равенствами

$$p_k = \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}} (\overset{*}{a}_k + b_k), \qquad q_k = \frac{-i}{\sqrt{2}\sqrt{E_k}} (-a_k + \overset{*}{b}_k), \tag{17}$$

$$\overset{*}{p}_k = \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}} (a_k + \overset{*}{b}_k), \qquad \overset{*}{q}_k = \frac{-i}{\sqrt{2}\sqrt{E_k}} (\overset{*}{a}_k - b_k) \tag{17*}$$

с формулами обращения

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}} p_k^* - i\sqrt{E_k} q_k\right), \qquad a_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}} p_k + i\sqrt{E_k} q_k^*\right), \quad (18а)$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}} p_k - i\sqrt{E_k} q_k^*\right), \qquad b_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}} p_k^* + i\sqrt{E_k} q_k\right). \quad (18б)$$

Новые переменные удовлетворяют весьма простым перестановочным соотношениям:

$$[a_k, a_l^*] = \delta_{kl}, \qquad [b_k, b_l^*] = \delta_{kl}, \qquad (III)$$

коммутаторы всех остальных пар переменных равны нулю.

С другой стороны из (12), (13), (15) и (16) находим:

$$\overline{H} = \sum_k E_k \frac{1}{2}(a_k a_k^* + a_k^* a_k + b_k^* b_k + b_k b_k^*) = \sum_k E_k (a_k^* a_k + b_k^* b_k + 1), \quad (19)$$

$$\mathbf{G} = h\sum_k \mathbf{k}\frac{1}{2}(a_k^* a_k + a_k a_k^* - b_k^* b_k - b_k b_k^*) = h\sum_k \mathbf{k}(a_k^* a_k - b_k^* b_k), \quad (20)$$

$$\bar{e} = e\sum_k \frac{1}{2}(a_k^* a_k + a_k a_k^* - b_k^* b_k - b_k b_k^*) = e\sum_k (a_k^* a_k - b_k^* b_k), \quad (21)$$

$$\frac{1}{c}\mathbf{I} = e\sum_k \frac{hc\mathbf{k}}{E_k}(a_k^* a_k + b_k b_k^* - a_k^* b_k^* - a_k b_k) =$$

$$= e\sum_k \frac{hc\mathbf{k}}{E_k}(a_k^* a_k + b_k^* b_k - a_k^* b_k^* - a_k b_k + 1). \quad (22)$$

Применяя правило (5) [или сравнивая (18а), (18б) с (14а), (14б)], получаем:

$$\dot{a}_k = -i\frac{E_k}{h} a_k, \qquad \dot{b}_k = -i\frac{E_k}{h} b_k, \quad (23)$$

где

$$a_k = a_k(0)\, e^{-i\frac{E_k}{h}t}, \qquad b_k = b_k(0)\, e^{-i\frac{E_k}{h}t}, \quad (24)$$

$$a_k^* = a_k^*(0)\, e^{+i\frac{E_k}{h}t}, \qquad b_k^* = b_k(0)\, e^{+i\frac{E_k}{h}t}. \quad (24^*)$$

Следовательно, можно сказать, что a_k и b_k отвечают отрицательной частоте, а a_k^* и b_k^* — положительной или, если учесть соотношение (17), что $\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{a_k}{\sqrt{E_k}}$ и $-\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{b_k^*}{\sqrt{E_k}}$ — части q_k, отвечающие соответственно отрицательной и положительно частотам, а $\frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}} b_k$ и $\frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}} a_k^*$ — аналогичные части p_k. Этот результат играет важную роль в последующем.

Переходя к физической интерпретации формул (19) — (22), заметим, что, как следует из (III), $\overset{*}{a}_k a_k$ и $\overset{*}{b}_k b_k$ имеют собственными значениями 0, 1, 2, ... В частности, приняв во внимание (20) и (21), можно утверждать, что *величины* N_k^+ и N_{-k}^-, *определяемые соотношениями*

$$N_k^+ = \overset{*}{a}_k a_k, \quad N_{-k}^- = \overset{*}{b}_k b_k, \tag{25}$$

означают соответственно число частиц с зарядом $+e$ *и импульсом* $+\hbar\mathbf{k}$ *и число частиц с зарядом* $-e$ *и импульсом* $-\hbar\mathbf{k}$.

Члены в (19) и (22) с коэффициентом $+1$ можно интерпретировать как нулевые, т. е. относящиеся к вакууму, энергию и ток (ненаблюдаемые величины). Весьма существенны члены с $a_k b_k$ и $\overset{*}{a}_k \overset{*}{b}_k$ в выражении для I. Именно они препятствуют постоянству полного тока по времени и в точности соответствуют «дрожанию», введенному Шредингером, поскольку согласно (24) их зависимость от времени определяется множителями $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}2E_k t\right)$ и $\exp\left(+\frac{i}{\hbar}2E_k t\right)$. В § 4 мы увидим, что при рассмотрении поля аналогичные члены приводят к рождению и уничтожению пар.

§ 3. Возможные обобщения теории. Проблема скалярной теории с принципом запрета

Чтобы выяснить, возможна ли теория частиц со спином нуль, но подчиняющихся принципу запрета, необходимо прежде всего обсудить более подробно физический смысл переменных a_k, $\overset{*}{a}_k$ и b_k, $\overset{*}{b}_k$. Мы уже говорили о том, что $\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{a_k}{\sqrt{E_k}}$ и $\frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{\overset{*}{b}_k}{\sqrt{E_k}}$ означают члены q_k, отвечающие соответственно отрицательной и положительной частотам.

Образуем теперь соответствующие члены $\psi(x)$ [см. (10а)]:

$$\psi_1(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{a_k}{\sqrt{E_k}}e^{i(\mathbf{kx})}, \qquad \psi_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{\overset{*}{b}_k}{\sqrt{E_k}}e^{i(\mathbf{kx})} \tag{26}$$

и

$$\begin{aligned}\overset{*}{\psi}_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{\overset{*}{a}_k}{\sqrt{E_k}}e^{-i(\mathbf{kx})},\\ \overset{*}{\psi}_2(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{b_k}{\sqrt{E_k}}e^{-i(\mathbf{kx})}.\end{aligned} \tag{26a}$$

Приняв во внимание (III), найдем перестановочные соотношения:

$$[\psi_1(\mathbf{x}, t), \overset{*}{\psi}_1(\mathbf{x}', t)] = \frac{1}{2}\frac{1}{V}\sum_k \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{E_k} = \frac{1}{2}\frac{1}{V}\sum_k \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\sqrt{\hbar^2k^2+m^2c^2}},$$

$$[\psi_2(\mathbf{x}, t), \overset{*}{\psi}_2(\mathbf{x}', t)] = -\frac{1}{2}\frac{1}{V}\sum_k \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{E_k} = -\frac{1}{2}\frac{1}{V}\sum_k \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\sqrt{\hbar^2k^2+m^2c^2}}.$$

Определим функцию $g(x)$ по формуле

$$g(x) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{V} \sum_k \frac{e^{i\mathbf{kx}}}{\sqrt{h^2k^2 + m^2c^2}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{kx}}}{\sqrt{h^2k^2 + m^2c^2}} dk_1\, dk_2\, dk_3. \qquad (27)$$

Если пренебречь различием между L конечным и L бесконечным, то наши соотношения можно записать в виде:

$$[\psi_1(\mathbf{x}, t), \overset{*}{\psi}_1(\mathbf{x}', t)] = \frac{1}{2} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \qquad (28_1)$$

$$[\psi_2(\mathbf{x}, t), \overset{*}{\psi}_2(\mathbf{x}', t)] = -\frac{1}{2} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \qquad (28_2)$$

Все величины с индексом 1 *коммутируют со всеми величинами, имеющими индекс* 2. Поэтому символически функцию $g(x)$ можно записать как

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}} \delta(x), \qquad (27a)$$

если заметить, что $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака — равна

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{kx})} dk_1\, dk_2\, dk_3,$$

а выражение $h^2k^2 + m^2c^2$ отвечает оператору — $h^2\Delta + m^2c^2$. Вообще для произвольной функции $f(x)$ справедлива формула

$$\frac{1}{\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}} f(x) = \int g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f(\mathbf{x}')\, dV'.$$

Кроме того, из (23) находим:

$$\overset{*}{\pi}_1 = h\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{a_k}{\sqrt{2}} \sqrt{E_k} e^{i(\mathbf{kx})}, \qquad \overset{*}{\pi}_2 = h\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{\overset{*}{b}_k}{\sqrt{2}} \sqrt{E_k} e^{i(\mathbf{kx})},$$

откуда с помощью только что выписанного символического выражения получаем

$$\begin{aligned} \overset{*}{\pi}_1 &= h\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = -i\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}\,\psi_1, \\ \overset{*}{\pi}_2 &= h\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = +i\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}\,\psi_2; \end{aligned} \qquad (29)$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= h\frac{\partial\overset{*}{\psi}_1}{\partial t} = +i\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}\,\overset{*}{\psi}_1, \\ \pi_2 &= h\frac{\partial\overset{*}{\psi}_2}{\partial t} = -i\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}\,\overset{*}{\psi}_2. \end{aligned} \qquad (29^*)$$

Функции ψ_1, ψ_2 *и* $\overset{*}{\psi}_1$, $\overset{*}{\psi}_2$ — *скаляры относительно группы Лоренца.* Действительно, свойство волновой функции иметь частоты только одного знака сохраняется при преобразованиях Лоренца.

Заметим, что перестановочные соотношения также инвариантны относительно группы Лоренца, поскольку при $t \neq t'$ их можно обобщить следующим образом, если воспользоваться формулой (24). Пусть по определению

$$g_+(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\exp\left[i\left(\mathbf{kx} + \sqrt{h^2k^2 + m^2c^2}\, ct\right)\right]}{\sqrt{h^2k^2 + m^2c^2}}\, dk_1\, dk_2\, dk_3, \tag{30}$$

$$g_-(\mathbf{x}, t) = g_+(\mathbf{x}, -t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\exp\left[i\left(\mathbf{kx} - \sqrt{h^2k^2 + m^2c^2}\, ct\right)\right]}{\sqrt{h^2k^2 + m^2c^2}}\, dk_1\, dk_2\, dk_3. \tag{30*}$$

Эти выражения можно заменить следующими:

$$g_+(\mathbf{x}, 0) = g_-(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}}\,\delta(\mathbf{x}),$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial g_+}{\partial t}\right)_{\mathbf{x},\,0} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial g_-}{\partial t}\right)_{\mathbf{x},\,0} = i\delta(\mathbf{x}),$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{h^2}\right) g_\pm = 0.$$

Тогда

$$[\psi_1(\mathbf{x}, t), \psi_1^*(\mathbf{x}', t')] = \frac{1}{2}\, g_-(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t'), \tag{31$_1$}$$

$$[\psi_2(\mathbf{x}, t), \psi_2^*(\mathbf{x}', t')] = -\frac{1}{2}\, g_+(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t'). \tag{31$_2$}$$

Из формулы (30) ясно, что функции, стоящие в правых частях этих равенств, являются релятивистскими скалярами.

Правда, данные нами определения ψ_1, ψ_2 и их перестановочные соотношения инвариантны лишь для свободных частиц и должны быть надлежащим образом модифицированы при наличии электромагнитных полей. Эту проблему, по-видимому, можно будет решить (скорее всего неоднозначно) тем методом, который Дирак [3] предложил для решения аналогичной проблемы в теории дырок. Суть метода заключается в том, что функцию $g(\mathbf{x}, t)$ определяют не формулой (30), а ее особенностями на «световом конусе» $\mathbf{x}^2 - c^2t^2 = 0$.

Мы не будем обсуждать эту проблему и перейдем к рассмотрению выражения для 4-вектора заряда-тока в отсутствие внешних полей. Подставив $\psi = \psi_1 + \psi_2$ в (7), получим три группы членов:

$$S_\nu = ehci\left[\left(\frac{\partial\psi_1^*}{\partial x^\nu}\psi_1 - \psi_1^*\frac{\partial\psi_1}{\partial x^\nu}\right) + \left(\psi_2\frac{\partial\psi_2^*}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x^\nu}\psi_2^*\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial\psi_1^*}{\partial x^\nu}\psi_2 - \psi_2^*\frac{\partial\psi_1}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\psi_2^*}{\partial x^\nu}\psi_1 - \psi_1^*\frac{\partial\psi_2}{\partial x^\nu}\right)\right]. \tag{32}$$

[3] *P. A. M. Dirac.* Proc. Cambridge Philos. Soc., 1934, **30**, 150.

Как видно из полученного выражения, мы изменили порядок следования некоторых сомножителей. Действительно,

$$\psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} \psi_2^*, \qquad \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\nu} \psi_1^*,$$

а согласно (28) и (29)

$$-\psi_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} + \psi_2 \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} \psi_1^* + \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x^\nu} \psi_1.$$

Такое изменение порядка сомножителей делает возможной статистику Ферми.

Важно заметить, что каждая из трех групп членов ковариантна относительно релятивистской группы и не зависит от двух других. *Следовательно, можно попытаться обобщить теорию, положив*

$$S_\nu = hci \left[c_1 \left(\frac{\partial \psi_1^*}{\partial x^\nu} \psi_1 - \psi_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} \right) + c_2 \left(\psi_2 \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\nu} \psi_2^* \right) + \right.$$
$$\left. + c_3 \left(\frac{\partial \psi_1^*}{\partial x^\nu} \psi_2 - \psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x^\nu} \psi_1 - \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\nu} \right) \right], \qquad (32a)$$

где c_1, c_2, c_3 — неопределенные вещественные коэффициенты. Нетрудно видеть, что это выражение 1) эрмитово, 2) релятивистски ковариантно, 3) удовлетворяет уравнению непрерывности $\sum_\nu \frac{\partial S_\nu}{\partial x^\nu} = 0$. Кроме того, из (29) мы получим для полного заряда вместо (21) выражение

$$\bar{e} = \int \rho \, dV = \sum_k (c_1 a_k^* a_k - c_2 b_k^* b_k). \qquad (21a)$$

Следовательно, постоянные c_1 и $-c_2$ имеют смысл зарядов частиц 1 и 2, в то время как c_3 определяет частоту процессов рождения пар.

Возникает следующий вопрос: чем случай $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ нашей теории, изложенный в § 1, отличается от общего случая? *Ответ на этот вопрос дает условие* (9) *коммутативности* $\rho(x)$ *и* $\rho(x')$. Если вычислить $[\rho(x), \rho(x')]$ исходя из общего выражения (21a), то после довольно продолжительных выкладок окажется, что это выражение равно нулю лишь при условиях

$$c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 \quad \text{и} \quad c_1 c_3 = c_2 c_3,$$

т. е. $c_1 = c_2$ и $c_3 = \pm c_1$. Но знак c_3 произволен, поскольку вместо ψ_2 и ψ_2^* можно подставить $-\psi_2$ и $-\psi_2^*$, не изменяя перестановочных соотношений. *Следовательно, тот случай теории, о котором говорится в* § 1, *является единственным случаем, когда* $\rho(x)$ и $\rho(x')$ *коммутируют.*

Теперь можно развить теорию для случая, когда выполняется принцип запрета. Для того чтобы N_k^+ и N_{-k}^- имели собственными значениями 0 и 1,

необходимо положить

$$[a_k, a_l^*]_+ = \delta_{kl}, \quad [b_k, b_l^*]_+ = \delta_{kl}, \quad [a_k, b_l^*]_+ = [a_k^*, b_l]_+ = [a_k, a_l]_+ = = [b_k, b_l] = 0,$$

где $[A, B]_+$ сокращенно обозначает $AB + BA$. Тогда

$$[\psi_1(\mathbf{x}, t), \psi_1^*(\mathbf{x}, t)]_+ = \frac{1}{2} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \qquad [\psi_2(\mathbf{x}, t), \psi_2^*(\mathbf{x}', t)]_+ = +\frac{1}{2} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{28'}$$

Соотношения (29) остаются в силе и в случае статистики Ферми. Выражение (32a) уже записано в таком виде, что условия релятивистской инвариантности и уравнение непрерывности удовлетворяются автоматически. Важно заметить, что для того, чтобы плотность $\rho(x)$ была эрмитовой, коэффициенты c_1, c_2, c_3 должны быть вещественными. Если попытаться найти условия, при которых $[\rho(x), \rho(x')] = 0$ в случае принципа запрета, то окажется, что ими являются равенства

$$c_1^2 = c_2^2 = -c_3^2, \qquad c_1c_3 = c_2c_3.$$

Знак минус перед c_3^2 означает, что единственно возможным решением для вещественных коэффициентов является тривиальное решение $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Таким образом, результат наших рассмотрений можно сформулировать следующим образом: *в случае принципа запрета невозможно одновременно удовлетворить релятивистской инвариантности теории и условию коммутативности* $\rho(x)$ *и* $\rho(x')$.

Мы не будем пытаться строить теорию, в которой плотности $\rho(x)$ в различных точках пространства не коммутируют друг с другом, поскольку такая теория заведомо привела бы к трудностям при рассмотрении перестановочных соотношений для электромагнитного поля, и ограничимся лишь констатацией того, что случай статистики Бозе — Эйнштейна в релятивистской скалярной теории отличается своей простотой.

§ 4. Случай внешнего электромагнитного поля. Сравнение полученных результатов с теорией дырок

Возвращаясь к теории, развитой в § 2, перейдем к обсуждению того случая, когда имеется электромагнитное поле. Для простоты будем рассматривать потенциалы Φ_μ и поле $F_{\mu\nu}$ как обычные числа. Тогда функцию Лагранжа для поля материальных частиц можно представить в виде

$$L = -h^2c^2 \sum_{\nu=1}^{4} \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu} + \frac{ie}{hc}\Phi_\nu\psi^*\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - \frac{ie}{hc}\Phi_\nu\psi\right) - m^2c^4\psi^*\psi. \tag{33}$$

Импульсы, канонически-сопряженные с ψ и ψ^*, будут определяться выражениями

$$\pi = \frac{1}{h}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} = h\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - ie\Phi_0\psi^*, \qquad \pi^* = \frac{1}{h}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)} = h\frac{\partial\psi}{\partial t} + ie\Phi_0\psi, \tag{34}$$

заменяющими выражения (4). Функция Гамильтона примет вид

$$H = \int (\pi\dot{\psi} + \pi\dot{\psi}^{**} - L)\, dV = H_0 + H_1, \tag{35}$$

где

$$H_0 = \int \left\{ \pi\pi^* + h^2c^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m^2c^4\psi^*\psi \right\} dV \tag{35$_0$}$$

и

$$H_1 = ie \int \Phi_0 (\pi^*\psi^* - \pi\psi)\, dV + \int \left\{ ehc \sum_{k=1}^{3} \Phi_k \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\psi \right) + \right.$$
$$\left. + e^2 \sum_{k=1}^{3} \Phi_k^2 \psi^*\psi \right\} dV. \tag{35$_1$}$$

Эти новые выражения для π и π^* дополняют канонические перестановочные соотношения

$$i\,[\pi(x, t), \psi(x', t)] = \delta(x - x'), \qquad i\,[\pi^*(x, t), \psi^*(x', t)] = \delta(x - x'). \tag{I}$$

Выпишем компоненты 4-вектора электрического заряда-тока, удовлетворяющие уравнению неразрывности (6):

$$S_\nu = ehci \left[\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu} + \frac{ie}{hc}\Phi_\nu\psi^* \right)\psi - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - \frac{ie}{hc}\Phi_\nu\psi \right)\psi^* \right], \tag{36}$$

где

$$\rho = -iS_4 = -ei \left[\left(h\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - ie\Phi_0\psi^* \right)\psi - \left(h\frac{\partial\psi}{\partial t} + ie\Phi_0\psi \right)\psi^* \right] =$$
$$= -ei(\pi\psi - \pi^*\psi^*), \tag{36a}$$

$$S_k = ihc \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\psi^* \right) - 2e\Phi_k\psi^*\psi. \tag{36б}$$

Второе выражение для ρ показывает, что утверждения о коммутационных свойствах и собственных значениях $\rho(x)$ и в этом случае остаются такими же, как и в случае отсутствия внешних полей.

Волновое уравнение, записанное с учетом правила (4), имеет вид

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{ie}{hc}\Phi_k \right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{ie}{hc}\Phi_k \right)\psi -$$
$$- \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{hc}\Phi_0 \right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{hc}\Phi_0 \right)\psi - \frac{m^2c^2}{h^2}\psi = 0. \tag{37}$$

Можно ввести функцию Гамильтона в импульсном пространстве и переменные a_k, a_k^*, b_k, b_k^*, определяемые так же, как в § 2. Тогда H_0 может быть вычислена по формуле (19), а если ввести матричный элемент f_{kl},

соответствующий функции $f(x)$,

$$f_{kl} = \frac{1}{V} \int f(x)\, e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{x}} dV, \qquad (38)$$

то H_1 в силу (35_1) можно представить в виде

$$H_1 = \frac{1}{2} e \sum_k \sum_l \Phi^0_{kl} \left[\frac{E_k + E_l}{\sqrt{E_k E_l}} (\overset{*}{a}_k a_l - \overset{*}{b}_l b_k) + \frac{E_k - E_l}{\sqrt{E_k E_l}} (a_l b_k - \overset{*}{a}_k \overset{*}{b}_l) \right] +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \frac{1}{\sqrt{E_k E_l}} [hce(\mathbf{\Phi}_{kl}, \mathbf{k} + \mathbf{l}) - e^2 (\mathbf{\Phi}^2)_{kl}] \times$$
$$\times (\overset{*}{a}_k a_l - b_k \overset{*}{b}_l - \overset{*}{a}_k \overset{*}{b}_l - b_k a_l).$$

Нетрудно видеть, что именно матричные элементы величин $a_l b_k$ и $\overset{*}{a}_k \overset{*}{b}_l$ приводят к рождению и аннигиляции пар.

Частота этих процессов, вызванных поглощением одного фотона $h\nu$ в кулоновском поле ядра с зарядом Ze, имеет тот же порядок величины, что и в теории дырок. В случае $h\nu \gg mc^2$ полное сечение процесса равно

$$Q \sim \frac{Z^2 e^2}{hc} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \ln \frac{2h\nu}{mc^2}.$$

Численный множитель в рассматриваемой теории отличается от множителя в теории дырок. Вообще можно сказать, что любой эффект, ведущий к рождению пар, который существует в теории дырок, существует и в нашей теории. Таковы, например, рассеяние света на свете или когерентное рассеяние фотона в поле ядра.

К сожалению, заключения о существовании бесконечной поляризации вакуума и бесконечной собственной энергии частиц одинаковы в обеих теориях. В нашей теории оба эффекта расходятся как интеграл $\int d|k|/|k|$ в импульсном пространстве, т. е. так же, как в первоначальной форме дираковской теории дырок [4].

Я считаю, что эти трудности удастся преодолеть лишь в теории, которая позволит объяснить численное значение постоянной e^2/hc, что потребует выработки совершенно новых точек зрения.

[4] По поводу поляризации вакуума см. *P. A. M. Dirac.* In: Rapport du Congrès Solvay, 1933. О собственной энергии частиц см. *V. Weisskopf.* Z. Phys., 1934, 89, 27; 90, 817.

ПО ПОВОДУ *Н*-ТЕОРЕМЫ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ *

(Совместно с М. Фирцем)

В настоящей работе подробно обсуждается предложенная фон Нейманом интерпретация термодинамических свойств квантовомеханической системы, согласно которой система считается замкнутой, а ее функция Гамильтона — вполне известной. Кроме того, вводится макроскопический наблюдатель, который может измерять лишь некоторые усредненные значения точных параметров системы — так называемые «макроскопические величины». Они все коммутируют между собой, и каждая из них обладает s_ν-кратным вырождением (фазовые ячейки; ср. с «грубой плотностью» у Эренфестов). Среди этих величин содержится и постоянная по времени макроскопическая энергия, которая в свою очередь является средним значением точной функции Гамильтона, соответствующим каждому собственному значению S_a последней (энергетической оболочке). Поэтому максимальное число N_a значений макроскопической величины, отвечающих одному и тому же значению макроэнергии, можно интерпретировать как число фазовых ячеек на данной энергетической поверхности. Будет показано, что требования термодинамики (H-теорема, эргодическая гипотеза) выполнены *для всех* возможных состояний, если в отсутствие тривиальных вырождений периодов системы среднее число S/N состояний, приходящихся на одну фазовую ячейку, на любой энергетической оболочке много больше числа $(\ln S)^{+2}$. Эти условия достаточны в том смысле, что при заданных значениях s_ν и S требования термодинамики выполняются *не для всех* макронаблюдателей, поскольку может случиться так, что либо все макроскопические величины, либо бо́льшая часть их постоянны по времени. Однако можно утверждать, что при заданных условиях вероятность появления такого исключительного наблюдателя среди макронаблюдателей чудовищно мала.

1. В последние годы появились различные работы о связи статистической и квантовой механики. В частности, Дельбрюк и Мольер [1] опубликовали работу, в которой подробно обсуждался вопрос о перенесении общих методов статистической механики на случай квантовомеханического формализма. Однако на вопрос о сущности H-теоремы Больцмана о возрастании энтропии в этой работе дается неудовлетворительный с нашей точки зрения ответ, поскольку авторы предполагают, что подлежащая рассмотрению физическая система как таковая не должна быть точно определена, т. е. функция Гамильтона этой системы не должна быть вполне определенной. Мы считаем, что подход к этой проблеме, предложенный Нейманом [2], лучше отвечает физической стороне дела. Нейман исходит из предположения о том, что как система, так и ее состояния полностью

---

* *Über das H-Theorem in der Quantenmechanik.*— Z. Phys., 1937, 106, 572—587.

[1] *M. Delbrück, G. Molière.* Abhandlungen Preuß. Akad. Wiss., 1936, N 1.

[2] *J. v. Neumann.* Z. Phys., 1929, 57, 30.

определены. Существование второго начала сводится к свойствам макроскопического наблюдателя, характеризуемого тем, что он может измерять лишь некоторые средние значения переменных состояния системы.

Поскольку работа Неймана мало доступна для физиков, а физическое обоснование и обсуждение его предположений и результатов, по-видимому, нуждаются в дополнениях, мы в заключение этой работы еще раз остановимся на вопросе об H-теореме в квантовой механике [3].

С чисто физической точки зрения ситуация в квантовой механике ничем не отличается от ситуации в классической механике, вследствие чего по принципиальным вопросам мы можем ссылаться на статью П. и Т. Эренфестов [4]. Приведенная нами характеристика макроскопического наблюдателя в их статье отвечает наблюдателю, который может измерять лишь «грубую» плотность [5].

2. Макронаблюдатель. Макронаблюдатель может измерять не все макроскопические величины, но лишь некоторые средние значения этих величин. При этом предполагается, что он может измерять их сколь угодно точно. (По существу гакое предположение нужно лишь для математического выражения того, что макронаблюдатель может производить лишь неточные измерения.) В частности, он может измерить не истинную энергию, а лишь величину, которая хотя и постоянна по времени, но совпадает с энергией лишь в среднем, взятом по многим микросостояниям. Эту макроэнергию мы определим следующим образом. Пусть микроэнергия системы (функция Гамильтона) есть диагональная матрица с собственными значениями E_k и соответствующими собственными функциями φ_k. Поскольку макроэнергия постоянна, она также должна быть диагональной матрицей. Однако все $S^{(1)}$ ее первых элементов равны $E^{(1)}$ — среднему значению $S^{(1)}$ первых E_k; $S^{(2)}$ следующих собственных значений равны

---

[3] Из старых работ на эту тему в особенности следует упомянуть работу В. Паули, опубликованную в сборнике, посвященном шестидесятилетию А. Зоммерфельда (русск. пер. см. *В. Паули.* Труды по квантовой теории. М., «Наука», 1975, с. 661.— *Ред.*); в этой работе с помощью теории возмущений для системы общего вида дается доказательство, совершенно аналогичное больцмановскому доказательству H-теоремы для идеального газа, т. е. на основе «гипотезы о беспорядке» доказывается монотонное возрастание энтропии.

[4] *P. Ehrenfest, T. Ehrenfest.* Encyclopädie der Mathematik, 4, 4, S. 60.

[5] В § 10 уже упоминавшейся работы Дельбрюка и Мольера, а также в работе Такуро Сакаи (Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, Serie 3, 1937, 19, 172) имеется еще одно рассуждение, носящее специфически квантовомеханический характер: поскольку измерение некоторой величины в квантовой механике представляет собой необратимое воздействие на систему, повторные измерения одних и тех же переменных состояния системы могут привести к возрастанию энтропии. Далее из монотонного возрастания энтропии оба автора делают ошибочное заключение о том, что энтропия в конце концов достигает некоего канонического значения, т. е. максимального значения, отвечающего термодинамическому равновесию, что совершенно необоснованно с математической точки зрения и не отвечает ни одной физической модели. Кроме того, этот способ рассуждения не позволяет объяснить сущность второго начала, поскольку приходится предполагать, будто система без внешних воздействий достигает теплового равновесия, что в принципе можно установить с помощью одного-единственного измерения.

$E^{(2)}$ — среднему значению $S^{(2)}$ следующих E_k и т. д. Поэтому стационарные состояния φ_k разбиваются на группы (1), (2), ..., содержащие $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ... состояний, каждое из которых принадлежит одному и тому же значению макроэнергии. Такого рода группу из $S^{(a)}$ состояний мы будем называть энергетической оболочкой, поскольку она соответствует этому понятию теории Гиббса. Рассмотрим теперь энергетическую оболочку, содержащую S состояний, для которых макроэнергия имеет значение $\bar{E}$. Внутри этого подпространства пространства состояний макроэнергия представляет собой число, и все операторы, которые допускают разложение по энергетическим оболочкам, коммутируют с макроэнергией.

Внутри такой энергетической оболочки макронаблюдатель может различать состояния, поскольку макроскопическое состояние системы заданием энергии в общем еще не определяется. Так, например, в системе можно выделять некоторые подсистемы и находить распределение энергии между ними или измерять средний импульс каждой такой подсистемы и т. д. Все эти измерения должны быть макроскопическими, а измеренные величины должны иметь смысл и как классические, поскольку термодинамика является классической теорией. Различные макросостояния в энергетической оболочке мы будем отличать по значениям неких переменных A, B, ... Поскольку эти переменные должны быть классическими величинами, они должны коммутировать друг с другом и с макроэнергией (но отнюдь не с микроэнергией, так как в общем случае она не будет интегралом). Существует система собственных функций ω_τ, относительно которых эти переменные имеют в общем случае вырожденные собственные значения. Одновременно эти ω_τ служат собственными функциями макроэнергии. И снова так же, как это было при рассмотрении энергии, найдутся такие группы состояний, что внутри группы ν, в которую входят s^ν состояний, все величины A_τ, B_τ принимают значения A^ν, B^ν, не зависящие от τ. Это свойство характеризует A, B,... как макроскопические величины. Такого рода группу из s^ν состояний мы будем называть фазовой ячейкой. Тогда макроскопическое состояние системы будет определяться заданием вероятности нахождения системы в различных фазовых ячейках. Пусть число фазовых ячеек в энергетической оболочке равно N: $\sum_{\nu=1}^{N} s^\nu = S$.

Собственные функции энергии φ_α и собственные функции макроскопических переменных ω_τ связаны между собой унитарным преобразованием

$$\omega_\tau = \sum_\sigma U_{\tau\sigma}\varphi_\sigma, \qquad \varphi_\sigma = \sum_\tau U^*_{\tau\sigma}\omega_\tau, \tag{1}$$

причем преобразование $U_{\tau\sigma}$ распадается на преобразования, действующие в различных энергетических оболочках, и, следовательно, на подматрицы с $S^{(a)}$ строками и столбцами. Если размеры энергетических оболочек и фазовых ячеек заданы, т. е. известны $S^{(a)}$ и s^ν, то найдется еще бесконечно много макроскопических наблюдателей, которые смогут измерить все остальные величины и охарактеризовать их с помощью различных систем

функций ω_τ или соответственно с помощью различных преобразований $U_{\tau\sigma}$.

3. Плотность в фазовом пространстве. Микроканонический ансамбль и энтропия. Предположим теперь, что система находится в некотором определенном состоянии

$$\psi = \sum_\sigma r_\sigma \psi_\sigma = \sum_\tau t_\tau \omega_\tau.$$

Тогда вероятность того, что система находится в фазовой ячейке ν, равна

$$x^\nu = \sum_{\tau=1}^{s^\nu} | t_\tau^\nu |^2 \equiv s^\nu P_\nu(\psi). \tag{2}$$

Величина $P_\nu(\psi)$ означает макроскопическую плотность (или «грубую плотность» в смысле Эренфестов) в пространстве состояний. Лишь ее может измерить макронаблюдатель. Микроскопическая плотность («тонкая плотность») равна $| t_\tau |^2$.

Здесь между квантовой и классической теориями имеется различие. Действительно, поскольку квантовая теория является статистической, описание с помощью ψ-функции соответствует статистическому ансамблю классической теории. Поэтому даже в том случае, когда рассматривается отдельное четко определенное состояние системы, квантовая теория будет давать лишь вероятность того, что в некоторый фиксированный момент времени t система будет находиться в той или иной фазовой ячейке. Хотя в других случаях это различие и представляет принципиальный интерес, в рассматриваемой нами проблеме оно не играет никакой роли. Для нас существенно, что обе теории описывают временны́е изменения соответствующих плотностей в фазовом пространстве или в пространстве состояний с помощью точных дифференциальных уравнений, не позволяющих каким-либо образом выделить направление времени.

Вероятность найти систему в энергетической оболочке (a) в силу аналогичных соображений равна

$$u_a = \sum_{\nu=1}^{N_a} \sum_{\tau=1}^{s^\nu} | t_\tau^\nu |^2 = \sum_{\sigma=1}^{S^{(a)}} | r_\sigma^{(a)} |^2, \tag{3}$$

причем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} x^\nu = \sum_{a=1}^{\infty} u_a = 1. \tag{4}$$

Микроканонический ансамбль, соответствующий состоянию ψ, представляет собой ансамбль всех состояний, для которых

$$P_\mu(\psi) = \frac{1}{s_\nu} \sum_{\tau=1}^{s_\nu} | t_\tau^\nu |^2 = \frac{u_a}{S_a}, \tag{5}$$

т. е. для которых «грубая плотность», или макроплотность, постоянна на энергетической оболочке.

Энтропия в этом случае определяется как

$$S(\psi) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu P^\nu \ln P^\nu = -\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \ln \frac{x_\nu}{s_\nu}. \qquad (6)$$

Соответствующая микроканоническая энтропия равна

$$S_\mu(\psi) = -\sum_{a=1}^{\infty} u_a \ln \frac{u_a}{S^{(a)}}. \qquad (7)$$

Для справедливости H-теоремы достаточно, чтобы среднее по времени от энтропии $S(\psi)$ было практически равно микроканонической энтропии:

$$S_\mu(\psi) - \overline{S(\psi)} = \varepsilon, \text{ где } 0 < \varepsilon \ll 1. \qquad (8)$$

Действительно, отсюда следует, что энтропия в течение подавляюще больших промежутков времени должна очень мало отличаться от $S_\mu(\psi)$, а очень большие отклонения чрезвычайно редки. Если же встретится состояние, энтропия которого сильно отличается от канонического значения, то в последующие моменты времени энтропия почти всегда будет возрастать, т. е. приближаться к каноническому значению. Если отклонение от эргодического значения энтропии равно a, то вероятность убывания энтропии во всяком случае меньше ε/a; при этом a по порядку величины совпадает с самой микроканонической энтропией, т. е. имеет порядок $\ln S$[6].

Для оценки разности (8) $\bar{S}(\psi) - S_\mu(\psi)$ воспользуемся следующей формулой.

Пусть

$$L(x, y) = x(\ln x - \ln y) - x + y;$$

тогда, как нетрудно видеть, при $x > 0$, $y > 0$

$$L(x, y) \geqslant 0.$$

Кроме того,

$$yL(x, y) + xL(y, x) = (x - y)^2,$$

откуда

$$0 \leqslant L(x, y) \leqslant \frac{1}{y}(x - y)^2 \quad \text{при} \quad x > 0, \quad y > 0.$$

---

[6] Строго говоря, $S(\psi)$ следует усреднять по сколь угодно малому, но конечному промежутку времени

$$\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} S(\psi)\, d\tau = S_\tau(\psi, t)$$

и рассматривать $S_\tau(\psi, t) - S_\mu(\psi)$. См. также цитированную выше статью П. и Т. Эренфестов, с. 41, прим. 14. (См. прим. 4.— *Ред.*)

Пусть теперь

$$x = \frac{x_\nu}{s^\nu}, \qquad y = \frac{u_a}{S^{(a)}};$$

тогда, умножив на s_ν и просуммировав по ν, получим

$$0 \leqslant -u_a \ln \frac{u_a}{S^{(a)}} + \sum_{\nu=1}^{N_a} x_\nu \ln \frac{x_\nu}{S_\nu^{(a)}} \leqslant \sum_{\nu=1}^{N_a} \frac{S^{(a)}}{s_\nu u_a}\left(x_\nu - \frac{s_\nu u_a}{S^{(a)}}\right)^2. \tag{9}$$

Таким образом, $S_\mu(\psi) \geqslant S(\psi)$. Это неравенство доказал еще Гиббс. Осталось еще показать, что среднее по времени от правой части неравенства (9) малó (что доказывается несколько легче, чем аналогичное утверждение для разностей энтропии, поскольку логарифмы при этом исключаются). Для этого с помощью унитарного преобразования $U_{\tau\sigma}$ выразим x^ν из (3), (4) через r_σ:

$$r_\sigma = |r_a| e^{i\omega_\sigma t + i\alpha}.$$

Тем самым зависимость от времени будет указана явно. Это выражение подставим в правую часть неравенства (9) и усредним по времени. При этом будем предполагать, что система не вырождена по энергии и по разностям энергии:

$$\omega_\sigma - \omega_\rho \neq 0 \text{ при } \sigma \neq \rho, \qquad (\omega_\sigma - \omega_\rho) - (\omega_{\sigma'} - \omega_{\rho'}) \neq 0 \text{ при } \rho \neq \rho', \sigma \neq \sigma'.$$

В результате находим

$$\overline{\left(x_\nu - \frac{s_\nu u}{S}\right)^2} = \sum_{\substack{\rho=1 \\ (\rho\neq\sigma)}}^{S} |r_\rho r_\sigma|^2 C_{\rho\sigma}^\nu + \left\{\sum_{\rho=1}^{S} |r_\rho|^2 \left(C_{\rho\rho}^\nu - \frac{s_\nu}{S}\right)^2\right\}, \tag{10}$$

причем

$$\sum_{\tau=1}^{s^\nu} U_{\rho\tau}^* U_{\sigma\tau} = C_{\rho\sigma}^\nu\,[7]. \tag{11}$$

Имеем

$$\sum_{\rho=1}^{S} |r_\rho|^2 = u.$$

Справедливо неравенство

$$\left\{\sum_{\rho=1}^{S} |r_\rho|^2 \left(C_{\rho\rho}^\nu - \frac{s_\nu}{S}\right)^2\right\} \leqslant u \sum_{\rho=1}^{S} |r_\rho|^2 \left(C_{\rho\rho}^\nu - \frac{s_\nu}{S}\right)^2.$$

---

[7] См. также цитированную работу фон Неймана, с. 52 и далее.

Оно следует из соотношения $\sum_\rho |r_\rho|^2 = u$ и неравенства Шварца

$$\Big(\sum_\rho a_\rho b_\rho\Big)^2 \leqslant \sum_\rho a_\rho^2 \sum_\rho b_\rho^2, \quad \text{если} \quad a_\rho = |r_\rho|, \quad b_\rho = |r_\rho|\Big(C_{\rho\rho}^\nu - \frac{s_\nu}{S}\Big).$$

Поэтому на основании соотношений (9) и (10) можно утверждать, что для произвольного состояния

$$S_\mu - \bar{S} \leqslant 2x,$$

если только

$$\begin{gathered} M_{\rho\sigma} \equiv \sum_\nu \frac{S}{s_\nu} |C_{\rho\sigma}^\nu|^2 \leqslant x \ll 1, \qquad (\rho \neq \sigma), \\ M_{\rho\rho} \equiv \sum_\nu \frac{S}{s_\nu} \Big(C_{\rho\rho} - \frac{s_\nu}{S}\Big)^2 \leqslant x \ll 1 \end{gathered} \tag{12}$$

при всех ρ, σ и a. Итак, всех наблюдателей, для которых величина x мала, можно назвать *термодинамическими наблюдателями*. В этом случае временно́е среднее макроскопической величины практически равно эргодическому среднему и, кроме того, макроскопические величины имеют лишь незначительный разброс [8]. Однако в любой фиксированный момент времени значения x_ν еще можно задавать произвольно, т. е. в любой фиксированный момент времени макросостояние может сколь угодно отличаться от термодинамического равновесия. Сформулированные выше условия ничего не говорят о преобразовании $U_{\tau\sigma}$, характеризующем наблюдателя. Отсюда, в частности, следует, что стационарное в смысле квантовой теории состояние представляется термодинамическому наблюдателю микроканоническим распределением и, следовательно, является стационарным и в термодинамическом смысле.

Неравенства (12) необходимы и достаточны для того, чтобы выполнялась H-теорема. Следует еще показать, что они выполняются практически для всех макроскопических наблюдателей; однако для этого выбранная нами (и Нейманом) характеристика макроскопического наблюдателя была бы нецелесообразной. Как будет показано в приложении, вероятность найти наблюдателя, для которого отклонение временно́го среднего значения энтропии от эргодического больше $2a$, при условии, что $a > 2N/S$, меньше

$$A \exp\Big(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{S}{N}a} + 2\ln S\Big), \qquad A = 2 + \frac{9}{Ne^2}. \tag{13}$$

Условие $a > 2N/S$ означает, что a должно быть больше среднего отклонения от канонического значения. Вместо N/S следует подставить те значения, которые это отношение принимает для различных энергетических оболочек. Эта вероятность, очевидно, исчезающе мала при сколько-нибудь

[8] *J. v. Neumann.* Z. Phys., 1929, 57, 50.

значительных a, если только $\sqrt{S/N} \gg 2\ln S$, т. е. если число состояний, приходящихся на фазовую ячейку, в среднем очень велико. Найденный нами результат находится в полном соответствии с физическими ожиданиями. В частности, не вызывает удивления тот факт, что существуют нетермодинамические макронаблюдатели, поскольку они являются совершенно специальными. Таковы, например, макронаблюдатели, для которых наряду с макроэнергией существуют еще и другие постоянные по времени макроскопические величины.

Приложение.
Вероятность найти нетермодинамического макронаблюдателя

1. Средние значения. Распределение вероятности для $M_{\rho\sigma}$. Чтобы получить некоторое представление о возможном значении среднего по времени отклонения энтропии от термодинамического значения, рассмотрим средние значения величин

$$M_{\rho\sigma} = \sum_{\nu} \frac{1}{g_\nu} |C^\nu_{\rho\sigma}|^2, (\rho \neq \sigma); \qquad M_{\rho\rho} = \sum_{\nu} \frac{1}{g_\nu} (C^\nu_{\rho\rho} - g_\nu)^2; \qquad g_\nu = \frac{s_\nu}{S},$$

взятые по всем наблюдателям. Они могут служить мерой отклонения, которое найдет нормальный наблюдатель. Эти средние значения были вычислены еще Нейманом и оказались равными:

$$\overline{\sum_{\nu} \frac{1}{g_\nu} |C^\nu_{\rho\sigma}|^2} = \frac{N-1}{S - \frac{1}{S}}, \qquad \overline{\sum_{\nu} \frac{1}{g_\nu} (C^\nu_{\rho\rho} - g_\nu)^2} = \frac{N-1}{S+1}. \tag{14}$$

По порядку величины эти средние значения равны N/S, т. е. обратно пропорциональны среднему числу состояний в фазовой ячейке. Если бы имелась только одна величина, то из малости среднего значения можно было бы сразу же заключить, что эта величина принимает ненулевые значения с нулевой вероятностью. Однако нам требуется, чтобы средние значения (14) были малы при всех ρ и σ. Следовательно, нам придется иметь дело с величинами типа S^2, и поэтому необходимо рассмотреть распределение вероятности для этих величин. Рассмотрим сначала

$$M_{\rho\sigma} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{g_\nu} |C^\nu_{\rho\sigma}|^2.$$

Оценку для функции вероятности можно получить, взяв средние значения степеней этих величин. Для $C^\nu_{\rho\sigma}$ справедливо соотношение

$$C^\nu_{\rho\sigma} = \sum_{\tau=1}^{s_\nu} U^*_{\tau\rho} U_{\tau\sigma};$$

$U_{\tau\rho}$ можно рассматривать как компоненты унитарных единичных векторов U_ρ в комплексном S-мерном пространстве, а $C^\nu_{\rho\sigma}$, согласно (11),— как

скалярное произведение проекций U_ρ и U_σ на подпространство размерности s^ν. Усреднение производится по всем возможным унитарным системам координат в S-мерном пространстве. Ясно, что для нашей задачи унитарность пространства несущественна: задачу можно с равным успехом рассматривать и в вещественном пространстве с ортогональными координатами. Итак, возьмем в $2S$-мерном ортогональном пространстве два взаимно ортогональных вещественных единичных вектора x, y и вычислим среднее значение величины

$$\left(\sum_{K=1}^{s_\nu} x_K y_K\right)^{2n}.$$

Пусть $\sum_{K=1}^{s_\nu} x_K^2 = r_\nu^2$ — длина проекции x на подпространство (ν). Чтобы произвести усреднение, выберем сначала подходящую систему координат в (S — 1)-мерном пространстве, ортогональном x, и усредним по нему при фиксированном r_ν. В такой специально подобранной системе координат

$$\left(\sum_{K=1}^{s_\nu} x_K y_K\right)^{2n} = r_\nu^{2n} (1 - r_\nu^2)^n z^{2n}.$$

При этом z — компонента единичного вектора, ортогонального x в (S — 1)-мерном пространстве. Усредним сначала z^{2n}:

$$\overline{z^{2n}} = \frac{1}{(S-1)S(S+1)\ldots(S+n-2)}\,^{9,10}.$$

Так как $(1 - r^2)^n \leqslant 1$, то

$$\left(\sum x_K y_K\right)^{2n} \leqslant r_\nu^{2n} z^{2n}.$$

---

[9] *J. v. Neumann*. Z. Phys., 1929, 57, 63.

[10] *Прим. ред. амер. издания*: позже авторами было добавлено следующее примечание:

$$\overline{z^{2n}} = \frac{n!}{(S-1)S\ldots(S+n-2)},$$

$$r_\nu^{2n} = \frac{s_\nu(s_\nu+1)\ldots(s_\nu+n-1)}{S(S+1)\ldots(S+n-1)}.$$

Отсюда

$$M_{\rho\sigma}^n \leqslant N^{n-1} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{S^n}{s_\nu^n} \frac{n!\, s_\nu(s_\nu+1)\ldots(s_\nu+n-1)}{(S-1)S\ldots(S+n-2)\,S(S+1)\ldots(S+n-1)}. \quad (16')$$

Так как

$$\left(1+\frac{1}{s_\nu}\right)\ldots\left(1+\frac{n-1}{s_\nu}\right) \leqslant n!,$$

то

$$M_{\rho\sigma}^n = \left(\frac{N}{S-1}\right)^n (n!)^2. \quad (17')$$

Этот результат даже несколько сильнее, чем (17).

Далее[9],

$$\overline{r_\nu^{2n}} = \frac{s_\nu(s_\nu+1)\ldots(s_\nu+2n-1)}{S(S+1)\ldots(S+2n-1)},$$

откуда

$$\overline{\left(\sum_K x_K y_N\right)^{2n}} \leqslant \frac{s_\nu(s_\nu+1)\ldots(s_\nu+2n-1)}{S(S+1)\ldots(S+2n-1)(S-1)S\ldots(S+n-2)}. \quad (15)$$

С помощью этого среднего значения можно оценить среднее значение величины

$$M_{\rho\sigma}^n = \left(\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{g_\nu}|C_{\rho\sigma}^\nu|^2\right)^n.$$

Для этого воспользуемся тем, что при $a_k > 0$

$$\left(\sum_{K=1}^N a_K\right)^n \leqslant N^{n-1}\sum a_K^n$$

(для двух слагаемых это очевидно, для произвольного N доказывается по индукции). Таким образом,

$$\overline{M_{\rho\sigma}^n} \leqslant N^{n-1}\sum_\nu \frac{1}{g_\nu}\overline{|C_{\rho\sigma}^\nu|^{2n}}.$$

Среднее значение $\overline{|C_{\rho\sigma}^\nu|^2}$ эквивалентно среднему значению (15) величины $\left(\sum_{K=1}^{2s_\nu} x_K y_K\right)^2$, где x, y — вещественные взаимно ортогональные векторы в $2S$-мерном пространстве. Поскольку это среднее зависит по существу от s_ν/S, можно записать неравенство

$$\overline{\left(\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{g_\nu}|C_{\rho\sigma}^\nu|^2\right)^n} =$$

$$= \overline{M_{\rho\sigma}^n} \leqslant N^{n-1}\sum_{\nu=1}^N \frac{S^n}{s_\nu^n}\frac{s_\nu(s_\nu+1)\ldots(s_\nu+2n-1)}{S(S+1)\ldots(S+2n-1)(S-1)\ldots(S+n-2)}, \quad (16)^{10}$$

$$\overline{M_{\rho\sigma}^n} < \frac{N^{n-1}}{(S-1)^n S^n}\sum_{\nu=1}^N \frac{(s_\nu+2n)^{2n}}{s_\nu^n} = \frac{N^{n-1}}{(S-1)^n S^n}\sum_{\nu=1}^N s_\nu^n\left(1-\frac{2n}{s_\nu}\right)^{2n}. \quad (16a)$$

Так как

$$b_\nu \geqslant 1; \quad \sum_\nu \frac{s_\nu}{S} = 1, \quad \sum_\nu\left(\frac{s_\nu}{S}\right)^n \leqslant 1 \quad \text{при} \quad n \geqslant 1,$$

то

$$\overline{\left(\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{g_\nu}|C_{\rho\sigma}^\nu|^2\right)^n} \equiv \overline{M_{\rho\sigma}^n} \leqslant \frac{N^{n-1}}{(S-1)^n}(1+2n)^{2n}. \quad (17)$$

Воспользуемся теперь следующим соотношением.

Если $f(x)$ — монотонно возрастающая нигде не отрицательная функция, то

$$\int_0^\infty f(x)\,W(x)\,dx = \bar{f} > \int_\xi^\infty f(x)\,W(x)\,dx > f(\xi)\int_\xi^\infty W(x)\,dx.$$

Отсюда вероятность W того, что $x > \xi$, удовлетворяет неравенству

$$\int_\xi^\infty W(x)\,dx < \frac{\bar{f}}{f(\xi)}\,.$$

Применим его к $M_{\rho\sigma}$ с

$$f(x) = e^{\alpha\sqrt{x}}$$

и одновременно воспользуемся неравенством (17):

$$\overline{e^{\alpha\sqrt{M_{\rho\sigma}}}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\,\alpha^n\overline{M_{\rho\sigma}^{n/2}} < 2\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2n!}\,\alpha^{2n}\overline{M_{\rho\sigma}^n} <$$

$$< 2 + \frac{2}{N}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n!}\,\alpha^{2n}\left(\frac{N}{S-1}\right)^n(1+2n)^{2n}. \qquad (18)$$

Выберем для α такое значение, чтобы ряд сходился. Первый член этого ряда равен $\frac{N}{S}\frac{1}{2}\alpha^2\frac{N}{S-1}q$. Отношение двух последовательных членов равно

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\alpha^2 N}{S-1}\,\frac{(2n+3)^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)^{2n+1}} < \frac{\alpha^2 N}{S-1}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{2n+2} < \frac{\alpha^2 N}{S-1}\,e^2.$$

Следовательно, должно выполняться неравенство $\frac{\alpha^2 N}{S-1}e^2 < 1$, и $\overline{e^{\alpha\sqrt{x}}}$ заведомо конечно.

Положим поэтому

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\,e}\sqrt{\frac{S-1}{N}}\,.$$

Тогда

$$\exp\overline{(\alpha\sqrt{M_{\rho\sigma}})} < 2 + \frac{9}{Ne^2}\,,$$

$$\int_x^\infty W(\xi)\,d\xi \leqslant \left(2+\frac{9}{Ne^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{e\sqrt{2}}\sqrt{\frac{S-1}{N}\,x}\right). \qquad (19)$$

Такова оценка для вероятности того, что

$$M_{\rho\sigma} > x.$$

Чтобы оценить вероятность того, что

$$\frac{1}{u}\sum_{\rho\neq\sigma}|r_\rho r_\sigma|^2 M_{\rho\sigma} > ux,$$

воспользуемся следующей теоремой, к которой мы будем обращаться и далее.

Пусть задано N положительных величин $x_1, \ldots, x_N$, а вероятность того, что $x_K > a$, равна $F_K(a)$. Тогда вероятность того, что сумма

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N > a$$

меньше

$$W(a) = F_1(ap_1) + \ldots + F_N(ap_N), \tag{20}$$

где p_K — произвольные положительные веса:

$$\sum_{K=1}^{N} p_K = 1.$$

При $N = 2$ эта теорема непосредственно проверяется, а при произвольном N легко доказывается по индукции. Справедливо и утверждение о том, что вероятность неравенства

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_Nx_N > a$$

меньше, чем

$$W'(a) = F_1(a) + F_2(a) + \ldots + F_N(a), \tag{20a}$$

где $F_K(a)$ снова означает вероятность того, что $x_K > a$ и $\sum_K p_K = 1$. В нашем случае p_K можно отождествить с величинами $\frac{1}{u^2}|r_\rho r_\sigma|^2$, сумма которых даже меньше 1 ($\rho \neq \sigma$). Поэтому вероятность того, что

$$\frac{1}{u}\sum_{\rho,\sigma}|r_\sigma r_\rho|^2 M_{\rho\sigma} > u\cdot x,$$

поскольку мы имеем дело с величинами S^2, меньше

$$\left(2 + \frac{9}{Ne^2}\right)\exp\left(2\ln S - \frac{1}{e\sqrt{2}}\sqrt{\frac{S-1}{N}}\,x\right). \tag{21}$$

2. *Распределение вероятности для* $M_{\rho\rho}$. Рассмотрим теперь распределение $M_{\rho\rho}$. Как показал еще Нейман, вероятность того, что $C_{\rho\rho}$ заключено между u и $u + du$, равна

$$W(u)\,du = (S-1)\binom{S-2}{s_\nu - 1}u^{s_\nu - 1}(1-u)^{S-s_\nu-1}du, \tag{22}$$

$$0 \leqslant u \leqslant 1.$$

Эта функция достигает максимума при

$$u_0 = \frac{m}{M} = \frac{s_\nu - 1}{S-2}; \qquad m = s_\nu - 1, \quad M = S - 2.$$

Исследуем сначала вероятность того, что

$$\frac{1}{g_\nu}(C^\nu_{\rho\rho} - g_\nu)^2 > a,$$

а затем, чтобы получить какие-либо утверждения относительно $M_{\rho\rho}$, воспользуемся теоремой (20). Неравенство дает два альтернативных условия:

$$1)\ C^\nu_{\rho\rho} > \sqrt{ag} + g \quad \text{при} \quad \sqrt{ag} + g < 1;$$

$$2)\ C^\nu_{\rho\rho} < g - \sqrt{ag} \quad \text{при} \quad a < g.$$

Поэтому нам потребуется оценить оба интеграла:

$$\int\limits_{g+\sqrt{ag}}^{1} W(u)\,du \quad \text{и} \quad \int\limits_{0}^{g-\sqrt{ag}} W(u)\,du.$$

Справедливо неравенство

$$|u_0 - g| = \left|\frac{S - 2s_\nu}{S(S-2)}\right| \leqslant \frac{1}{S}.$$

Следовательно, если $a > 1/S$, то максимум подынтегрального выражения $W(u_0)$ не принадлежит ни одному из путей интегрирования, подынтегральные выражения монотонны, и, поскольку длина каждого пути <1, интеграл можно мажорировать значением подынтегрального выражения на нижнем и соответственно верхнем пределах интегрирования.

Оценим сначала $W(u_0)$ — максимум подынтегрального выражения

$$W(u_0) = (M+1)\binom{M}{m}\left(\frac{m}{M}\right)^m\left(\frac{M-m}{M}\right)^{M-m} = f(m).$$

Поскольку $f(m) = f(M-m)$, достаточно рассмотреть лишь случай $2m < M$. Покажем, что $f(0) = M + 1 \geqslant f(m)$. Отсюда будет следовать, что $f(m)$ от $m = 0$ до $m = M/2$ монотонно убывает. Имеем:

$$\frac{f(m)}{f(m+1)} = \left(\frac{m}{m+1}\right)^m\left(\frac{M-m}{M-m-1}\right)^{M-m-1},$$

$$\ln\frac{f(m)}{f(m+1)} = m(\ln m - \ln(m+1)) + (M-m-1)(\ln(M-m) - \ln(M-m-1)).$$

Пусть

$$L(x, y) = x(\ln x - \ln y) - x + y,$$

тогда

$$\ln\frac{f(m)}{f(m+1)} = L(m, m+1) - L(M-m-1, M-m).$$

Требуется показать, что

$$L(x, x+1) > L(y, y+1)$$

при

$$0 < x < y.$$

Искомое неравенство следует из того, что производная

$$\frac{\partial L(x, x+1)}{\partial x} = 1 - \frac{x}{x+1} + \ln \frac{x}{x+1}$$

всюду отрицательна, как нетрудно видеть, поскольку при $\frac{1}{x+1} = z > 0$

$$\frac{\partial L(x, x+1)}{\partial x} = z + \ln(1-z) = -\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots$$

Тем самым доказано, что $f(m+1) < f(m)$ при $2m < M$. Если же $2m > M$, то m и $M - m$ в силу симметрии $W(u_0)$ следует поменять местами; максимум $W(u_0)$ будет достигаться при $m = M$: $W(M) = W(0) = M + 1$. Итак, всегда справедливо неравенство

$$W(u_0) \leqslant M + 1 = S - 1. \tag{23}$$

Оценим теперь

$$\frac{W(u)}{W(u_0)} = \left(\frac{u}{u_0}\right)^m \left(\frac{1-u}{1-u_0}\right)^{M-m} \quad \text{при} \quad u_0 = \frac{m}{M}$$

в предположении, что

$$z = u - u_0 > x_0 = \sqrt{\frac{u_0(1-u_0)}{M}}. \tag{24}$$

Покажем прежде всего, что

$$\ln \frac{W(u)}{W(u_0)} = m \ln\left(1 + \frac{x}{u_0}\right) + (M-m) \ln\left(1 - \frac{x}{1-u_0}\right) < \frac{x}{x_0} \varphi(m),$$

где $\varphi(m)$ — пока еще неизвестная функция, не зависящая от x.

Справедливы неравенства

$$\begin{gathered} \ln\left(1 + \frac{x}{u_0}\right) < \frac{x}{x_0} \ln\left(1 + \frac{x_0}{u_0}\right), \\ \ln\left(1 - \frac{x}{1-u_0}\right) < \frac{x}{x_0} \ln\left(1 - \frac{x_0}{1-u_0}\right), \end{gathered} \tag{25}$$

поскольку как $\frac{\ln(1+x)}{x}$, так и $\frac{\ln(1-x)}{x}$ при $1 > x > 0$ монотонно убывают. Пусть снова $2m < M$ (в противном случае m и $M - m$ следовало бы поменять местами). Тогда в качестве φ, согласно (25), можно выбрать функцию

$$\varphi(m) = m \ln\left(1 + \sqrt{\frac{M-m}{Mm}}\right) + (M-m) \ln\left(1 - \sqrt{\frac{m}{M(M-m)}}\right).$$

Случай $m=0$ мы хотим рассмотреть особо, поскольку при $m=0$ и φ, и x_0 обращаются в нуль, что неудобно для обсуждения. Функция $\varphi(m)$ достигает максимума при $m=1$, а затем монотонно убывает. Чтобы показать это, выпишем ее производную:

$$m \geqslant 1, \quad \xi = \sqrt{\frac{m}{M-1}}, \quad \frac{1}{M} < \xi < \sqrt{M},$$

$$-\frac{1+\xi^2}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{M}\xi+1} + \frac{1}{\sqrt{M}-\xi} - \frac{2\xi}{\xi^2-1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{M}\xi}\right) - \ln\left(1-\frac{\xi}{\sqrt{M}}\right)\right]. \tag{26}$$

Требуется доказать, что правая часть равенства (26) положительна. Для этого введем обозначение

$$z = \frac{1+\dfrac{1}{\xi\sqrt{M}}}{1-\dfrac{\xi}{\sqrt{M}}}, \quad 1 < z < M$$

и после несложных преобразований получим из правой части

$$z - \frac{1}{z} - 2\ln z > 0.$$

Это выражение положительно, так как при $z=1$ оно обращается в нуль, а его производная $\left(1-\frac{1}{z}\right)^2 > 0$.

Оценим $\varphi(1)$:

$$\varphi(1) \sim \ln 2 + (M+1)\ln\left(1-\frac{1}{M}\right) < \ln 2 - 1 = -\varkappa.$$

Поэтому вероятность того, что $u > u_0$, безусловно, меньше, чем

$$\exp\left[-\varkappa\sqrt{\frac{M}{u_0(1-u_0)}}\,x + \ln(M+1)\right], \tag{27}$$

где $m \geqslant 1$, $u - u_0 = x > x_0$, $\varkappa = 1 - \ln 2 \sim 0{,}3$.

Вероятность того, что $u < u_0$, имеет ту же мажоранту, если положить x равным $u_0 - u$.

Найденная оценка дает вероятность того, что

$$u - u_0 > x > x_0$$

и соответственно

$$u_0 - u > x > x_0.$$

Зная это, можно оценить вероятность того, что $\frac{1}{g}(u-g)^2 > a$. Так как $u_0 = \frac{m}{M}$, $g = \frac{m+1}{M+2}$, то $|g-u_0| \leqslant \frac{1}{S}$. Поэтому если $u - g > \sqrt{ag}$, то, во всяком

случае,

$$u - u_0 > \sqrt{ag} - \frac{1}{S}.$$

При этом должно выполняться неравенство $\sqrt{ga} - \frac{1}{S} > x_0$. Так как $x_0 = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{(M-m)m}{M}}$, то $a > \frac{2}{S-2}$ [11].

В случае $u < u_0$ мы рассуждаем аналогично. Если в нашу мажоранту подставить $x = \sqrt{ag} - \frac{1}{S}$, то получим

$$W(a) < \exp\left(-\varkappa\sqrt{\frac{M}{u_0(1-u_0)}}\left\{\sqrt{\frac{s_\nu a}{S}} - \frac{1}{S}\right\} + \ln(S-1)\right) < \\ < \exp(-\varkappa'\sqrt{aS} + \varkappa + \ln S). \qquad (28)$$

При этом предполагается, что $a > \frac{2}{S-2}$.

Теперь мы уже можем закончить рассмотрение случая $m = 0$.

Если $u > u_0$, то

$$\int_a^1 W(u)\,du = (1-a)^{S-1} < e^{-(S-1)a}.$$

Случай $a < 1/S$ здесь встретиться не может, поскольку $u_0 \sim 1/S$. Поэтому наша мажоранта справедлива и при $m = 0$, $s_\nu = 1$.

Таким образом, мы уже имеем оценку для распределения величины $\frac{1}{g_\nu}(C^\nu_{\rho\rho} - g_\nu)^2$. Отсюда с помощью сформулированной выше теоремы (20) получим оценку для суммы по ν. Вес p_k выберем равным $1/N$. Тогда вероятность того, что $\sum\limits_\nu \frac{1}{g_\nu}(C^\nu_{\rho\rho} - g_\nu)^2$ больше a, окажется меньше, чем

$$\exp\left(-\varkappa\sqrt{\frac{S}{N}}\,a + \varkappa + \ln S\right), \text{ если только } a > \frac{2N}{S-2}. \qquad (29)$$

Поэтому вероятность того, что

$$\sum_{\rho=1}^{S} |r_\rho|^2\left(C^\nu_{\rho\rho} - \frac{s_\nu}{S}\right)^2 < u\cdot a,$$

окажется меньше $\exp\left(-\varkappa\sqrt{\frac{S}{N}}\,a + \varkappa + 2\ln S\right)$, поскольку число слагаемых равно S и $\sum |r_\rho|^2 = u$.

[11] Здесь величинами порядка $1/S^2$ мы пренебрегаем.

Найденная здесь оценка несколько лучше оценки (21), полученной для $M_{\rho\sigma}$. Во всяком случае вероятность найти наблюдателя, для которого отклонение энтропии от канонического значения $> 2a$, меньше, чем

$$A \exp\left(-b\sqrt{\frac{S}{N}}\,a + 2\ln S\right), \tag{13}$$

$$a > \frac{2N}{S-2}, \qquad A = \left(2 + \frac{9}{Ne^2}\right), \qquad b = \frac{1}{e\sqrt{2}}.$$

Для S/N следует взять минимум по всем энергетическим оболочкам, т. е. потребовать, чтобы S/N — среднее число состояний в одной фазовой ячейке — было очень велико по сравнению с $(2\ln S)^2$, что представляется физически разумным. Столь сильные условия, какие приведены у Неймана [12], не являются необходимыми.

Поступила 16 июня 1937 г.

Цюрих,
Физический институт Высшей технической школы

[12] *J. v. Neumann.* Z. Phys., 1929, **57**, 56.

1938

К ТЕОРИИ ИСПУСКАНИЯ ДЛИННОВОЛНОВЫХ КВАНТОВ СВЕТА *

(Совместно с М. Фирцем)

Резюме. Как известно, обычная теория излучения дает для сечения взаимодействия dq при прохождении заряженной частицы в силовом поле и отклонении в заданный интервал углов бесконечно большое значение («инфракрасная катастрофа»). Действительно, рассматривая потери энергии частицы в интервале между E и $E + dE$ согласно этой теории, мы получаем для малых E выражение $dq = \mathrm{const}\cdot dE/E$, которое при интегрировании расходится логарифмически вблизи $E = 0$. В настоящей работе проводится более точное исследование значения этого сечения взаимодействия в соответствии с квантовой электродинамикой, когда заряженной частице приписываются конечные размеры. Оказывается, что тогда бесконечность всегда устраняется и что отклонения, которые в обычной теории считаются происходящими без излучения, здесь сопровождаются конечными, хотя и очень малыми, потерями энергии. Однако, с другой стороны, согласно точной теории, детальный ход dq при очень малых потерях энергии E зависит от протяженности заряженного тела настолько существенно, что непосредственное применение результата к реальным электронам оказывается невозможным. Поэтому мы приходим к выводу, что рассматриваемая здесь проблема существенно связана с еще неразрешенными фундаментальными трудностями квантовой электродинамики.

§ 1. Введение

Наряду с известными трудностями, относящимися к проблеме собственной энергии заряженной частицы, квантовая электродинамика приводит также к расходимости, связанной с испусканием квантов света с очень малой энергией. Действительно, согласно этой теории, вероятность обнаружить отклонение заряженной частицы в заданном направлении после прохождения через силовое поле, когда потери энергии этой частицы находятся в интервале $(E, E + dE)$, для малых E оказывается пропорциональной dE/E. Поэтому интеграл от этой вероятности по конечному интервалу энергий (E, E') при $E = 0$ расходится логарифмически.

В настоящей работе исследуется вопрос о том, обусловлен ли этот результат только недопустимыми математическими приближениями или же трудность имеет более глубокую физическую природу. Для решения этого вопроса мы применили квантовую электродинамику к твердому пространственно-протяженному телу. Как известно, в случае конечного размера тела a — что эквивалентно введению (с точностью до числового множителя порядка 1) «обрыва частоты» на $\omega_1 = 2\pi \frac{c}{a}$ — квантовая электро-

---

* *Zur Theorie der Emission langwelliger Lichtquanten.* (Mit M. Fierz.).— Nuovo cimento, 1938, 15, 1—2.

динамика дает конечный результат. Относительно величины e^2/hc, где e — заряд тела, при этом не требуется делать никаких предположений. Однако, чтобы не усложнять проблемы появлением электромагнитной массы $\mu \sim \frac{e^2}{ac^2} \sim \frac{e^2\omega_1}{c^3}$ и в то же время однозначно определить массу тела, мы введем предположение, что μ много меньше механической массы тела m или

$$\frac{e^2\omega_1}{mc^2} \ll 1. \tag{I}$$

Так как мы должны вообще ввести конечные размеры заряженного тела, а окончательный результат, как мы увидим, зависит от них, мы считали правильным (уже по одной только причине лоренцова сокращения) заранее ограничить начальную скорость тела v_0 условием малости по сравнению со скоростью света

$$\frac{v_0}{c} \ll 1. \tag{II}$$

Поэтому мы всегда будем проводить вычисления с помощью нерелятивистской волновой механики. Целесообразно еще ввести предположение

$$\frac{h\omega_1}{mc^2} \ll 1, \tag{III}$$

для малых e^2/hc более сильное, чем (I). Это приводит к следствию, что для всех собственных колебаний полости с излучением, взаимодействующих с телом, комптоновское смещение относительно мало́, и потому можно пренебречь запаздыванием, т. е. импульсом излучения (для любых значений e^2/hc) по сравнению с изменением импульса частицы. Благодаря этому излучение можно считать дипольным, т. е. заменять в операторе Гамильтона значение векторного потенциала в точке, где находится частица, значением этого потенциала в некоторой фиксированной точке.

Строгое решение упрощенной таким образом проблемы в отсутствие внешних полей, а также приближенное решение в случае слабых внешних полей уже было получено Блохом и Нордсиком [1], добившихся на этом пути большого успеха. По сравнению с этим § 2 нашей работы ничего нового не содержит и приводится здесь только для связности изложения с тем, чтобы отчетливо сопоставить несколько более общие предположения названных авторов [2] с нашим предположением о конечных размерах заряженных тел и упрощениями, связанными с предположением (II).

Существенным является результат, что в рассматриваемом здесь приближении, основанном на предположениях (I)—(III), поле излучения и при наличии заряженных частиц можно характеризовать «свободными» световыми квантами, число которых в отсутствие внешних сил остается постоянным во времени. Если же тело проходит через внешнее силовое

[1] *F. Bloch, A. Nordsieck.* Phys. Rev., 1937, 52, 54; в дальнейшем цитируется как «А». *A. Nordsieck.* Phys. Rev., 1937, 52, 59; далее цитируется как «В».

[2] Ср. прим. 6.

поле, то частица не может отклониться без излучения, и отклонение всегда сопровождается испусканием бесконечно большого числа свободных световых квантов. Почти все они являются крайне низкочастотными, так что полная испущенная энергия излучения остается конечной.

К сожалению, нам не удалось решить поставленную в § 2 общую математическую проблему в случае произвольных силовых полей; особенно желательным было бы более подробное изучение предельного перехода к классической механике и электродинамике. В этой же работе мы довольствуемся рассмотрением частного случая слабых силовых полей, когда можно ограничиться первым приближением теории возмущений (борновским приближением). В противоположность Блоху и Нордсику мы считаем существенным, чтобы при обсуждении теоретических результатов закон сохранения энергии учитывался *точно*. Подробное обсуждение результатов квантовой электродинамики для сечения взаимодействия частицы dq при отклонении в заданном элементе телесного угла $d\Omega$ и при заданных потерях энергии частицы, а также испускаемого при этом спектра проводится в § 3 и 4 настоящей работы.

Здесь мы приведем только частный результат для случая

$$\frac{e^2}{hc}\frac{v_0^2}{c^2} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{m}{2} v_0^2 \ll h\omega_1,$$

имеющий значение для решения поставленного в начале статьи принципиального вопроса. Если $\mathbf{v}_0$ — начальная, а $\mathbf{v}_0'$ — конечная скорость частицы, то, вводя сокращенное обозначение

$$C = \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{hc}\frac{(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0')^2}{c^2},$$

мы получаем для упомянутого сечения

$$dq = \text{const} \cdot \frac{dE}{E}\left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C,$$

причем постоянный множитель для заданного угла отклонения оказывается таким же, как и в существующей теории излучения. Из этого выражения для dq теперь следует, что оно уже интегрируется при $E = 0$; при этом для полной вероятности найти частицу с потерями энергии в конечном интервале $(0, E)$, отклоненную в заданном направлении, получается значение, очень близкое к значению старой теории для безызлучательных переходов, пока потеря E мала по сравнению с начальной энергией частицы $E_0 = \frac{m}{2} v_0^2$, но велика по сравнению с критической энергией

$$\varepsilon = h\omega_1 \exp\left(-\frac{1}{C}\right).$$

Но если потери энергии частицы того же порядка величины, что и ε (по предположению малая), то сечение существенно зависит от ω_1, т. е. от величины заряженного тела, хотя длины световых волн и очень велики

по сравнению с размерами тела. При современном состоянии квантовой теории невозможно установить с уверенностью, в какой мере соответствует действительности этот результат квантовой электродинамики для протяженных тел, так как он выходит за рамки соображений, основанных на обычном принципе соответствия. Во всяком случае улучшение обычной (основанной на принципе соответствия) теории излучения для точечных зарядов или действительно существующих электронов для рассматриваемой здесь проблемы невозможно без преодоления фундаментальных трудностей квантовой электродинамики, связанных с собственной энергией.

§ 2. Преобразованная проблема излучения

Функция Гамильтона нерелятивистской теории сначала имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\,\mathbf{A}\right)^2 + V(x) + \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{E}_{\text{тр}}^2 + \mathbf{H}^2)\,dv. \qquad (1)$$

Здесь $E_{\text{тр}}$ — поперечная часть напряженности электрического поля, $V(x)$ — потенциал внешнего силового поля, e — заряд и m —механическая масса заряженного тела. Если это тело обладает конечной протяженностью, то в качестве **A** следует брат среднее по заданному распределению заряда в теле значение потенциала

$$\mathbf{A} = \int \mathbf{A}\,(\mathbf{x} + \xi)\,D\,(\xi)\,d^3\xi \qquad (2)$$

с нормировкой

$$\int D\,(\xi) d^3\xi = 1. \qquad (3)$$

Для простоты будем предполагать, что тело обладает сферической симметрией, вследствие чего D зависит только от абсолютной величины $\rho = |\,\xi\,|$ вектора ξ. Разлагая **A** в ряд по собственным колебаниям в конечной полости объемом V с циклическими краевыми условиями, мы можем положить [3]:

$$\frac{e}{mc}\,\mathbf{A} = \sum_s h\omega_s \mathbf{a}_s\,[P_s \cos(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + Q_s \sin(\mathbf{k}, \mathbf{x})], \qquad (4а)$$

$$\frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{E}_{\text{тр}}^2 + \mathbf{H}^2)\,dV = \frac{1}{2}\sum_s (P_s^2 + Q_s^2)\,h\omega_s. \qquad (4б)$$

При этом [4]

$$\mathbf{a}_s = \frac{2e}{m}\,\frac{1}{h\omega_s}\left(\frac{\pi h}{\omega_s V}\right)^{1/2} \varepsilon_s g\,(\mathbf{k}_s). \qquad (5)$$

Здесь ε_s — перпендикулярный $\mathbf{k}_s$ единичный вектор поляризации, тогда как P_s и Q_s — операторы, коммутирующие с **x** и **p** и удовлетворяющие

---

[3] Мы применяем всегда обозначение h для постоянной Планка, деленной на 2π, и ω — для круговой частоты.

[4] Величины, обозначаемые здесь символом $\mathbf{a}_s$, отличаются от аналогичных величин работы Блоха и Нордсика множителем $1/mh\omega_s$.

перестановочным соотношениям:

$$[P_s, Q_{s'}] = -i\delta_{ss'}, \quad [P_s, P_{s'}] = [Q_s, Q_{s'}] = 0.$$

Величина $g(\mathbf{k}_s)$ в формуле (5) представляет собой обусловленный конечностью тела «обрывающий множитель», связанный с ранее введенной функцией $D(\xi)$ равенствами:

$$g(\mathbf{k}_s) = \int D(\xi)\, e^{i\mathbf{k}_s\xi} d^3\xi, \qquad D(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int g(\mathbf{k}_s)\, e^{-i\mathbf{k}_s\xi} d^3k_s. \tag{6}$$

В соответствии с нашим предположением о сферической симметрии тела он зависит только от абсолютной величины $|k_s| = \frac{\omega_s}{c}$. Условие нормировки (3) дает непосредственно

$$g(0) = 1, \tag{3a}$$

тогда как величина

$$\int_0^\infty G(\omega)\, d\omega = \int_0^\infty |g(\omega)|^2\, d\omega = \omega_1 \tag{7}$$

кратко будет именоваться «частотой обрыва». Размерам тела пропорциональна величина c/ω_1, так что точечному телу соответствует $\omega_1 = \infty$. Функции $g(\omega)$, особенно удобные для вычислений, определяются формулами:

$$g(\omega) = 1 \quad \text{для} \quad 0 < \omega < \omega_1, \qquad g(\omega) = 0 \ \text{для} \ \omega > \omega_1$$

и

$$|g(\omega)|^2 \equiv G(\omega) = e^{-\omega/\omega_1}. \tag{8}$$

В соответствии с нашими предположениями (I) и (III) мы можем теперь, во-первых, пренебречь в операторе Гамильтона членом, пропорциональным A^2, и, во-вторых, заменить в аргументе векторного потенциала центр тела x на фиксированный центр силового поля $V(x)$, в который мы поместим также начало координат. Другими словами, мы положим в формулах (4) $(\mathbf{kx}) = 0$ и получим упрощенный оператор Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2m} - \sum_s h\omega_s(\mathbf{a}_s\mathbf{p})\, P_s + V(x) + \sum_s (P_s^2 + Q_s^2)\, h\omega_s. \tag{9}$$

Это означает, что мы считаем излучение электрическим дипольным и пренебрегаем вкладом более высоких мультиполей. Теперь мы можем решить проблему в случае отсутствия внешних сил $V(x) = 0$ с помощью простого канонического преобразования, а именно:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' - h\sum_s \mathbf{a}_s Q_s, \qquad \mathbf{p} = \mathbf{p}',$$

$$Q_s = Q_s', \qquad P_s = P_s + (\mathbf{a}_s\mathbf{p}). \tag{10}$$

Тогда выражение (9) для H приобретает вид

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}\sum_s (\mathbf{a}_s\mathbf{p})^2 h\omega_s + V\left(\mathbf{x}' - h\sum_s \mathbf{a}_s Q_s\right) + \sum_s \frac{1}{2}(P_s'^2 + Q_s^2) h\omega_s.$$

Легко видеть, что второй член соответствует электромагнитной массе. Действительно, выполняя суммирование по s в соответствии с (5) и учитывая известный факт, что число поляризованных собственных колебаний между ω_s и $\omega_s + d\omega_s$ равно

$$Z_s = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega_s^2 d\omega_s,$$

мы получаем

$$\sum_s (\mathbf{a}_s\mathbf{p})^2 h\omega_s = \mathbf{p}^2 \frac{4}{3\pi}\frac{e^2}{m^2c^3}\int_0^\infty d\omega G(\omega) = p^2 \frac{4}{3\pi}\frac{e^2\omega_1}{m^2c^3}. \tag{11}$$

Вводя электромагнитную массу [5]

$$\mu = \frac{4}{3}\frac{e^2\omega_1}{\pi e^3}, \tag{12}$$

мы имеем далее

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}\sum_s (\mathbf{a}_s\mathbf{p})^2 h\omega_s = \frac{p^2}{2m}\left(1 - \frac{\mu}{m}\right).$$

Согласно нашему предположению (I), здесь следует пренебречь вторым членом, и для окончательно преобразованной проблемы мы получаем оператор Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2m} + V\left(\mathbf{x}' - h\sum_s \mathbf{a}_s Q_s\right) + \sum_s \frac{1}{2}(P_s'^2 + Q_s^2) h\omega_s. \tag{IV}$$

В отсутствие внешних сил, когда $V(x) = 0$, мы найдем решения

$$\psi_0(x', Q_s) = e^{\frac{i}{h}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \prod_s h_{n_s}(Q_s), \tag{13}$$

где $h_n(Q)$ — ортонормированные функции, связанные с полиномами Эрмита и удовлетворяющие уравнению

$$-\frac{d^2h_n}{dQ^2} + Q^2 h_n = (2n+1) h_n.$$

Квантовые числа n_s, определяемые условием

$$\frac{1}{2}(P_s'^2 + Q_s^2) = n_s + \frac{1}{2}, \tag{14}$$

---

[5] На основании (6) и (7) для электростатической энергии распределенного заряда с eD (ξ) легко найти значение $w = e^2\omega_1/\pi c$, так что формула (12) воспроизводит хорошо известное соотношение для сферически-симметрично-распределенных зарядов

$$\mu = \frac{4}{3}\frac{w}{c^2}.$$

можно называть числами «свободных световых квантов» частоты ω_s. Они отличаются от чисел свободных квантов света, $\frac{1}{2}(P_s^2+Q_s^2)=N_s+\frac{1}{2}$, обычно применяемых в теории излучения.

Однако оператор Гамильтона показывает, что — в применяемом здесь приближении — именно числа n_s могут непосредственно регистрироваться спектрографом как числа свободных световых квантов, потому что только эти кванты распространяются свободно, отделившись пространственно от заряженного тела. В частности, при заданном импульсе частицы $\mathbf{p}$ состояние с наименьшей энергией, в котором все квантовые числа n_s равны нулю, соответствует отсутствию излучения в собственном смысле этого слова. Пространственная нормировка собственных функций (13) выбрана так, что средняя плотность частицы в больших объемах равна 1, как это целесообразно принимать при рассмотрении проблем столкновения. Легко видеть, что эти функции образуют полную ортогональную систему относительно параметров p и n_s [6].

Поэтому мы можем вообще ввести $\mathbf{p}$ и n_s в качестве аргументов волновой функции, полагая

$$\psi(x', Q)=\sum_{n_s}\int d^3p\varphi(p, n_s)\, e^{\frac{i}{h}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}\prod_s h_{n_s}(Q_s). \qquad (15)$$

Тогда волновые функции φ ($\mathbf{p}$, n_s) в стационарном состоянии с энергией E в отсутствие внешних сил (при отбрасывании нулевой энергии излучения) в соответствии с оператором (IV) будут удовлетворять уравнению Шредингера

$$E\varphi(\mathbf{p}, n_s)=\left(\frac{p^2}{2m}+h\sum_s n_s\omega_s\right)\varphi(p, n_s)+$$
$$+\sum_{n'_s}\int d^3p'(p|V|p')\prod_s(n_s, p|K|n'_s, p')\varphi(p', n'_s), \qquad (16)$$

где

$$(p|V|p')=\frac{1}{(2\pi h)^2}\int\exp\left[\frac{i}{h}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\mathbf{x}\right]V(x)\,d^3x, \qquad (17)$$

$$(n_s, p|K|n'_s, p')=\int\exp\left[i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\,\mathbf{a}_sQ_s\right]h_{n'_s}(Q)\,h_{n_s}(Q)\,dQ. \qquad (18)$$

---

[6] В «А» была предпринята попытка более строгого рассмотрения случая свободных частиц, без отождествления положения частицы с фиксированной точкой. Полученная там система функций А(17), обобщающая нашу систему (13), оказывается неортогональной, как непосредственно следует из конкретизации уравнений А(21) — (23) при $V(x)=1$. Однако существует приближенная ортогональность матричных элементов перехода между такими состояниями, для которых полный импульс излучения $|\Sigma n_sk_s|$ очень мал по сравнению с изменением импульса частицы $|p-p'|$. Поэтому в случаях, когда существенное влияние на конечный результат оказывают только матричные элементы $V(x)$ переходов между такими состояниями, более общие формулы в «А» дают достаточно хорошее приближение. Однако при наших более ограничительных предположениях (II) и прежде всего (III) нам представляется более последовательным применять предложенный здесь метод, в котором для испускания света учитывается только электрическое дипольное излучение.

Вводя сокращенное обозначение

$$w_s = \frac{1}{2}[(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\,\mathbf{a}_s]^2, \qquad (19)$$

имеем

$$(n, p\,|\,K\,|\,n', p') = e^{-w/2}\sqrt{n!\,n'!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\sqrt{w})^{n'-n+2k}}{(n-k)!\,k!\,(n'-n+k)!}. \qquad (20)$$

Если положить $\frac{1}{(n'-n+k)!} = 0$ для $n' - n + k < 0$, то это уравнение будет справедливым как для $n' \geqslant n$, так и для $n' \leqslant n$; кроме того, с помощью подстановки $k' = n' - n + k$ можно убедиться в симметрии выражения относительно n и n'. При $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ величина K отлична от нуля только при условии $n = n'$, когда она равна 1. Далее, в частности, имеем

$$(n, p'\,|\,K\,|\,0, p') = e^{-w/2}(i\sqrt{w})^n\frac{n}{\sqrt{n!}}. \qquad (20а)$$

Из формулы (18), применяя условие полноты для $h_n(Q)$ и суммируя по всем n', получаем

$$\sum_{n'_s}(n, p\,|\,K\,|\,n', p')(n', p'\,|\,K\,|\,n'', p'') = (n, p\,|\,K\,|\,n'', p'') \qquad (21)$$

и, в частности, для $p'' = p$, $n'' = n$

$$\sum_{n'}|(n, p\,|\,K\,|\,n', p')|^2 = 1. \qquad (21а)$$

Для $n' = 0$ это равенство также легко находится прямо из (20а).

Рассмотрим теперь частный случай связанной с уравнением (16) проблемы собственных значений, соответствующий падающей плоской волне, не сопровождающейся световым квантом в направлении $+x_1$, но рассеиваемой силовым полем. Таким образом, здесь следует положить

$$\psi(x', Q) = e^{\frac{i}{h}p_0x'_1}\prod_s h_0(Q_s) + \psi_1(x', Q_s), \qquad (22)$$

где $\psi_1(x', Q_s)$ для всех Q_s и больших $\mathbf{x}'$ (или $\mathbf{x}$) содержит только *расходящиеся* сферические волны (условие излучения). Соответственно разложению (22) мы получаем из (15) и (16) при $E = p_0^2/2m$

$$\varphi(\mathbf{p}, n_s) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)\prod_s\delta(n_s, 0) + \frac{f(\mathbf{p}, n_s)}{\frac{p_0^2 - p^2}{2m} - h\sum_s n_s\omega_s}, \qquad (23)$$

причем f удовлетворяет уравнению

$$f(\mathbf{p}, n_s) = (p\,|\,V\,|\,p_0)\prod_s (n_s, p\,|\,K\,|\,0, p_0) +$$

$$+\sum_{n'_s}\int d^3p'\,(p\,|\,V\,|\,p')\,\frac{\prod\limits_s (n_s, p\,|\,K\,|\,n'_s, p')\,f\,(n'_s, p')}{\dfrac{p_0^2 - p'^2}{2m} - h\sum n'_s\omega_s}. \qquad (24)$$

Условие излучения, как известно, выполняется автоматически, если в формулах (15) и (16) или (24) при интегрировании по пространству p или p' *перейти в комплексную плоскость* следующим образом: интегрирование следует производить в полярных координатах, причем интегрирование по угловым переменным выполняется нормальным образом, а при интегрировании по абсолютной величине $|\,\mathbf{p}\,| = P$ или $|\,\mathbf{p}'\,| = P'$ совершается обход лежащих на положительной части вещественной оси полюсов подынтегрального выражения в *нижней* полуплоскости комплексной переменной P или P'. По формуле (23) легко получаем таким способом[7] для больших $|\,x'\,| = r$ рассеянную волну

$$A\,\frac{e^{\frac{i}{h}p'_0 r}}{r},$$

импульс которой определяется из условия сохранения энергии [8]

$$\frac{1}{2m}\,p_0'^2 = \frac{1}{2m}\,p_0^2 - h\sum n_s\omega_s, \qquad (25)$$

а амплитуда имеет вид

$$A = 4\pi^2 hmf\,(|\,p'_0\,|\cdot\mathbf{e},\ n_s), \qquad (26)$$

причем $\mathbf{e} = \mathbf{x}/r$ означает единичный вектор рассматриваемого направления излучения. При заданных квантовых числах испущенных световых квантов n_s сечение рассеяния частицы dq в направлении $\mathbf{e}$ в элементе телесного угла $d\Omega$ определяется в соответствии с этим формулой

$$dq = d\Omega\cdot 16\pi^4 h^2 m^2\,\frac{|\,p'_0\,|}{|\,p_0\,|}\,|\,f\,(\,|\,p'_0\,|\cdot\mathbf{e},\ n_s)\,|^2. \qquad (27)$$

---

[7] См. по этому поводу также *P. A. M. Dirac*. Quantum Mechanics. 2. Aufl., § 53, в частности уравнения (37), (38). Величина f здесь отличается от соответствующей величины Дирака множителем $(2\pi h)^{-3/2}$.

[8] Для значений n_s, для которых правая часть условия (25) отрицательна, функция $\psi\,(x')$ при больших r убывает быстрее $1/r$.

§ 3. Рассеяние частиц и испускание света в слабых силовых полях

Так как общее рассмотрение проблемы, определенной уравнениями (23), (24) (и соответствующим правилом интегрирования), связано с большими математическими трудностями, мы ограничимся здесь случаем такого слабого силового поля, что его можно рассматривать как малое возмущение свободного движения [9]. В соответствии с этим мы будем сохранять в возмущенной волновой функции только члены первого порядка по $V(x)$ (борновское приближение). Однако следует заметить, что ничто не мешает продолжать этот процесс и что для первого приближения теории возмущений определенное в классической механике «время столкновения» не играет никакой роли [10]. В первом приближении теории возмущений при разложении по потенциалу из формулы (24) получается

$$f(\mathbf{p}, n_s) = (p \,|\, V \,|\, p_0) \prod_s (p, n_s \,|\, K \,|\, p_0, 0),$$

так как далее следует уже член второго порядка. Подставляя (19) и (20а) и учитывая (25), имеем

$$|f_0(\mathbf{p}_0, n_s)|^2 = (p_0' \,|\, V \,|\, p_0)^2 \prod_s \frac{1}{n_s!} w^{n_s} e^{-w_s}. \tag{28}$$

---

[9] Это согласуется с методом, предложенным в «А». В «В» была сделана попытка решить проблему — по крайней мере при ограничивающем предположении $e^2/hc \ll 1$ — для общего случая силовых полей, причем в качестве первого приближения применялась волновая функция

$$\varphi(p, n_s) = \varphi^0(p) \prod (n_s, p \,|\, K \,|\, 0, p_0),$$

где $\varphi^0(p)$ — строгое решение проблемы без излучения. Это значит, что $\varphi^0(p)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\varphi^0(p) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + \frac{f^0(\mathbf{p})}{\frac{1}{2m}(p_0^2 - p^2)}, \qquad f^0 = (p \,|\, V \,|\, p_0) + \int \frac{d^3p\,(p \,|\, V \,|\, p')\, f_0(p')}{\frac{1}{2m}(p_0^2 - p'^2)}.$$

Но так как эта волновая функция $\varphi(p, n_s)$ содержит только упругоотраженные сферические волны [ср. различие в энергетических знаменателях $\varphi^0(p)$ и (23)], то, исходя из такой волновой функции, применять обычную теорию возмущений нельзя. Поэтому пока не доказано, что метод, примененный в «В»,— отвлекаясь от случая слабых полей, где он совпадает с методом «А»,— дает правильные результаты.

[10] Для частного случая силового поля $V(r) = \frac{h^2}{2m} K \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ (где K имеет размерность обратной длины) мы вычислили второе приближение теории возмущений и установили, что оно (для произвольных значений заряда тела) мало по сравнению с первым, пока $K \ll \alpha$.

Напротив, для кулоновского поля ($\alpha = 0$) борновское приближение теряет смысл при условии $|p_0'| \sim hK$, т. е., в частности, вблизи границы тормозного спектра ($p_0' = 0$), что, впрочем, хорошо известно.

Форма зависимости правой части от n_s означает, что испускание различных квантов (одинаковой или разной частоты) при заданных p_0 и p_0' происходит *статистически* независимо. Это, по-видимому, характерная особенность слабых силовых полей.

Тот факт, что полное сечение при заданном направлении отклонения частицы, согласно обычной теории излучения, расходится, непосредственно связан с тем, что бесконечное произведение в формуле (28) обращается в нуль, если только не все числа n_s отличны от нуля; действительно, в соответствии с формулами (5) и (11) $\sum\limits_s w_s^2$ при малых ω_s расходится как $\int \frac{d\omega_s}{\omega_s}$. Отсюда уже в работе «А» был сделан вывод, что при каждом прохождении заряженного тела через силовое поле излучается бесконечно много бесконечно малых квантов $h\omega_s$ и что, в частности, не могут происходить совершенно упругие столкновения с точно обращающимися в нуль потерями энергии частицы.

Мы выведем здесь сначала точное выражение для сечения dq, когда — в результате испускания света — при заданном угловом отклонении тело теряет энергию

$$\frac{1}{2m}(p_0^2 - p_0'^2) = h\sum_s n_s\omega_s$$

в интервале между E и $E + dE$:

$$E < h\sum_s n_s\omega_s < E + dE. \tag{29}$$

В соответствии с (27) и (28) это сечение определяется формулой

$$dq = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0'|V|p_0)|^2 S(E)\, dE \tag{30}$$

при

$$S(E)\, dE = \sum_{E<h\Sigma n_s\omega_s<E+dE} (n_s) \prod_s \frac{1}{n_s!} w_s^{n_s} e^{-w_s}. \tag{31}$$

Найти величину этого выражения можно следующим образом. Вводя δ-функцию Дирака, напишем сначала

$$S = \sum (n_s)\, \delta\Big(E - h\sum_s n_s\omega_s\Big) \prod_s \frac{1}{n_s!} w_s^{n_s} e^{-w_s},$$

причем суммирование распространяется на *все* n_s [11]. Однако

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\, d\alpha.$$

[11] В работе «А» в аргументе δ-функции здесь пренебрегается величиной $h\Sigma n_s\omega_s$, что представляется непоследовательным.

Подставляя это выражение и переставляя знаки интегрирования по α и суммирования по n_s, получаем

$$S = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{i\alpha E} \prod_s \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{1}{n_s!} w_s^{n_s} e^{-i\alpha h\omega_s n_s} e^{-w_s},$$

или после суммирования по n_s

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d\alpha e^{i\alpha E + f(\alpha)}, \tag{32}$$

где

$$f(\alpha) = \sum_s w_s (e^{-i\alpha h\omega_s} - 1).$$

С помощью формулы (11) после подстановки выражения (5) сумму можно превратить в интеграл; тогда будем иметь

$$f(\alpha) = C\int\limits_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega}(e^{-i\alpha h\omega} - 1)\, G(\omega), \tag{33}$$

где сделана подстановка

$$C = \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{hc}\frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0')^2}{m^2c^2} \tag{34}$$

и $G(\omega)$ опять означает обрывающий множитель. Мы видим прежде всего, что без обрывающего множителя [$G(\omega) = 1$, точечный заряд] $f(\alpha) = -\infty$ и $S = 0$. *Поэтому значение $S(E)$ должно существенно зависеть от ω_1 и в общем случае также от вида функции $G(\omega)$*. Далее будут рассмотрены особые случаи этой функции. Сначала мы приведем вычисление для выбранной в формуле (36) функции $G(\omega) = e^{-\omega/\omega_1}$. В этом случае для $f(\alpha)$ можно получить простое замкнутое выражение [12]

$$f(\alpha) = -C\ln(1 + i\alpha h\omega_1) = \ln(1 + i\alpha h\omega_1)^{-C} \quad \text{при} \quad G(\omega) = e^{-\omega/\omega_1}. \tag{35}$$

Формула (32) в этом случае принимает вид

$$S = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha E}(1 + i\alpha h\omega_1)^{-C}\, d\alpha$$

или с учетом равенств

$$1 + i\alpha h\omega_1 = \frac{h\omega_1}{E} z, \qquad e^{i\alpha E} = e^z e^{-E/h\omega_1}, \qquad d\alpha = \frac{1}{E}\frac{dz}{i},$$

$$S = e^{-E/h\omega_1}\frac{1}{h\omega_1}\left(\frac{h\omega_1}{E}\right)^{C-1}\frac{1}{2\pi i}\int z^{-C}e^z dz.$$

---

[12] Имеем $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x}(e^{-x} - e^{-\alpha x}) = \ln\alpha$.

Контур интегрирования в интеграле по dz можно деформировать так, что он пройдет слева от начала координат, от $-\infty - i\varepsilon$ до $-\infty + i\varepsilon$, и по известной формуле

$$\frac{1}{2\pi i}\int z^{-C}e^{z}dz = \frac{1}{\Gamma(C)}$$

мы получим

$$S = \frac{1}{h\omega_1}\left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^{C-1}\frac{e^{-E/h\omega_1}}{\Gamma(C)} \quad \text{при} \quad G(\omega) = e^{-\omega/\omega_1}. \tag{36}$$

К этой же функции S (E) можно свести другую физически интересную величину, которую можно назвать спектральной *излучательной способностью*. Она выражает энергию в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$, излучаемую в стационарных условиях одной частицей, проходящей через единичную площадку (перпендикулярную оси X_1), и будет обозначаться $A(\omega)d\omega$ [13]. При этом мы можем еще учесть направление отклоненной при таком процессе частицы (лежащее в некотором элементе телесного угла $d\Omega$) и сначала также рассмотреть потери энергии частицы в интервале $(E, E + dE)$; но затем мы проинтегрируем по направлениям и энергии. При этом мы рассматриваем энергию, излученную в этом интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$, *независимо от того, какие другие частоты одновременно излучаются при рассматриваемых процессах. Далее, направление испущенных квантов мы будем считать произвольным.* При заданном p_0' из формул (27) и (28) непосредственно вытекает

$$A(\omega)\,d\omega = d\Omega\cdot 16\pi^4h^2m^2\frac{|p_0'|}{|p_0|}\,|(p_0'\,|\,V\,|\,p_0)|^2 \prod_{\substack{0<\omega_s<\omega,\\ \omega_s>\omega+d\omega}}(s)\sum(n_s)\frac{1}{n_s!}w_s^{n_s}e^{-w_s}\times$$

$$\times\prod_{\omega<\omega_s<\omega+d\omega}(s)\sum(n_s)\,n_sh\omega_s\frac{w_s}{n_s!}e^{-w_s}.$$

Здесь числа n_s должны всегда удовлетворять выражающему сохранение энергии условию

$$E < h\Sigma n_s\omega_s < E + dE,$$

которое выше обеспечивалось δ-функцией. Это условие имеет прямое следствие

$$h\omega \leqslant E, \tag{37}$$

[13] Если J_0 означает плотность потока падающих частиц (число частиц, проходящих за единицу времени через единичную площадь), то $J_0A\,(\omega)d\omega$ будет энергией света, испущенного в единицу времени при рассматриваемых процессах. Если число рассеивающих центров равно N, то полные средние потери энергии падающих частиц с энергией E на единице длины будут

$$-\frac{dE}{dx} = EN\int_0^\infty A(\omega)\,d\omega.$$

Величина $A\,(\omega)d\omega$ имеет размерность *эрг·см*^{2}.

необходимое для того, чтобы энергия излучения с частотой ω вообще могла быть отличной от нуля. Таким же методом, как и выше, получаем

$$A(\omega)\,d\omega = d\Omega\cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|}\,|(p_0'|V|p_0)|^2 S(E-h\omega)\cdot C\cdot G(\omega)\,h d\omega. \quad (38)$$

Сюда входит значение функции S при значении аргумента $E - h\omega$; C по-прежнему определяется формулой (34) и, как всегда,

$$|p_0'| = \sqrt{p_0^2 - 2mE}. \quad (39)$$

Если мы будем задавать только направление импульса частицы после излучения, то необходимо проинтегрировать с этим значением $|p_0'|$ по всем возможным потерям энергии частицы, после чего получается результат

$$\bar{A}(\omega)\,d\omega = d\Omega\cdot 16\pi^4 h^2 m^2 G(\omega)\,h d\omega \int\limits_{h\omega}^{E_0} \frac{|p_0'|}{|p_0|}\,|(p_0'|V|p_0)|^2 S(E-h\omega)\,C dE. \quad (38a)$$

Здесь $E_0 = p_0^2/2m$ — начальная энергия частицы. Как мы увидим, в некоторых случаях функция $S(E)$ имеет острый максимум вблизи $E = 0$. Тогда можно приравнять p_0' величине

$$\sqrt{p_0^2 - 2mE},$$

вынести из-под знака интеграла первые два множителя в (38a), а также считать при интегрировании постоянной величину C, входящую в функцию S в соответствии с формулами (32), (33). В этом случае при заданном $|p_0'|$ полезно иметь в виду соотношение

$$\int\limits_0^\infty S(E)\,dE = 1, \quad (40)$$

по определению (31) функции S тождественное с соотношением (21a) для $n = 0$. Легко показать также, что выражение (36) удовлетворяет этому условию.

В следующем параграфе мы более подробно обсудим результат, содержащийся в формулах (30) и (38), в физически интересных частных случаях.

§ 4. Обсуждение двух предельных случаев

A) $C \gg 1$

Если мы исключим очень малые углы отклонения частицы, то величина $(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0')^2$ будет порядка p_0^2, и написанное выше неравенство примет вид

$$\frac{e^2}{hc}\,\frac{E_0}{mc^2} \gg 1, \quad (41)$$

причем начальная энергия частицы дается выражением

$$E_0 = \frac{p_0^2}{2m} = h\omega_0, \tag{42}$$

где ω_0 — соответствующая E_0 верхняя граница тормозного спектра. Вместе с предположением (I)

$$\frac{e^2\omega_1}{mc^2} \ll 1$$

мы немедленно получаем отсюда

$$\omega_1 \ll \omega_0. \tag{43}$$

Другими словами, квантовая граница спектра в действительности здесь никогда не достигается, так как вследствие конечного размера заряженного тела спектр оказывается оборванным намного раньше.

Прежде всего при специальном выборе $G(\omega) = e^{-\omega/\omega_1}$ из формулы (36) видно, что при фиксированном значении C функция $S(E)$ имеет максимум при $E = (C-1)h\omega_1 \sim h\omega_1 C$. Для больших C этот максимум очень острый: из формулы Стирлинга следует

$$h\omega_1 S(E) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi C}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(E-h\omega_1 C)^2}{(h\omega_1)^2 C}\right], \quad \overline{\left(\frac{E-h\omega_1 C}{h\omega_1 C}\right)^2} = \frac{1}{C}. \tag{44}$$

Иначе говоря, относительный интервал E, где функция $S(E)$ заметно отличается от нуля, становится по порядку величины равным $1/\sqrt{C}$, т. е. при больших C очень малым. Поэтому, учитывая формулу (40), можно в первом приближении положить

$$S(E) = \delta(E - h\omega_1 C). \tag{45}$$

Покажем теперь, что этот результат для больших C не зависит от частного вида конца спектра. Из формул (32), (33) легко видеть, что для больших C существенны только значения f при малых $\alpha h\omega_1$. Разлагая в подынтегральной функции (33) экспоненту в ряд по α и ограничиваясь линейным по α членом, имеем

$$f(\alpha) = C(-i\alpha h)\int_0^\infty G(\omega)\,d\omega = -Ci\alpha h\omega_1,$$

где ω_1 определяется формулой (7). При подстановке в (32) снова получается формула (45) для $S(E)$. При сохранении в разложении $f(\alpha)$ квадратичного по α члена для $S(E)$ опять получается распределение Гаусса с относительной шириной порядка $1/\sqrt{C}$ вблизи максимума $E = Ch\omega_1$.

Наш результат означает, что в рассматриваемом предельном случае при заданном угловом отклонении частицы потери энергии определяются формулой

$$E = Ch\omega_1 = \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{c^3}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2\omega_1, \tag{46}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}_0/m$ — начальная и $\mathbf{v}' = \mathbf{p}_0'/m$ — конечная скорость частицы. Так как в соответствии с (1) величина E очень мала по сравнению с начальной энергией E_0, мы можем в формуле (46) положить $|v'| = |v|$ и написать

$$E = \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{c^3}v^2\cdot 2(1-\cos\vartheta)\,\omega_1, \tag{46a}$$

где ϑ — угол отклонения частицы [14].

Для спектральной излучательной способности после подстановки (45) в формулу (38а) имеем

$$\bar{A}(\omega)\,d\omega = d\Omega\cdot 16\pi^4h^2m^2\frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{c^2}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2\frac{|p_0'|}{|p_0|}|(p_0'|V|p_0)|^2 G(\omega)\,d\omega. \tag{47}$$

При этом p_0' сначала надо было бы определять по формуле (39) со значением E:

$$E = h\omega + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(v-v')^2\frac{\omega_1}{\pi}.$$

Однако ввиду условия $C \gg 1$ величиной $h\omega$ по сравнению со вторым членом следует пренебречь, а там, где $\omega \gg \omega_1$, значение $A(\omega)$ благодаря обрывающему множителю обращается в нуль или становится очень малым; далее, вследствие равенства (1) второй член в выражении для E всегда мал по сравнению с E_0, и потому в формуле (47) с достаточной точностью можно положить

$$|p_0'| \sim |p_0|.$$

Спектральная излучательная способность, таким образом, при условии $\omega \ll \omega_1$ при заданном угловом отклонении частицы не зависит от ω и для $\omega \sim \omega_1$ оказывается просто пропорциональной обрывающему множителю $G(\omega)$.

Свойства заряженной частицы (потери энергии и спектр излучения) при заданном угловом отклонении оказываются здесь точно такими, *какими они были бы в классической электродинамике, если бы изменение скорости тела от* $\mathbf{v}$ *до* $\mathbf{v}'$ *происходило «внезапно», т. е. за время, короткое по сравнению с* $1/\omega_1$ [15]. Полное сечение (проинтегрированное по dE) отклонения частицы в данном элементе угла в соответствии с формулами (30), (40) и (45) получается таким же, как в первом борновском приближении волновой механики без учета излучения.

Примечательно, что в этом случае, когда отклонение частицы нельзя определять по формулам классической механики, не играет роли и классически вычисленное «время столкновения». С другой стороны, было бы

[14] Мы проделали специально вычисления для того, чтобы убедиться в том, что отброшенные здесь пропорциональные $\mathbf{A}^2$ члены в операторе Гамильтона (1) дают и для рассматриваемого предельного случая $C \gg 1$ поправки только высшего порядка по малой величине $e^2\omega_1/mc^3$.

[15] Ср. также: *N. Bohr, L. Rosenfeld.* Dan. Math. fys. Medd., 1933, **12**, 8.

очень желательно исследовать при условии $C \gg 1$ предельный переход к классической электродинамике в противоположном случае квазиклассического силового поля (когда борновское приближение, конечно, неприменимо). Здесь величина ω_1 (размер тела) не должна была бы входить в результат, если векторное изменение скорости за время $1/\omega_1$ мало́ по сравнению с мгновенным значением скорости.

Б) $C \ll 1$

Этот случай представляет особенный интерес, так как он позволяет провести сравнение с обычной теорией излучения, в которой производится разложение в ряд по степеням $\frac{e^2}{\hbar c}\frac{v_0^2}{c^2}$. Как уже говорилось во введении, обычная теория в случае слабых силовых полей приводит к результату, что наряду с упругим рассеянием с сечением

$$dq = d\Omega \cdot 16\pi^3\hbar^2m^2 \,|\,(p_0' \,|\, V \,|\, p_0)\,|^2 \tag{48а}$$

происходит неупругое рассеяние, сечение которого при потерях энергии частицы в интервале $(E, E + dE)$ дается формулой [16]

$$dq = d\Omega \cdot 16\pi^4\hbar^2m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0' | V | p_0)|^2 \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{(\mathbf{p}_0' - \mathbf{p}_0)^2}{m^2c^2}\frac{dE}{E}. \tag{48б}$$

Интеграл по dq при $E = 0$ расходится логарифмически («инфракрасная катастрофа»).

Поскольку в этой теории рассматриваются только те процессы, в которых испускается лишь один-единственный квант света, спектральная излучательная способность имеет вид

$$\bar{A}(\omega)\, d\omega = d\Omega \cdot 16\pi^4\hbar^2m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0' | V | p_0)|^2 \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{c^3}\frac{(\mathbf{p}_0' - \mathbf{p}_0)^2}{m^2}\, d\omega. \tag{48в}$$

Если мы возьмем сначала для простоты $G(\omega) = e^{-\omega/\omega_1}$, то результат развитой здесь теории можно будет получить прямо из формул (30), (36), (38), учитывая еще, что в силу условия $C \ll 1$ можно положить $\Gamma(C) = \frac{1}{C}\Gamma(C+1) \sim \frac{1}{C}$:

$$S dE = C\frac{dE}{E}\left(\frac{E}{\hbar\omega_1}\right)^C e^{-E/\hbar\omega_1} = d\left(\frac{E}{\hbar\omega_1}\right)^C e^{-E/\hbar\omega_1}. \tag{49}$$

В частности, сечение приобретает вид

$$dq = d\Omega \cdot 16\pi^4\hbar^2m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0' | V | p_0)|^2\, C\frac{dE}{E}\left(\frac{E}{\hbar\omega_1}\right)^C e^{-E/\hbar\omega_1}. \tag{50}$$

Строго упругого рассеяния, как уже было упомянуто, в этой теории не существует. Интеграл от выражения (50) в пределах от 0 до E теперь из-за

---

[16] Ср., например: *W. Heitler*. The Quantum Theory of Radiation, p. 166, Gl. (17). (Русск. пер.: *В. Гайтлер*. Квантовая теория излучения. М.—Л., 1940.— *Ред.*). Мы полагаем здесь $G(\omega) = 1$, как и должно быть для точечного заряда.

дополнительного множителя E^C оказывается конечным и, с точностью до членов порядка C, равным

$$\left(\int dq\right)_0^E = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \,|(p_0'\,|\,V\,|\,p_0)|^2 \left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C. \tag{51}$$

Опущенные члены порядка C обусловлены тем, что $|p_0'|$ и C зависят от переменной интегрирования E, тогда как здесь подставлены соответствующие значения для $|p_0'| = |p_0|$. При условии

$$-C\ln\frac{E}{h\omega_1} \ll 1 \quad \text{или} \quad \ln h\omega_1 - \ln E \ll \frac{1}{C} \tag{52}$$

можно положить $(E/h\omega_1)^C \sim 1$, *и выражение (51) будет совпадать с задаваемым (48) выражением для сечения упругого рассеяния, полученным в старой теории. При условии (52) и более общее выражение (50) — отвлекаясь от обрывающего множителя* $e^{-E/h\omega_1}$ — *совпадает с (48б). Что касается поведения частицы, то условие (52) указывает область применимости старой теории.* Оно исключает из этой области только очень узкий интервал вблизи $E = 0$. Величина же этого интервала существенно зависит от значения частоты обрыва ω_1.

Для излучательной способности, производя разложение $|p_0'|$ в ряд в окрестности $E = h\omega$ и пренебрегая величинами порядка C^2, мы получаем из формулы (38) результат, в котором сделана подстановка $|p_0'| = \sqrt{p_0^2 - 2mh\omega}$:

$$A(\omega)\,d\omega = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|}\,|(p_0'\,|\,V\,|\,p_0)|^2 \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{c^3}\frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0')^2}{m^2} e^{-\omega/\omega_1} \times$$
$$\times \int\limits_0^{\frac{\omega_0-\omega}{\omega_1}} C\cdot x^{C-1} e^{-x}\,dx. \tag{53}$$

До сих пор мы еще не делали никаких предположений о величине отношения ω_0/ω_1, и полученные формулы должны быть справедливыми при любых значениях этого отношения. Если же, например, $\omega_1 \ll \omega_0$ (большие тела), то при $\omega_0 - \omega \gg \omega_1$ интеграл в формуле (53) можно просто приравнять 1. Поскольку этот случай не содержит ничего неожиданного, рассмотрим теперь случай

$$\omega_0 \ll \omega_1, \tag{54}$$

в котором всегда можно полагать $e^{-E/h\omega_1} \sim 1$ и $e^{-\omega/\omega_1} \sim 1$, $e^{-\omega_0/\omega_1} \sim 1$. Тогда, последовательно пренебрегая членами высших порядков по C, имеем:

$$dq = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|}\,|(p_0'\,|\,V\,|\,p_0)|^2\, C\left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C \frac{dE}{E}, \tag{50a}$$

$$\bar{A}(\omega)\,d\omega = d\Omega \cdot 16\pi^4 \omega h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|}\,|(p_0'\,|\,V\,|\,p_0)|^2 \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{c^3}\frac{(\mathbf{p}_0' - \mathbf{p}_0)^2}{m^2}\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_1}\right)^C. \tag{53a}$$

Пределы применимости обычной теории излучения определяются, как и прежде, условиями (52). Формула (53а) содержит результат, что в непосредственной окрестности граничной частоты спектральная интенсивность убывает до нуля быстрее, чем в обычной теории излучения [17].

Самое неожиданное в этом результате — это то, что и в случае $\omega < \omega_0 \ll \omega_1$ значение ω_1 не выпадает из конечного результата, а существенно определяет границу применимости обычной теории излучения. Поэтому важно установить, какие частоты приводят к зависимости от ω_1 значения суммы S, определяемой формулой (31). Образуя (при фиксированном p_0')

$$S' = \int_0^E S dE = \sum_{h \sum_s n_s \omega_s < E} (n_s) \prod_s \frac{1}{n_s!} w^{n_s} e^{-w},$$

мы видим, что при $\omega > E/h$ эта зависимость *обусловлена членами с* $n_s = 0$.

---

[17] Приведем здесь еще обобщение результатов, справедливых при условии (54), на случай обрыва произвольного вида. В этом случае необходимо найти значение функции $f(\alpha)$, определенной формулой (33), при больших значениях аргумента $\alpha h\omega_1$. Обобщение формулы (35) для $f(\alpha)$ имеет вид

$$f(\alpha) = -C\left[\ln(\alpha h\omega_1) + i\frac{\pi}{2} + \gamma\right] + \ldots \text{ при } \alpha h\omega_1 \gg 1, \qquad (*)$$

где γ — постоянная порядка 1. Эту формулу можно вывести, например, из соответствующего выражения для $f'(\alpha)$. Тогда для малых значений $E/h\omega_1$ и C находим из (32)

$$SdE = \frac{dE}{E}\left(\frac{E}{e^\gamma h\omega_1}\right)^C \frac{1}{\Gamma(C)} \sim C\frac{dE}{E}\left(\frac{E}{e^\gamma h\omega_1}\right). \qquad (49')$$

Другими словами, ω_1 следует всегда заменять на $\omega_1 e^\gamma$.

К такому же результату приводит также следующий вариант процесса суммирования из § 3. Полагаем

$$S = (\partial S'/\partial E)_{p_0'}.$$

Здесь дифференцирование производится при фиксированном значении p_0' и

$$S' = \sum_{h \sum_s n_s \omega_1 < E} (n_s) \prod_s \frac{1}{n_s!} w_s^{n_s} e^{-w_s}.$$

При малых C вместо дополнительного условия $h\Sigma n_s\omega_1 < E$ можно ввести множитель $\exp\left[-h\sum_s n_s\omega_s/E\right]$ и просуммировать по всем n_s. Получаем результат

$$S' = e^{\varphi\left(\frac{1}{E}\right)}, \quad \varphi(\alpha) = f(-i\alpha) = C\int_0^\infty \left(\frac{d\omega}{\omega}\right)(e^{\alpha h\omega} - 1)\, G(\omega).$$

Из формулы (*) снова следует формула (49') при $E/h\omega_1 \ll 1$.

Для резкого обрыва [$G(\omega) = 1$ при $\omega < \omega_1$ и $G(\omega) = 0$ при $\omega > \omega_1$] γ означает постоянную Эйлера.

Если мы произведем здесь резкое обрывание, то легко получить, что главный член определяется выражением [18]

$$\prod_{\omega_s > E/h} e^{-w} = \exp\left\{-C\int\limits_{E/h}^{\omega_1}\frac{d\omega}{\omega}\right\} = \left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C.$$

Кроме того, мы находим верхний предел для S', суммируя при $\omega_s < E/h$ по *всем* n_s (что дает при соответствующих условиях множитель 1 в $\prod_s$) вместо того, чтобы соблюдать неравенство $\sum_s n_s\omega_s < E/h$. Поэтому [19]

$$S' < \left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C.$$

Можно еще указать на то, что формальное разложение выражения (50а) в ряд по степеням C

$$\left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C = 1 + C\ln\left(\frac{E}{h\omega_1}\right) + \ldots$$

(причем, конечно, снова утрачивается интегрируемость dq при $E = 0$) должно совпадать с результатами высших приближений обычной теории возмущений, в которой разложение производится по e^2/hc. В действительности для точечных зарядов эти высшие приближения расходятся.

Зависимость результата от ω_1, с одной стороны, не позволяет применять его к реальным электронам. Хотя и можно думать о том, чтобы в противоречие с предложением (II) заменить величиной порядка mc^2/h, но такая замена была бы чисто умозрительной. С другой стороны, эта зависимость, по-видимому, говорит о том, что более тонкие аспекты квантовой электродинамики пространственно-протяженных зарядов в случае $\frac{1}{2}mv_0^2 \ll h\omega_1$ невозможно прямо связывать с соображениями, основанными на принципе соответствия.

Цюрих,
Физический институт Высшей технической школы

---

[18] В соответствии с прим. на с. 174 книги В. Гайтлера (см. прим. 16) именно при $n_s = 0$ можно пренебрегать запаздыванием.

[19] Ср. множитель e^{γ} в прим. 17.

1939

О КРИТЕРИИ ОДНО- ИЛИ ДВУЗНАЧНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ*

В настоящей работе предлагается следующий критерий для решения вопроса о том, должно ли данное волновое уравнение обладать физически допустимыми одно- или двузначными решениями. Однократное применение операторов момента импульса к заданной системе регулярных, т.е. интегрируемых с квадратом, собственных решений, принадлежащих одному и тому же значению квантового числа j полного импульса, не должно выводить за пределы этой системы, т. е. полученные в результате действия операторов новые решения должны линейно выражаться через исходные. Для обоснования этого критерия будет показано, что в случае его невыполнения не возникало бы однозначного соответствия между операторным и матричным представлениями компонент момента импульса. Применение этого критерия к скалярному волновому уравнению приводит к необходимости однозначных волновых функций, в то время как в случае шредингеровской формы уравнений Дирака в полярных координатах рассматриваемый критерий приводит к необходимости двузначных решений. Оба результата находятся в соответствии с опытом. Дается обобщение формулировки критерия на случай конечных вращений и более широкой группы вращений сферического пространства.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка критерия

Как уже подчеркивал автор этой статьи в одной из своих более ранних работ [1], априори не существует никакого сколько-нибудь веского аргумента в пользу того, что решения волнового уравнения, позволяющие дать квантовомеханическое описание некоторой системы, непременно должны быть однозначными. Для однозначности физических величин, которые всегда билинейны относительно волновой функции и функции, комплексно-сопряженной с ней, достаточно, чтобы все допустимые собственные решения при обходе некоторого замкнутого контура умножались на величину $e^{i\alpha}$, равную по модулю 1 и зависящую лишь от выбора контура, но отнюдь не от того, какое из собственных решений рассматривается. Однако проведенное в упоминавшейся работе обсуждение этого вопроса оказывается недостаточным, коль скоро среди многозначных собственных решений в общем случае имеются и такие, которые удовлетворяют всем требованиям регулярности. Сказанное в полной мере относится и к рассмотренным в цитированной работе многозначным сферическим функциям как решениям обычного нерелятивистского волнового уравнения для частицы.

---

* *Über ein Kriterium für Ein- oder Zweiwertigkeit der Eigenfunktionen in der Wellenmechanik.*— Helv. phys. acta, 1939, 12, 147—168.

[1] Ср. Handbuch der Physik, Bd. 24/1. 2. Aufl. Berlin, 1933, S. 126. (Русск. пер.: *В. Паули.* Труды по квантовой теории. М., «Наука», 1975, с. 408.— *Ред.*).

Обсуждаемая нами проблема неоднократно рассматривалась в литературе [2]. Особенно существенного прогресса удалось добиться Шредингеру. Прежде всего он заметил, что равноправность прошлого и будущего (обратимость времени) для хода изменения физических величин гарантирована лишь тогда, когда волновые функции однозначны либо двузначны, причем двузначные функции при обходе уже упоминавшегося контура просто меняют свой знак. По этой причине и для простоты мы будем в дальнейшем обсуждать лишь две эти возможности. Кроме того, исходя из своих ранних работ по уравнениям Дирака в произвольной системе координат [3], Шредингер сумел найти случай, когда решения волнового уравнения приходится считать двузначными, чтобы результаты теории соответствовали эксперименту. Речь идет прежде всего о новой форме записи релятивистского волнового уравнения Дирака для электрона в полярных координатах в обычном плоском пространстве. Такое положение вещей вызывает серьезные сомнения в том, существуют ли вообще достаточные физические основания для решения вопроса об одно- или двузначности решений данного волнового уравнения.

В этой заметке будет показано, что таких сомнений быть не должно и что в действительности (так же как для различных классов симметрии многоэлектронной проблемы) можно предложить теоретический критерий для решения вопроса. Правда, для этого недостаточно исследовать одну лишь регулярность собственных функций; существенно, чтобы оператор Гамильтона допускал некоторую группу преобразований. В настоящей работе мы ограничимся группой обычных вращений в плоском пространстве и рассмотрим, с одной стороны, нерелятивистское скалярное волновое уравнение для некоторой частицы, а с другой — релятивистское волновое уравнение для электрона со спином. Как известно, с этой группой связано существование трех операторов момента импульса P_1, P_2, P_3, которые в случае задачи с центральной симметрией всегда переводят одно собственное решение в другое, поскольку они коммутируют с оператором Гамильтона. Кроме того, каждая из трех величин P_k $(k = 1, 2, 3)$ коммутирует с квадратом полного момента импульса

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2. \tag{1}$$

Как известно, квадрат полного момента имеет собственные значения $j(j+1)$. Вопрос, в каком случае следует исключать полуцелые, а в ка-

[2] *A. S. Eddington.* Relativity Theory of Protons and Electrons. Cambridge, 1936, p. 60, 150; там же приведена более ранняя литература. О двузначных шаровых функциях как решениях нерелятивистских волновых уравнений ср. также *F. Möglich.* Z. Phys., 1938, **110**, 1. Однако формула (2а) этой работы обладает существенным недостатком: как будет показано в § 2 настоящей работы, матричные элементы компонент момента импульса, вычисленные в виде интегралов по поверхности сферы, не коммутируют с матрицей квадрата полного момента импульса. По вопросу об обратимости времени см. *E. Schrödinger.* Ann. Phys., (5), 1938, **32**, 49. Подробное обсуждение многозначных решений релятивистских волновых уравнений для электрона см. *E. Schrödinger.* Comment. Pontif. Acad. scient., 1938, **2**, 321; в дальнейшем ссылка на эту работу будет обозначаться «P.A.».

[3] *E. Schrödinger.* Berl. Ber. phys.-math. Kl., 1932, S. 105.

ком — целые значения j, требует особого исследования. Чтобы решить его, мы берем в качестве исходной систему регулярных собственных функций $u_{j,m}$ оператора P^2, для которых

$$P^2 u_{j,m} = j\,(j+1) u_{j,m} \tag{1a}$$

(как обычно, мы не указываем в явном виде могущие встретиться спиновые индексы). При данном значении j всегда существует лишь конечное число регулярных собственных функций. Впрочем, для применимости критерия несущественно, причислять или нет к этому числу нерегулярные, но интегрируемые с квадратом собственные функции. Однако если мы рассмотрим все возможные (либо целые, либо полуцелые) значения j, то в последнем случае систему собственных функций можно было бы выбрать так, чтобы функции, принадлежащие системе и отвечающие различным значениям j, удовлетворяли условию ортогональности.

Наложим теперь дополнительно следующее физическое требование: *применение компонент P_k момента импульса к заданной конечной системе регулярных (или только квадратично-интегрируемых) собственных функций P^2, принадлежащих одному и тому же значению j, не должно выводить из этой системы.* Строго говоря, новые собственные функции $P_k u_{j,m}$ должны линейно выражаться через старые:

$$P_k u_{j,m} = \sum_{m'} c^k_{mm'} u_{m',j}. \tag{2}$$

Разумеется, в нашем требовании молчаливо предполагается, что и новые собственные функции должны быть регулярными (соответственно квадратично-интегрируемыми). То, что в левой и правой частях (2) стоят лишь собственные функции с одинаковым значением j, связано с тем, что все операторы P_k коммутируют с P^2).

Впрочем, если собственные функции $u_{j,m}$ специально выбрать так, чтобы одна из трех компонент момента импульса, например P_3, была приведена к диагональному виду, то для P_k будут выполняться известные правила отбора и в правой части (2) будет не больше двух членов, отличных от нуля. (Если бы собственные функции были нормированы, то $c^k_{mm'}$ имели бы смысл матричных элементов операторов P_k.)

В § 2 будет показано, что предлагаемый в этой работе критерий достаточен для того, чтобы однозначно решить, какая из двух возможностей допустима (одно- или двузначные волновые функции) при тех или иных обстоятельствах как в случае скалярного, так и в случае спинорного волнового уравнения (уравнения Дирака). Кроме того, важный результат (§ 3) состоит в том, что в тех случаях, когда наш критерий не выполняется, *некоторые из новых собственных функций $P_k u_{j,m}$ не будут ортогональны семейству первоначальных функций $u_{j',m}$* при фиксированном m и переменном j', хотя $j \neq j'$. Отсюда следует физическая необходимость выполнения нашего критерия. В противном случае при нарушении перестановочности всех P_k с P^2 матричные элементы операторов P_k не были бы диагональными по j. Поэтому последний результат можно сформулировать и так:

при нарушении нашего критерия нарушается обычное соответствие между матрицами и операторами для компонент момента импульса, что, очевидно, недопустимо из физических соображений.

Другая, гораздо более наглядная, но менее пригодная для практических приложений формулировка нашего критерия, эквивалентная исходной, будет дана в § 3. Она исходит из того, что операторам момента импульса соответствуют инфинитезимальные повороты, которые в случае *конечного* вращения системы координат позволяют получать из одного собственного решения волнового уравнения другое, новое. С точки зрения физики все такие собственные функции равноправны ввиду произвола в выборе осей полярной системы координат. Тот вариант нашего критерия, который связан с переходом от инфинитезимальных поворотов к конечным — в действительности этот вариант эквивалентен первоначальному и не содержит никаких более сильных требований,— утверждает к тому же, что новые собственные функции $v_{j,m}(x)$ должны линейно выражаться через старые $u_{j,m}$, отвечающие тому же значению j.

Однако определение операции, переводящей $u_{j,m}(x)$ в $v_{j,m}(x)$, требует более подробного рассмотрения. Она весьма проста в случае скалярного волнового уравнения, поскольку последнее непосредственно инвариантно относительно поворотов координатных осей. Таким образом, чтобы получить $v_{j,m}$ из $u_{j,m}$, сначала, не меняя вида функциональной зависимости $u_{j,m}$ от углов, вместо старых полярных углов ϑ, φ подставляют новые ϑ', φ', а затем новые углы выражают через старые ϑ, φ и три параметра вращения (например, три угла Эйлера), которые кратко можно обозначить a:

$$v_{j,m}(\vartheta, \varphi;\ a) = u_{j,m}(\vartheta', \varphi'). \tag{3}$$

Наш критерий требует, чтобы при этом выполнялось соотношение

$$u_{j,m}(\vartheta', \varphi') = \sum_{m'} C_{mm'}(a)\, u_{j,m}(\vartheta, \varphi), \tag{4}$$

справедливое, очевидно, лишь для однозначных волновых функций u. Напротив, двузначные сферические функции $u_{j,m}(\vartheta', \varphi')$, очевидно, не могут быть выражены через линейные комбинации $u_{j,m}(\vartheta, \varphi)$ с тем же j и постоянными коэффициентами, поскольку $u_{j,m}(\vartheta, \varphi)$ меняют знак при обходе вокруг точки $\vartheta = 0$, в то время как $u_{j,m}(\vartheta', \varphi')$ меняют знак при обходе вокруг отличной от нее точки $\vartheta' = 0$. Никакой «теоремы сложения» для двузначных сферических функций не существует.

По той же причине применение нашего критерия к обычным уравнениям Дирака для электрона с необходимостью приводит к однозначным решениям. Действительно, чтобы получить $v_{j,m}$ из $u_{j,m}$, в этом случае требуется не только выразить ϑ', φ' через ϑ, φ, но и произвести еще S-преобразование спиновых индексов с постоянными коэффициентами.

Однако с найденной Шредингером формой уравнений Дирака в полярных координатах дело обстоит иначе. При переходе от одной системы координат к другой эти уравнения не остаются инвариантными, и чтобы восстановить первоначальный вид волнового уравнения в новых коорди-

натах, требуется еще произвести S-преобразование спиновых индексов, *не зависящее от* ϑ *и* φ. (Заметим, кстати, что это обстоятельство характерно для установленной Шредингером общей ковариантной формы уравнений Дирака.) Тогда в этом случае новое решение $\chi(\vartheta, \varphi, a)$ волнового уравнения получают из произвольного решения $\psi(\vartheta, \varphi)$ с помощью преобразования

$$\chi(\vartheta, \varphi, a) = S(\vartheta, \varphi, a)\,\psi(\vartheta', \varphi'), \tag{3a}$$

где S — матрица обычным образом действует на спиновые индексы (не указанные здесь явно). Наш критерий вместо (4) принимает вид

$$S(\vartheta, \varphi; a)\,u_{j,m}(\vartheta', \varphi') = \sum_{m'} C_{mm'}(a)\,u_{j,m}(\vartheta, \varphi). \tag{4a}$$

Как будет показано в § 3, в шредингеровском случае матрица S так зависит от ϑ и φ, что при обходе по замкнутому контуру на сфере, содержащему внутри точку $\vartheta = 0$ и оставляющему во вне точку $\vartheta' = 0$, а также при обходе по замкнутому контуру, содержащему внутри $\vartheta' = 0$ и оставляющему во вне $\vartheta = 0$, знак ее изменяется. Поэтому в данном случае соотношение (4a) возможно лишь тогда, когда функция $u_{j,m}(\vartheta, \varphi)$ двузначна, и, наоборот, невозможно, если $u_{j,m}(\vartheta, \varphi)$ однозначна.

Таким образом, если бы матрица $S(\vartheta, \varphi; a)$ была известна, то вычисления с компонентами оператора момента импульса P_k (которые, впрочем, получаются из S при специальном выборе a для инфинитезимальных вращений) были излишни. Однако применение критерия к инфинитезимальным вращениям по ряду причин не лишено и самостоятельного значения. Во-первых, лишь при таком подходе отчетливо выявляется важность критерия для установления непротиворечивого соответствия между операторным и матричным исчислением. Кроме того, более общие группы обладают тем свойством, что прямые методы отыскания S-матрицы, не использующие обращение к другим формам волнового уравнения, становятся слишком сложными в случае конечных преобразований.

Как уже упоминалось, мы ограничимся изучением плоского пространства и обычной трехмерной группы вращений, поскольку наиболее существенное в наших рассуждениях отчетливо видно уже в этом случае. Однако наши рассуждения легко обобщаются на волновые уравнения в сферическом пространстве, причем в последнем случае вместо трехпараметрической группы вращений с тремя P_k появится шестипараметрическая группа вращений с шестью операторами M_k, N_k ($k = 1, 2, 3$), вместо собственных значений оператора $\sum_k P_k^2$ выступят собственные значения оператора $\sum_k (M_k^2 + N_k^2)$ и вместо m — два квантовых числа [4]. При инфинитезимальном подходе наш критерий и в этом случае позволяет утверждать, что $(M_k u)$, $(N_k u)$ можно представить в виде линейной комбинации

[4] «Р. А.», § 4.

тех первоначальных регулярных собственных функций (одной из них является u), которые отвечают тому же собственному значению оператора

$$\sum_{k=1}^{3}(M_k^2+N_k^2),$$

что и u. Этому критерию удовлетворяют именно те функции, которые были получены Шредингером как собственные функции сферического пространства[5]. Наш критерий позволяет получать правильные собственные функции и при ином выборе координат в сферическом пространстве.

§ 2. Применение компонент оператора момента импульса к собственным функциям

а) *Скалярное волновое уравнение.* Рассмотрим центрально-симметричный потенциал и будем считать, что в волновой функции выделен множитель $u(\vartheta, \varphi)$, зависящий от сферических координат. Как известно, он удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$P^2u \equiv -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)-\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=j(j+1)u, \tag{5}$$

в котором через $j(j+1)$ обозначено собственное значение оператора P^2. В дальнейшем нам будет удобно рассматривать следующие линейные комбинации компонент момента импульса:

$$P_+ = P_1 + iP_2 = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}+i\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{6а}$$

$$P_- = P_1 - iP_2 = e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\vartheta}+i\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{6б}$$

$$P_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{6в}$$

Рассмотрим, как обычно, собственные функции оператора P_3 с собственными значениями, которые отличаются от целых чисел только на одну и ту же постоянную. Для большей ясности мы будем в дальнейшем понимать под m неотрицательное число и различать собственные функции

$$\overset{+}{u}_{j,m}(\vartheta, \varphi) = f_{j,m}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi} \tag{7а}$$

и

$$\overset{-}{u}_{j,m} = f_{j,m}(\cos\vartheta)\,e^{-im\varphi}. \tag{7б}$$

Поскольку функция $f_{j,m}$ при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ регулярна,

$$\text{разность } j-m \text{ должна быть целой и неотрицательной.} \tag{8}$$

Полагая

$$z = \cos\vartheta, \tag{9}$$

[5] «Р. А.», § 8.

получаем известное представление сферических функций:

$$f_{j,m}(z) = (1 - z^2)^{-m/2} \left(\frac{d}{dz}\right)^{j-m} (1 - z^2)^j, \tag{10}$$

$$m = \alpha + \text{целое число}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{11а}$$

$$\alpha \leqslant m \leqslant j. \tag{11б}$$

Нормировка этих собственных функций в дальнейшем нам не потребуется. Таким образом, мы получаем все *регулярные* решения дифференциального уравнения

$$-\frac{d}{dz}\left[(1 - z^2)\frac{df}{dz}\right] + \frac{m^2}{1 - z^2} f = j(j+1) f, \tag{12}$$

следующего из (5). В дальнейшем особый интерес будут представлять случаи $\alpha = 0$ (целые j и m) и случай $\alpha = {}^1/_2$ (полуцелые j и m). При $\alpha = {}^1/_2$ решения

$$f_{j,-m}(z) = (1 - z^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dz}\right)^{j+m} (1 - z^2)^j \tag{13}$$

сингулярны. Напротив, случай целых j и m характеризуется, в частности, тем, что

$$f_{j,-m} = \text{const} \cdot f_{j,m}(z) \quad \text{при целых } j, m, \tag{14}$$

в то время как при нецелых m уже из сингулярности функции $f_{j,-m}$ в точках $z = \pm 1$ следует, что решение $f_{j,-m}$ должно быть совершенно иным, нежели решение $f_{j,m}$.

Для доказательства соотношения (14) можно воспользоваться представлением $f_{j,m}$ в виде интеграла на комплексной плоскости

$$f_{j,m}(z) = (1 - z^2)^{-m/2} \frac{(j-m)!}{2\pi i} \int_{K_0} \frac{[1 - (z+t)^2]^j}{t^{j-m+1}} dt, \tag{15}$$

которое следует непосредственно из (10) и полезно также для других целей. Путь интегрирования K_0 в этом случае имеет вид окружности с центром в нуле. Поскольку при нецелых j (и m) подынтегральное выражение обладает точками ветвления при $t = 1 - z$ и $t = -(1 + z)$, необходимо особо потребовать, чтобы эти точки лежали вне K_0:

$$|t| < |1 - z| \quad \text{и} \quad |t| < |1 + z| \quad \text{на } K_0 \text{ при нецелых } j, m. \tag{15а}$$

Величина окружности K_0 не играет роли лишь при целых j, m. С помощью подстановки

$$t \to \frac{1 - z^2}{t}$$

выражение для $f_{j,-m}$:

$$f_{j,-m}(z) = (1 - z^2)^{m/2} \frac{(j+m)!}{2\pi i} \int_{K_0} \frac{[1 - (z+t)^2]^j}{t^{j+m+1}} dt, \tag{16}$$

можно привести к виду

$$f_{j,-m}(z) = (1 - z^2)^{-m/2} e^{-2\pi i m} \frac{(j+m)!}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{[1-(z+t)^2]^j}{t^{j-m+1}} dt, \tag{16а}$$

причем на этот раз на K_1

$$|t| > |1 - z|, \qquad |t| > |1 + z|. \tag{16б}$$

Окружность K_1 может быть стянута в окружность K_0 лишь при целых j, m. При целых же j, m выполняется и соотношение (14).

Покажем, что регулярная собственная функция

$$u^+_{j,\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) = f_{j,\frac{1}{2}}(z) e^{\frac{1}{2} i\varphi}$$

в общем случае неортогональна сингулярной [но, как нетрудно видеть из (10), квадратично-интегрируемой] собственной функции

$$u^+_{j',-\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) = f_{j',-\frac{1}{2}}(z) e^{\frac{1}{2} i\varphi}$$

аналогичное утверждение, разумеется, справедливо и для $u^-_{j,\frac{1}{2}}$, и для $u^-_{j',-\frac{1}{2}}$). Прежде всего,

$$\frac{1}{4\pi}\int (u^+_{j,\frac{1}{2}})^* u^+_{j',-\frac{1}{2}} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f_{j,\frac{1}{2}} f_{j',-\frac{1}{2}} dz.$$

Далее, из (12) следует, что

$$[j(j+1) - j'(j'+1)] \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f_{j,\frac{1}{2}} f_{j',-\frac{1}{2}} dz =$$
$$= \frac{1}{2} \left| (1-z^2) \left(f_{j',-\frac{1}{2}} \frac{df_{j,\frac{1}{2}}}{dz} - f_{j,\frac{1}{2}} \frac{df_{j',-\frac{1}{2}}}{dz} \right) \right|_{-1}^{+1}.$$

Правая часть конечна в обеих граничных точках $z = +1$ и $z = -1$. Вклады этих точек имеют одинаковый знак, если разность $j - j'$ нечетна; в противном случае они взаимно уничтожаются. Действительно, при полуцелых m и j функции $f_{j,\frac{1}{2}}$ и $f_{j',\frac{1}{2}}$ одновременно четны или нечетны по z лишь при нечетной разности $j - j'$. Таким образом, наш результат

состоит в том, что

$$\int (u^{\pm}_{j, \frac{1}{2}})^* u^{\pm}_{j', -\frac{1}{2}} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \neq 0 \text{ для нечетной разности } j - j' \text{ и полуцелых } j, j'. \tag{17}$$

Применим к собственным функциям операторы P_+ и P_- и покажем, что

$$P_+ (f_{j,m} e^{im\varphi}) = \text{const} \cdot f_{j,m+1} e^{i(m+1)\varphi},$$
$$P_- (f_{j,m} e^{im\varphi}) = \text{const} \cdot f_{j,m-1} e^{i(m-1)\varphi}; \tag{18а}$$
$$P_+ (f_{j,m} e^{-im\varphi}) = \text{const} \cdot f_{j,m-1} e^{-i(m-1)\varphi},$$
$$P_- (f_{j,m} e^{-im\varphi}) = \text{const} \cdot f_{j,m+1} e^{-i(m+1)\varphi}. \tag{18б}$$

При $j = m$ (предельное значение) $f_{j,j+1}$ необходимо полагать равной нулю. Действительно, из (6) и (15) следует, что

$$P_+ f_{j,m} e^{im\varphi} = e^{i(m+1)\varphi} \left[-(1 - z^2) \frac{df_{j,m}}{dz} - \frac{mz}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}} f_{j,m} \right] =$$
$$= e^{i(m+1)\varphi} (1 - z^2)^{-\frac{m+1}{2}} \frac{(j - m)!}{2\pi i} \int_{K} \{2j (1 - z^2)(z + t)[1 - (z + t)^2]^{j-1} -$$
$$- 2mz [1 - (z + t)^2]^j\} \frac{dt}{t^{j-m+1}}.$$

Подынтегральное выражение можно преобразовать к виду

$$(j + m + 1)[1 - (z + t)^2]^j t^{-(j-m)} - \frac{d}{dt} \{[1 - (z + t)^2]^j (2z + t) t^{-(j-m)}\}.$$

При интегрировании по окружности K_0 второй член обращается в нуль, и мы получаем

$$P_+ f_{j,m} e^{im\varphi} = (j + m + 1)(j - m) f_{j,m+1} e^{i(m+1)\varphi}.$$

Далее несколько проще находим

$$P_- f_{j,m} e^{im\varphi} = e^{i(m-1)\varphi} \left[(1 - z^2) \frac{df_{j,m}}{dz} - \frac{mz}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}} f_{j,m} \right] =$$
$$= e^{i(m-1)\varphi} (1 - z^2)^{-\frac{m-1}{2}} \frac{d}{dz} [f_{j,m} (1 - z^2)^{m/2}] =$$
$$= e^{i(m-1)\varphi} (1 - z^2)^{-\frac{m-1}{2}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{j-m+1} (1 - z^2)^j = e^{i(m-1)\varphi} f_{j,m-1}.$$

Соотношения (18б) вычисляются совершенно аналогично. Для нас важно, что, в частности, соотношения

$$P_- (f_{j,\frac{1}{2}} e^{+\frac{i\varphi}{2}}) = \text{const} \cdot f_{j,-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\varphi}{2}}, \quad P_+ (f_{j,\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\varphi}{2}}) = \text{const} \cdot f_{j,-\frac{1}{2}} e^{+\frac{i\varphi}{2}} \tag{19}$$

содержат сингулярное решение $f_{j,-\frac{1}{2}}$; при целых же j, m согласно (14)

$$P_{-}f_{j,0} = \mathrm{const}\cdot f_{j,-1}e^{-i\varphi} = \mathrm{const}\cdot f_{j,1}e^{-i\varphi} = \mathrm{const}\cdot u_{j,1}^{-}(\vartheta,\ \varphi).$$

Таким образом, при полуцелых j, m применение компонент момента импульса к системе собственных функций (7), (10) выводит из нее. Из формулы (17) следует, что вычисленные с помощью интегралов матрицы момента импульса для $m = {}^1/_2$ не будут диагональными по j (как указывалось в § 1). Таким образом, эти сферические функции с полуцелым m должны быть исключены в соответствии с нашим критерием.

б) *Волновое уравнение для электрона со спином.* Начнем с той формы уравнения Дирака в сферических координатах, которая была установлена Шредингером в качестве частного случая его общей теории электрона со спином в гравитационном поле. Более подробное рассмотрение связи этой теории с общепринятой мы отложим до следующего параграфа.

Запишем уравнения Шредингера в виде [6]

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\varphi_0\psi + \alpha_1\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sqrt{\sin\vartheta}\,\psi) + \alpha_2\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \\ + \alpha_3\frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi)}{\partial r} + i\frac{mc}{h}\beta\psi = 0, \qquad (20)$$

где матрицы α_k, β удовлетворяют известным перестановочным соотношениям Дирака, а φ_0, по предположению, означает центрально-симметричное скалярное потенциальное поле (умноженное на e/hc).

Компоненты момента импульса получаем, как обычно, дополняя соответствующие выражения (6) такими членами, чтобы те коммутировали с оператором Гамильтона. В результате находим:

$$P_{+} = P_1 + iP_2 = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{i\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}\frac{s_3}{\sin\vartheta}\right), \qquad (21а)$$

$$P_{-} = P_1 - iP_2 = e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{i\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}\frac{s_3}{\sin\vartheta}\right), \qquad (21б)$$

$$P_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (21в)$$

[здесь для краткости введено обозначение $s_3 = -i\alpha_1\alpha_2$ (и аналогичные величины с циклически переставленными индексами)]. В отличие от обычной формы теории компонента P_3 не получает добавочного члена, в то время как в P_1 и P_2 входит добавочный член с матрицей s_3 (вместо члена, обычно входящего в P_3).

[6] «Р. А.», уравнения (5.12) и (8.1) в пределе при $R \to \infty$. Для матриц, которые Шредингер обозначал через $i\alpha_4\alpha_2$, $i\alpha_4\alpha_3$, $i\alpha_4\alpha_1$, — α_1, мы ввели здесь обозначения α_1, α_2, α_3, β. Оправданием может служить то обстоятельство, что перестановочные соотношения Дирака будут выполняться для новых матриц, если они справедливы для исходных матриц $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$. Кроме того, Шредингер иногда использует сокращенное обозначение $\omega = r\sqrt{\sin\vartheta}\,\psi$, которое для нас было бы нецелесообразным.

Еще один оператор, коммутирующий как с полным оператором Гамильтона, так и с P_k, определяется формулой

$$K\psi = \beta\alpha_3\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{\sin\vartheta}}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sqrt{\sin\vartheta} + \frac{\sigma_2}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi. \tag{22}$$

Полный квадрат P_k можно выразить через квадрат K по формуле

$$P^2 \equiv P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = K^2 - \frac{1}{4}. \tag{23}$$

Поэтому если $j(j+1)$ — собственные значения оператора P^2, то $k = \pm(j + {}^1/_2)$ — собственные значения оператора K. Квантовое число k, которое может иметь два знака, как известно, играет важную роль в теории тонкой структуры атома водорода.

Для дальнейшего интегрирования матрицы α_k, β можно представить, например, в виде:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$s_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{24a}$$

Кроме того, ψ следует разложить на множители, один из которых зависит лишь от ϑ, φ, а другой — лишь от r:

$$\psi = \chi(r)\,u(\vartheta, \varphi), \tag{25}$$

причем

$$Ku = ku, \tag{26}$$

и если положить

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\nu,$$

то

$$-i\left(\frac{\nu}{c} + \varphi_0\right)\chi + \frac{1}{r}\alpha_3\beta k\chi + \alpha_3\frac{1}{r}\frac{\partial(r\chi)}{\partial r} + i\frac{mc}{h}\beta\chi = 0. \tag{27}$$

Для двух первых компонент $u(\vartheta, \varphi)$ из (22) получаем

$$ku = \frac{i\sigma_2}{\sqrt{\sin\vartheta}}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sqrt{\sin\vartheta}\,u) - \frac{i\sigma_1}{\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}. \tag{28}$$

Для u_3, u_4 выполняются аналогичные уравнения, в которых k заменены на $-k$. Решение этих уравнений находят, изменив знак одной из компонент, образующих пару, например знак u_2. Окончательно мы получаем

решение:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= F(r)\,u_1(\vartheta,\varphi), \quad \psi_2 = F(r)\,u_2(\vartheta,\varphi),\\ \psi_3 &= iG(r)\,u_1(\vartheta,\varphi), \quad \psi_4 = -\,iG(r)\,u_2(\vartheta,\varphi).\end{aligned} \tag{29}$$

Для F и G в силу (27) справедливы уравнения:

$$\left(\frac{\nu}{c}+\varphi_0\right)F+\frac{1}{r}kG-\frac{1}{r}\frac{d\,(rG)}{dr}-\frac{mc}{h}F=0, \tag{30а}$$

$$\left(\frac{\nu}{c}+\varphi_0\right)G+\frac{1}{r}kF+\frac{1}{r}\frac{d\,(rF)}{dr}+\frac{mc}{h}G=0. \tag{30б}$$

Эти уравнения совпадают с теми, которые приводятся в учебниках, и мы не будем останавливаться на них более подробно.

Если в (28) по аналогии со скалярным волновым уравнением подставить

$$u^{+}_{1;\,k,\,m}=f_{k,\,m}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi}, \qquad u^{+}_{2;\,k,\,m}=g_{k,\,m}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi}, \tag{31}$$

где под k и m понимаются неотрицательные числа, то для f и g из (28) получатся уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sqrt{\sin\vartheta}\,g\right)+\frac{m}{\sin\vartheta}\,g-kf=0, \tag{32а}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sqrt{\sin\vartheta}\,f\right)-\frac{m}{\sin\vartheta}\,f+kg=0^{7}. \tag{32б}$$

Отсюда тотчас же следуют новые решения:

$$u^{-}_{1;\,k,m}=g_{k,\,m}e^{-im\varphi}, \qquad u^{-}_{2;\,k,m}=-\,f_{k,\,m}e^{-im\varphi}; \tag{31'}$$

$$f_{-k,\,m}=f_{k,\,m}, \qquad g_{-k,\,m}=-\,g_{k,\,m}. \tag{33}$$

Регулярные решения уравнений (32) были получены с помощью ранее известных результатов Вейля и Шредингера[8]. Если вновь ввести обозначение

$$z=\cos\vartheta, \tag{34}$$

то необходимо дополнительно предположить, что

$$\text{число } k-m-\frac{1}{2}\geqslant 0 \text{ и целое, } k>0. \tag{35}$$

Тогда

$$f_{k,\,m}(z)=(1+z)^{-\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-m-\frac{1}{2}}(1+z)^{k}(1-z)^{k-1}, \tag{36а}$$

$$g_{k,\,m}(z)=(1+z)^{-\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-m-\frac{1}{2}}(1+z)^{k-1}(1-z)^{k}. \tag{36б}$$

---

[7] Обозначения Шредингера несколько отличаются от наших; величины, обозначенные им через f, g, мы записываем в виде $i\sqrt{\sin\vartheta}f$, $\sqrt{\sin\vartheta}g$.

[8] «Р. А.», § 7.

И на этот раз случаи целого k, полуцелого m и полуцелого k, целого m необходимо рассматривать отдельно. При этом согласно (33) достаточно ограничиться положительными k (при $k = 0$ решений, регулярных в $z = +1$ и в $z = -1$, не существует).

Более подробного рассмотрения требуют решения

$$u^{-}_{1;\,k,\,-m} = f_{k,\,-m} e^{-im\varphi}, \qquad u^{-}_{2;\,k,\,-m} = g_{k,\,-m} e^{-im\varphi} \tag{31a—}$$

и

$$u^{+}_{1;\,k,\,-m} = g_{k,\,-m} e^{im\varphi}, \qquad u^{+}_{2;\,k,\,-m} = -f_{k,\,-m} e^{im\varphi}, \tag{31a+}$$

получающиеся из (36) при формальной замене m на $-m$.

Прежде всего покажем по аналогии с § 1, что случай целых k и полуцелых m выделен особо: в этом случае

$$\left.\begin{matrix} f_{k,\,-m} \\ g_{k,\,-m} \end{matrix}\right\} = \text{const}\cdot\left\{\begin{matrix} g_{k,\,m} \\ -f_{k,\,m} \end{matrix}\right. \text{ при целом } k \text{ и полуцелом } m, \tag{37}$$

т. е. регулярные решения (31) могут быть получены и при формальной замене в (31) и (36а), (36б) m на $-m$. Далее, если ввести в качестве пути интегрирования на комплексной плоскости окружность K_0 с центром в нуле, то вместо (36) можно записать:

$$f_{k,\,m}(z) = (1+z)^{-\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)} (1-z)^{-\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)} \frac{\left(k-m-\frac{1}{2}\right)!}{2\pi i} \times \\ \times \int\limits_{K_0} \frac{dt\,(1+z+t)^k}{t^{k-m+\frac{1}{2}}} (1-z-t)^{k-1}, \tag{38a}$$

$$g_{k,\,m}(z) = (1+z)^{-\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)} (1-z)^{-\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)} \frac{\left(k-m-\frac{1}{2}\right)!}{2\pi i} \times \\ \times \int\limits_{K_0} \frac{dt\,(1+z+t)^{k-1}}{t^{k+m+\frac{1}{2}}} (1-z-t)^{k}. \tag{38б}$$

При целом $k \geqslant 1$ величина окружности K_0 роли не играет. В противном же случае следует обратить внимание на то, чтобы точки ветвления $t = -(1+z)$ и $t = 1-z$ лежали вне круга:

$$|t| < |1+z| \text{ и } |t| < |1-z| \text{ на } K_0 \text{ при нецелых } k \text{ и } m - \frac{1}{2}. \tag{39}$$

В выражениях для $f_{k,\,-m}$ и $g_{k,\,-m}$:

$$f_{k,\,-m}(z) = (1+z)^{\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)} (1-z)^{\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)} \frac{\left(k+m-\frac{1}{2}\right)!}{2\pi i} \times \\ \times \int\limits_{K_0} \frac{dt}{t^{k+m+\frac{1}{2}}} (1+z+t)^k (1-z-t)^{k-1}, \tag{40a}$$

$$g_{k,-m}(z) = (1+z)^{\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)}(1-z)^{\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)} \frac{\left(k+m-\frac{1}{2}\right)!}{2\pi i} \times$$
$$\times \int\limits_{K_0} \frac{dt}{t^{k+m+\frac{1}{2}}}(1+z+t)^{k-1}(1-z-t)^k, \qquad (40б)$$

произведем подстановку

$$t \to \frac{1-z^2}{t}$$

и получим:

$$f_{k,-m}(z) = (1+z)^{-\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)} e^{-\pi i\left(m-\frac{1}{2}\right)} \frac{\left(k+m-\frac{1}{2}\right)!}{2\pi i} \times$$
$$\times \int\limits_{K_1} \frac{dt\,(1+z+t)^{k-1}}{t^{k-m+\frac{1}{2}}}(1-z-t)^k, \qquad (41а)$$

$$g_{k,-m}(z) = -(1+z)^{-\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)} e^{-\pi i\left(m-\frac{1}{2}\right)} \frac{\left(k+m-\frac{1}{2}\right)!}{2\pi i} \times$$
$$\times \int\limits_{K_1} \frac{dt\,(1+z+t)^{k}}{t^{k-m+\frac{1}{2}}}(1-z-t)^{k-1}, \qquad (41б)$$

причем теперь на K_1

$$|t| > |1+z|, \qquad |t| > |1-z|. \qquad (42)$$

Поскольку при целом k и целом $m - {}^1/_2$ окружность K_1 можно стянуть в окружность K_0, соотношение (37) доказано и для рассматриваемого нами особого случая.

Иначе обстоит дело при полуцелом k и целом m. В этом случае решения (36а), (36б) регулярны в точках $z = -1$ и $z = +1$ лишь при $m > 0$, в то время как решения (31а) регулярны при $-m \leqslant 0$. При $m = 0$ эти решения становятся лишь квадратично-интегрируемыми. Следует заметить, однако, что при $m = 0$ из (36) и (37) получаются два различных решения: во-первых,

$$u^{\mathrm{I}}_{1;\,k,\,0} = f_{k,0}, \qquad u^{\mathrm{I}}_{2;\,k,\,0} = g_{k,0}, \qquad (43)$$

во-вторых,

$$u^{\mathrm{II}}_{1;\,k,\,0} = g_{k,0}, \qquad u^{\mathrm{II}}_{2;\,k,\,0} = -f_{k,0}. \qquad (44)$$

Покажем, что оба семейства решений при нечетной разности $k - k'$ не ортогональны друг другу. Справедливо даже несколько более общее утверждение: при целом $m \geqslant 0$ и полуцелом k

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{\rho=1,2}\int \overset{+*}{u}_{\rho;\,k,\,m}\overset{+}{u}_{\rho;\,k',-m}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\rho=1,2}\int \overset{-*}{u}_{\rho;\,k,m}\overset{-}{u}_{\rho;\,k',-m}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}(f_{k,m}g_{k',-m} - g_{k,m}f_{k',-m})\,dz \neq 0, \qquad (45)$$

если разность $k - k'$ нечетна,— результат, аналогичный формуле (17) из § 1. Впрочем, из (36) следует, что подынтегральное выражение (45) четно по z, если k полуцелое и разность $k - k'$ нечетна, в то время как при четной $k - k'$ подынтегральное выражение нечетно по z, и интеграл в этом случае обращается в нуль.

Для доказательства формулы (45), исходя из (32а), (32б), получаем

$$(k - k')\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(f_{k,m}g_{k',-m} - g_{k,m}f_{k',-m})\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\,|\,(1 - z^2)^{1/2}(f_{k,m}f_{k',-m} + g_{k,m}g_{k',-m})\,|_{-1}^{+1}.$$

Согласно (43) и (44) правая часть конечна в обеих граничных точках, и вклады обеих границ при нечетной разности $k - k'$ не компенсируются. Тем самым соотношение (45) доказано.

Применение операторов P_+ и P_-, определяемых формулами (21а), (21б), к собственным функциям приводит к результату, аналогичному соотношениям (18) из § 2:

$$P_+\begin{cases} f_{k,m}e^{im\varphi} \\ g_{k,m}e^{im\varphi}\end{cases} = \text{const}\cdot\begin{cases} f_{k,m+1}e^{i(m+1)\varphi}, \\ g_{k,m+1}e^{i(m+1)\varphi};\end{cases} \tag{46а}$$

$$P_-\begin{cases} f_{k,m}e^{im\varphi} \\ g_{k,m}e^{im\varphi}\end{cases} = \text{const}\cdot\begin{cases} f_{k,m-1}e^{i(m-1)\varphi}, \\ g_{k,m-1}e^{i(m-1)\varphi};\end{cases} \tag{46б}$$

$$P_+\begin{cases} g_{k,m}e^{-im\varphi} \\ -f_{k,m}e^{-im\varphi}\end{cases} = \text{const}\cdot\begin{cases} g_{k,m-1}e^{-i(m-1)\varphi}, \\ -f_{k,m-1}e^{-i(m-1)\varphi};\end{cases} \tag{46в}$$

$$P_-\begin{cases} g_{k,m}e^{-im\varphi} \\ -f_{k,m}e^{-im\varphi}\end{cases} = \text{const}\cdot\begin{cases} g_{k,m+1}e^{-i(m+1)\varphi}, \\ -f_{k,m+1}e^{-i(m+1)\varphi}.\end{cases} \tag{46г}$$

В (46а) и (46г) при $m = k - 1/2$ (предельное значение) правая часть обращается в нуль.

Действительно, принимая во внимание (21) и (24а), получаем из (36а), (36б) прежде всего

$$P_-(f_{k,m}e^{im\varphi}) = e^{i(m-1)\varphi}(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{df_{k,m}}{dz} - \frac{mz}{1 - z^2}f_{k,m} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - z^2}f_{k,m}\right] =$$

$$= e^{i(m-1)\varphi}(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{df_{k,m}}{dz} + \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{f_{k,m}}{1 + z} - \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{f_{k,m}}{1 - z}\right] =$$

$$= e^{i(m-1)\varphi}(1 + z)^{-\frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)}(1 + z)^{-\frac{1}{2}\left(m - \frac{3}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{d}{dz}\left[f_{k,m}(1 + z)^{\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right)}(1 - z)^{\frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)}\right] = e^{i(m-1)\varphi}f_{k,m-1}$$

и

$$P_{-}(g_{k,m}e^{im\varphi}) = e^{i(m-1)\varphi}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{dg_{k,m}}{dz} - \frac{mz}{1-z^2}g_{k,m} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-z^2}g_{k,m}\right] =$$

$$= e^{i(m-1)\varphi}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{dg_{k,m}}{dz} + \frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{g_{k,m}}{1+z} - \frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{g_{k,m}}{1-z}\right] =$$

$$= e^{i(m-1)\varphi}(1+z)^{-\frac{1}{2}\left(m-\frac{3}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{d}{dz}\left[g_{k,m}(1+z)^{\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)}(1-z)^{\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)}\right] = e^{i(m-1)\varphi}g_{k,\,m-1}.$$

Далее, пользуясь интегральным представлением (38), находим:

$$P_{+}(f_{k,m}e^{im\varphi}) = e^{i(m+1)\varphi}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{df_{k,m}}{dz} + \frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{f_{k,m}}{1+z} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{f_{k,m}}{1-z}\right] =$$

$$= e^{i(m+1)\varphi}(1+z)^{-\frac{1}{2}\left(m+\frac{3}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)}\frac{\left(k-m-\frac{1}{2}\right)!}{2\pi i} \times$$

$$\times \int\limits_{K_0}\frac{dt}{t^{k-m+\frac{1}{2}}}\left\{-(1-z^2)k(1+z+t)^{k-1}(1-z-t)^{k-1} + \right.$$

$$+ (1-z^2)(k-1)(1+z+t)^k(1-z-t)^{k-2} +$$

$$\left. + \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)(1-z) - \left(m-\frac{1}{2}\right)(1+z)\right](1+z+t)^k(1-z-t)^{k-1}\right\}.$$

Здесь подынтегральное выражение можно преобразовать к виду

$$\left(k+m+\frac{1}{2}\right)t^{-\left(k-m-\frac{1}{2}\right)}(1+z+t)^k(1-z-t)^{k-1} -$$

$$- \frac{d}{dt}\left[t^{-\left(k-m-\frac{1}{2}\right)}(2z+t)(1+z+t)^k(1-z-t)^{k-1}\right].$$

При интегрировании по окружности K_0 второй член обращается в нуль, и мы получаем

$$P_{+}(f_{k,m}e^{im\varphi}) = \left(k+m+\frac{1}{2}\right)\left(k-m-\frac{1}{2}\right)f_{k,\,m+1}e^{i(m+1)\varphi}.$$

Точно так же

$$P_{+}(g_{k,m}e^{im\varphi}) =$$

$$= e^{i(m+1)\varphi}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{dg_{k,m}}{dz} + \frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{g_{k,m}}{1+z} - \frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{g_{k,m}}{1-z}\right] =$$

$$= e^{i(m+1)\varphi}(1+z)^{-\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{1}{2}\left(m+\frac{3}{2}\right)}\frac{\left(k-m-\frac{1}{2}\right)!}{2\pi i} \times$$

$$\times \int \frac{dt}{t^{k-m+\frac{1}{2}}} \Big\{-(1-z^2)(k-1)(1+z+t)^{k-2}(1-z-t)^k +$$
$$+(1-z^2)k(1+z+t)^{k-1}(1-z-t)^{k-1} +$$
$$+\Big[\Big(m-\frac{1}{2}\Big)(1-z)-\Big(m+\frac{1}{2}\Big)(1+z)\Big](1+z+t)^{k-1}(1-z-t)^k\Big\}.$$

Подынтегральное выражение можно преобразовать к виду

$$\Big(k+m+\frac{1}{2}\Big)t^{-\left(k-m-\frac{1}{2}\right)}(1+z+t)^{k-1}(1-z-t)^k -$$
$$-\frac{d}{dt}\Big[t^{-\left(k-m-\frac{1}{2}\right)}(2z+t)(1+z+t)^{k-1}(1-z-t)^k\Big];$$

интегрируя по окружности K_0, получаем

$$P_+(g_{k,m}e^{im\varphi}) = \Big(k+m+\frac{1}{2}\Big)\Big(k-m-\frac{1}{2}\Big)g_{k,m+1}e^{i(m+1)\varphi}.$$

Для (46в) и (46г) выкладки проводятся аналогично.

Для применения нашего критерия особенно важно, чтобы в случае полуцелого k и целого m в соотношениях

$$P_-\begin{cases} f_{k,1}e^{i\varphi} \\ g_{k,1}e^{i\varphi}\end{cases} = \text{const}\cdot\begin{cases} f_{k,0}, \\ g_{k,0},\end{cases} \qquad P_+\begin{cases} g_{k,1}e^{-i\varphi} \\ -f_{k,1}e^{-i\varphi}\end{cases} = \text{const}\cdot\begin{cases} g_{k,0}, \\ -f_{k,0};\end{cases}$$

$$P_-\begin{cases} f_{k,0} \\ g_{k,0}\end{cases} = \text{const}\cdot\begin{cases} f_{k,-1}e^{-i\varphi}, \\ g_{k,-1}e^{-i\varphi},\end{cases} \qquad P_+\begin{cases} g_{k,0} \\ -f_{k,0}\end{cases} = \text{const}\cdot\begin{cases} g_{k,-1}e^{i\varphi}, \\ -f_{k,-1}e^{i\varphi}\end{cases}$$

результат содержал сингулярные решения. Поэтому наш критерий требует *исключить случай полуцелого k и целого m*. Действительно, в этом случае при вычислении матриц момента импульса с помощью интегралов возникает противоречие. С одной стороны, если считать, что одно из решений $(f_{k,0}, g_{k,0})$ *или* $(g_{k,0}, -f_{k,0})$ принадлежит исходной системе решений, то согласно (45) вычисленные матричные элементы не были бы полностью диагональными по k, хотя операторы P_+ и P_- коммутируют с оператором K, определяемым соотношением (22). С другой стороны, если бы мы не включили (нерегулярные, но квадратично интегрируемые) решения при $m = 0$ в число допустимых собственных функций [9], то все решения, полученные по формулам (46) при $m = 0$, были бы ортогональны ко всем допустимым исходным решениям, некоторые члены из матричных элементов P_+ и P_- при подстановке пределов интегрирования выпали бы и справедливость необходимых перестановочных соотношений для этих матриц была бы нарушена.

---

[9] Ср. «Р. А.», примечание при корректуре.

Наоборот, при целом k ($\neq 0$) и полуцелом m вследствие (37) применение операторов P_+ и P_- к исходной ортогональной системе

$$u_{k,m}^{+}(\vartheta, \varphi), u_{k,m}^{-}(\vartheta, \varphi), \quad \text{где} \quad {}^1/_2 \leqslant m \leqslant k - {}^1/_2,$$

в полном соответствии с нашим критерием не выводит из этой системы и, таким образом, позволяет получить физически правильные собственные функции.

§ 3. Связь шредингеровской формы уравнений Дирака с обычной. Поведение решений в случае конечных вращений

Пусть Ψ удовлетворяет обычному уравнению Дирака

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t} - i\varphi_0\Psi + \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + i\frac{mc}{h}\beta\Psi = 0, \tag{47}$$

в то время как ψ удовлетворяет уравнению (20) в сферических координатах

$$x_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad x_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad x_3 = r\cos\vartheta, \tag{48}$$

которое можно записать в виде

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t} - i\varphi_0\psi + \alpha_1\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\psi\right) + \alpha_2\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \alpha_3\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi\right) + \frac{imc}{h}\beta\psi = 0. \tag{49}$$

Переход от Ψ к ψ осуществляется с помощью унитарной матрицы $R(\vartheta, \varphi)$, зависящей от ϑ и φ. Ее можно представить в виде линейной комбинации спиновых матриц

$$s_1 = -i\alpha_2\alpha_3, \qquad s_2 = -i\alpha_3\alpha_1, \qquad s_3 = -i\alpha_1\alpha_2 \tag{50}$$

и единичной матрицы I с помощью соотношений [10]

$$R(\vartheta, \varphi) = e^{is_2\frac{\vartheta}{2}}e^{is_3\frac{\psi}{2}} = \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot I - i\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}s_1 + i\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot s_2 + i\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot s_3. \tag{51}$$

Очевидно, что R коммутирует с матрицей β. Кроме того, с помощью известных перестановочных соотношений для s_k нетрудно установить, что матрица, обратная R, получается, если поменять местами i и $-i$ и изменить последовательность экспоненциальных множителей:

$$R^{-1}(\vartheta, \varphi) = e^{-is_3\frac{\varphi}{2}}e^{-is_2\frac{\vartheta}{2}} = \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot I + i\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot s_1 - i\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot s_2 - i\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot s_3. \tag{51a}$$

[10] Представлением матрицы $R(\vartheta, \varphi)$ в виде произведения двух экспонент, которое окажется полезным и при доказательстве соотношений (53), (55), я обязан дружескому сообщению Шредингера.

Можно показать, что соответствие

$$\psi = R\Psi, \text{ или } \Psi = R^{-1}\psi, \tag{52}$$

позволяет перейти от уравнения (47) к уравнению (49), и наоборот. Это утверждение исходит из соотношений [11]

$$R^{-1}\alpha_1 R = \alpha_1 \cos\vartheta \cos\varphi + \alpha_2 \cos\vartheta \sin\varphi - \sigma_3 \sin\vartheta, \tag{53$_1$}$$

$$R^{-1}\alpha_2 R = -\alpha_1 \sin\varphi + \alpha_2 \cos\varphi, \tag{53$_2$}$$

$$R^{-1}\alpha_3 R = \alpha_1 \sin\vartheta \cos\varphi + \alpha_2 \sin\vartheta \sin\varphi + \alpha_3 \cos\vartheta, \tag{53$_3$}$$

следующих из (51).

Далее, с помощью соотношений

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos\vartheta \cos\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \sin\varphi\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \cos\vartheta \sin\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cos\varphi\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = -\sin\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r}$$

найдем из (53)

$$\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\frac{\partial}{\partial x_k} = (R^{-1}\alpha_1 R)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + (R^{-1}\alpha_2 R)\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + R^{-1}\alpha_3 R\frac{\partial}{\vartheta r}. \tag{54}$$

Наконец, для матрицы X, определяемой из соотношения

$$R^{-1}\alpha_1\frac{\partial R}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\left(R^{-1}\alpha_2\frac{\partial R}{\partial\varphi}\right) = R^{-1}XR,$$

[11] Чтобы проверить эти соотношения, а также приводимые ниже соотношения (55), можно воспользоваться представлением (24) матриц Дирака, в котором s_k имеют вид

$$\begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}.$$

Из (51), (51а) получаем

$$R = \begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & T\end{pmatrix},$$

где T — двухрядная матрица,

$$T = \begin{pmatrix}\cos\frac{\vartheta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}} & \sin\frac{\vartheta}{2}e^{\frac{-i\varphi}{2}}\\ -\sin\frac{\vartheta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}} & \cos\frac{\vartheta}{2}e^{\frac{-i\varphi}{2}}\end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\vartheta}{2}e^{\frac{-i\varphi}{2}} & -\sin\frac{\vartheta}{2}e^{\frac{-i\varphi}{2}}\\ \sin\frac{\vartheta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}} & \cos\frac{\vartheta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}\end{pmatrix}.$$

Соотношения (53) сводятся, таким образом, к более простым соотношениям, в которых матрица R заменена на T, а α_k — на σ_k.

имеем

$$X = \alpha_1 \frac{\partial R}{\partial \vartheta} R^{-1} + \frac{1}{\sin\vartheta} \alpha_2 \frac{\partial R}{\partial \varphi} R^{-1} = -\left(\frac{1}{2} \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \alpha_1 + \alpha_3\right). \qquad (55)$$

Шредингеровская форма (49) уравнений Дирака получается из их первоначальной формы (47) с помощью соотношений (54), (55) и подстановки (52).

Не останавливаясь на подробностях, упомянем лишь, что операторы момента импульса, введенные равенствами (21), позволяют получать уравнение (49) из обычных операторов момента импульса

$$P_1^0 = \frac{1}{i}\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2} s_1 \qquad (56)$$

(и компоненты, возникающие при циклической перестановке индексов) а уравнение (47) — при пересчете с помощью R-матрицы.

Теперь мы можем ответить на обсуждавшийся в § 1 вопрос о поведении решений уравнения (49) при конечных вращениях полярных осей, поскольку матрица R позволяет свести этот вопрос к рассмотрению известных свойств решений уравнения (47). Рассмотрим снова конечный поворот системы координат, характеризуемый тремя параметрами a. Новые координаты x_k' (или полярные углы ϑ', φ') будут функциями старых координат x_k (полярных углов ϑ, φ) и a. В случае сферически-симметричного потенциала $\varphi_0 = \varphi_0(r)$, если речь об обычной форме (47) уравнений Дирака, новое решение $X(x, a)$ получают из произвольного решения $\Psi(x)$ тех же уравнений, выраженного через x_k, во-первых, производя замену x на x' при неизменной функциональной зависимости Ψ от независимой переменной и выражая x' через x и a, и, во-вторых, выполняя зависящее от a преобразование S с *постоянными* коэффициентами:

$$X(x, a) = S^0(a)\,\Psi(x'). \qquad (57)$$

(Здесь, как обычно, мы не указываем в явном виде спиновые индексы.) Матрица $S^0(a)$ известна из теории спиноров и не требует дополнительных рассмотрений.

Соотношение

$$\chi(\vartheta, \varphi, a) = S(\vartheta, \varphi, a)\,\psi(\vartheta', \varphi'), \qquad (58)$$

устанавливающее соответствие между произвольным решением ψ уравнения (49) и новым решением X того же уравнения (49), мы получаем из формулы (52)

$$\Psi(x') = R^{-1}(\vartheta', \varphi')\,\psi(\vartheta', \varphi'), \quad \chi = R(\vartheta, \varphi)\,X.$$

Отсюда следует, что

$$S(\vartheta, \varphi, a) = R(\vartheta, \varphi)\,S^0(a)\,R^{-1}(\vartheta', \varphi'), \qquad (59)$$

где ϑ', φ' следует рассматривать как функции ϑ, φ и a.

Существенно, что $R(\vartheta, \varphi)$ согласно (51) есть функция половинного азимута φ и при обходе вокруг оси x_3 меняет свой знак. Поэтому

$S(\vartheta, \varphi, a)$ меняет знак, если (при фиксированном a) мы обойдем на поверхности сферы замкнутый контур, охватывающий одну из осей x_3 или x_3' (но не обе), в то время как при обходе по замкнутому контуру на поверхности сферы, содержащему внутри себя либо оба полюса ($\vartheta = 0$ и $\vartheta' = 0$), либо ни одного из них, S возвращается к своему начальному значению.

Поэтому, если, в соответствии с нашим критерием (§ 1), от физически допустимых решений требуется, чтобы функции $\chi(\vartheta, \varphi, a)$, определяемые формулами (58) и (59), можно было линейно выразить через исходные функции $\psi(\vartheta, \varphi)$, то последние должны быть двузначными функциями, а полюса $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, как указывалось в § 1,— их точками ветвления.

Поступила 22.XII 1938 г.

Цюрих,
Физический институт Высшей технической школы

О РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЯХ ПОЛЯ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ *[1]

(Совместно с М. Фирцем)

В ранее опубликованной работе один из нас [2] рассмотрел теорию частиц с произвольным спином больше $1\cdot\hbar$ в отсутствие внешнего поля. Оказалось, что переменные поля, которые позволяют дать описание частицы наряду с волновым уравнением

$$\Box A_{\dots} = \varkappa A_{\dots}, \tag{1}$$

где точки означают индексы,

$$\Box \equiv \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \qquad x_k = x, y, z, ict, \qquad \varkappa = \frac{mc}{\hbar}$$

(здесь m — масса частицы), должна еще удовлетворять некоторым дополнительным дифференциальным уравнениям. В случае целого спина эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial A_{ik\dots}}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

(предполагается, что по повторяющимся индексам проводится суммирование). Они означают, что 4-дивергенция симметричного тензорного поля $A_{ik\dots}$ равна нулю. Смысл этих дополнительных дифференциальных уравнений состоит в том, что кванты волнового поля могут иметь лишь спин, равный $f\cdot\hbar$, но отнюдь не $(f-1)\cdot\hbar, \dots$ Это необходимо, поскольку, как показывает более подробное рассмотрение, частицы с меньшими спинами могут иметь отрицательные энергии (например, в случае полуцелого спина они могут иметь отрицательные заряды), что физически недопустимо. Если уравнения типа (1) и (2) требуется обобщить на случай взаимодействия, например с электромагнитным полем, то следует обратить внимание на то, чтобы дополнительные члены в уравнениях не нарушали их совместность.

Оказалось, что для получения правильного обобщения целесообразно прежде всего вывести уравнения в отсутствие внешнего поля из вариационного принципа. Затем этот вариационный принцип можно дополнить так, чтобы получить возможность описания взаимодействия с другими полями. Этот способ позволяет построить математически корректное обобщение

---

* *Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld.* (Mit. M. Fierz.).— Helv. phys. acta, 1939, 12, 297—300.

[1] Более подробная работа на эту тему будет опубликована в Proc. Roy. Soc. (См. Proc. Roy. Soc. London, 1939, **A173**, 211. Русск. пер. см. с. 318.—*Ред.*).

[2] *M. Fierz.* Helv. phys. acta, 1939, 12, 3.

теории в отсутствие внешнего поля. Чтобы из вариационного принципа вместе с волновым уравнением можно было вывести и дополнительные условия, необходимо наряду с переменными поля, отвечающими спину f, ввести в качестве вспомогательных величин и такие переменные поля, которые отвечают меньшему спину. Затем по всем величинам, входящим в интеграл действия, независимо проводится варьирование. Вариационный принцип выбирается так, чтобы получающиеся из него уравнения влекли за собой не только выполнение дополнительных уравнений, но и тождественное обращение в нуль вспомогательных величин. При каждом значении спина f можно указать такой вариационный принцип, что число необходимых вспомогательных величин будет расти как f^2. При больших значениях f теория сильно усложняется. Если теперь ввести внешние поля, то дополнительные условия изменятся и вспомогательные величины не будут более обращаться в нуль. Однако дополнительных условий (в смысле канонического формализма) всегда остается столько, что число независимых решений и при наличии внешних полей так же, как и в их отсутствие, будет равно $2f + 1$.

Поясним предлагаемый метод на примере теории для спина $2\hbar$. Выберем функцию Лагранжа L в виде

$$L = \varkappa^2 A_{ik} A_{ik} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} - 2\frac{\partial A_{rk}}{\partial x_r}\frac{\partial A_{sk}}{\partial x_s} - \frac{3}{4}\varkappa^2 C^2 - \\ - \frac{3}{8}\frac{\partial C}{\partial x_l}\frac{\partial C}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{rk}}{\partial x_r}\frac{\partial C}{\partial x_k}.$$

Тензор A_{ik} симметричен по i и k и имеет след, равный нулю:

$$\sum_{k=1}^{4} A_{kk} = 0,$$

C — скалярное вспомогательное поле. Варьируя

$$\delta \int L d^4x = 0$$

по A_{ik} и C, получаем уравнения:

$$2\varkappa^2 A_{ik} - 2\Box A_{ik} + 2\left\{\frac{\partial^2 A_{sk}}{\partial x_i \partial x_s} + \frac{\partial^2 A_{si}}{\partial x_s \partial x_k} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\frac{\partial^2 A_{sr}}{\partial x_s \partial x_r}\right\} - \\ - \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\delta_{ik}}{4}\Box C = 0, \qquad (3)$$

$$-\frac{3}{2}\varkappa^2 C + \frac{3}{4}\Box C - \frac{\partial^2 A_{sr}}{\partial x_s \partial x_r} = 0. \qquad (4)$$

С помощью этих уравнений можно показать, что C и $\partial A_{ik}/\partial x_i$ должны обратиться в нуль. Образуем, например, 4-дивергенцию выражения (3) по индексу i. Тогда

$$2\varkappa^2 \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial^2 A_{sr}}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{3}{4}\Box C\right\} = 0. \qquad (5)$$

Приняв во внимание уравнение (4), с помощью (5) получим

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} - \frac{3}{4}\frac{\partial C}{\partial x_k} = 0. \tag{6}$$

Если это уравнение продифференцировать по x_k и просуммировать по k, то

$$\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{3}{4}\Box C = 0.$$

Сравнив полученное уравнение с (4), найдем, что $C = 0$, а из уравнения (6) получим дополнительное условие

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} = 0.$$

Если в L вместо оператора $\partial/\partial x_k$ подставить оператор $\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{ie}{\hbar c}\Phi_k$, где Φ_k означает векторный потенциал электромагнитного поля, то приходим к теории для частиц со спином $2\hbar$ в электромагнитном поле.

Если положить массу покоя $\varkappa$ $(\hbar/c)$ равной нулю, то получится теория для частиц со спином $2\hbar$ и нулевой массой покоя. Если положить

$$\gamma_{ik} = A_{ik} + \frac{1}{4}\delta_{ik}C, \qquad \gamma \equiv \sum_{k=1}^{4}\gamma_{kk} = C,$$

то уравнения поля ($\varkappa = 0$) можно записать в виде:

$$-\Box\gamma_{ik} - \frac{\partial^2\gamma}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2\gamma_{rk}}{\partial x_r \partial x_i} + \frac{\partial^2\gamma_{ri}}{\partial x_r \partial x_k} + \frac{1}{2}\delta_{ik}\left\{\Box\gamma - \frac{\partial^2\gamma_{rs}}{\partial x_r \partial x_s}\right\} = 0.$$

$$\Box\gamma - \frac{\partial^2\gamma_{rs}}{\partial x_r \partial x_s} = 0.$$

Эти уравнения тождественны уравнениям, выведенным Эйнштейном [3] для слабых гравитационных полей. Эйнштейн полагал

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \gamma_{ik}$$

и отбрасывал величины порядка $(\gamma_{ik})^2$. Таким образом, кванты гравитационного поля имеют спин $2\hbar$.

---

[3] *A. Einstein.* Berl. Ber., 1916, S. 688; 1918, S. 154. (Русск. пер.: *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. 1. М., «Наука», 1965, с. 514, 631.— *Ред.*).

О РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ *

(Совместно с М. Фирцем)

§ 1. Введение

Исследования Дирака [1] по релятивистским волновым уравнениям для частиц с произвольным спином недавно были продолжены одним из нас [2]. В отсутствие внешнего поля удалось провести схему вторичного квантования и получить выражения для вектора тока и тензора энергии-импульса. В настоящей статье эти соображения будут обобщены на случай, когда имеется внешнее электромагнитное поле, но сначала нас не будет интересовать вторичное квантование, и мы ограничимся рассмотрением c-числовой теории.

Трудность проблемы видна из того, что прямой метод учета взаимодействия с электромагнитным полем, предложенный Дираком [1], приводит к противоречивым уравнениям, если спин больше 1. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнения Дирака для частицы со спином $^3/_2$, которые в отсутствие внешнего поля можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varkappa b_{\gamma}^{\dot\alpha\dot\beta} &= p^{\dot\alpha\rho} a_{\gamma\rho}^{\dot\beta} = p^{\dot\beta\rho} a_{\gamma\rho}^{\dot\alpha}, \\ \varkappa a_{\alpha\beta}^{\dot\gamma} &= p_{\alpha\dot\rho} b_{\beta}^{\dot\rho\dot\gamma} = p_{\beta\dot\rho} b_{\alpha}^{\dot\rho\dot\gamma}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_{\alpha\beta}^{\dot\gamma} = a_{\beta\alpha}^{\dot\gamma}$ и $b_{\gamma}^{\dot\alpha\dot\beta} = b_{\gamma}^{\dot\beta\dot\alpha}$ — симметричные спиноры.

Дирак предпринял попытку учесть внешнее электромагнитное поле, заменяя спинор $p_{\alpha\dot\rho}$ оператором $\Pi_{\alpha\dot\rho}$, который получается из этого спинора при подстановке вместо $-i\,(\partial/\partial x_k)$ оператора $-i\dfrac{\partial}{\partial x_k} - (e\varphi_k/hc)$, где φ_k — электромагнитные потенциалы. Величины $\Pi_{\alpha\dot\rho}$ — некоммутирующие между собой операторы, удовлетворяющие соотношениям (см. приложение)

$$\Pi_{\dot\alpha\beta}\Pi^{\dot\gamma\delta} - \Pi^{\dot\gamma\delta}\Pi_{\dot\alpha\beta} = \delta_{\dot\alpha}^{\dot\gamma} f_{\beta}^{\delta} + \delta_{\beta}^{\delta} f_{\dot\alpha}^{\dot\gamma}, \tag{2.1}$$

где $f_{\alpha\beta}$ и $f_{\dot\alpha\dot\beta}$ — два симметричных спинора ($f_{\alpha}^{\alpha} = f_{\dot\alpha}^{\dot\alpha} = 0$), ассоциированных с антисимметричным тензором поля f_{ik}. Производя свертку соотношения (2.1), получаем

$$\Pi_{\alpha\dot\rho}\Pi^{\dot\rho\beta} - \Pi^{\dot\rho\beta}\Pi_{\alpha\dot\rho} = 2f_{\alpha}^{\beta}.$$

---

* *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field.* (With M. Fierz.)— Proc. Roy. Soc. London, 1939, A173, 211—232.

[1] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc., 1936, A155, 447.

[2] *M. Fierz.* Helv. phys. acta, 1939, 12, 3. Далее цитируется как «А».

С другой стороны, так же, как и в случае, когда внешнее поле отсутствует,

$$\Pi_{\alpha\dot{\rho}}\Pi^{\dot{\rho}\beta} + \Pi^{\dot{\rho}\beta}\Pi_{\alpha\dot{\rho}} = -2\Pi^2\delta_\alpha^\beta, \tag{2.2}$$

и, таким образом,

$$\Pi_{\alpha\dot{\rho}}\Pi^{\dot{\rho}\beta} = -\Pi^2\delta_\alpha^\beta + f_\alpha^\beta. \tag{2.3}$$

Однако из предложенных Дираком уравнений

$$\varkappa b_\gamma^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \Pi^{\dot{\alpha}\rho}a_{\gamma\rho}^{\dot{\beta}} = \Pi^{\dot{\beta}\rho}a_{\gamma\rho}^{\dot{\alpha}}, \tag{3.1}$$

$$\varkappa a_{\alpha\beta}^{\dot{\gamma}} = \Pi_{\alpha\dot{\rho}}b_\beta^{\dot{\gamma}\dot{\rho}} = \Pi_{\beta\dot{\rho}}b_\alpha^{\dot{\gamma}\dot{\rho}} \tag{3.2}$$

следует, что

$$\Pi_{\alpha\dot{\rho}}\Pi^{\dot{\rho}\sigma}a_{\beta\sigma}^{\dot{\gamma}} = \varkappa\Pi_{\alpha\dot{\rho}}b_\beta^{\dot{\rho}\dot{\gamma}} = \varkappa^2 a_{\alpha\beta}^{\dot{\gamma}}.$$

Тот же результат вытекает и из (2.3):

$$-\Pi^2 a_{\alpha\beta}^{\dot{\gamma}} + f_\alpha^\sigma a_{\beta\sigma}^{\dot{\gamma}} = \varkappa^2 a_{\alpha\beta}^{\dot{\gamma}}.$$

Поскольку правая часть симметрична относительно α и β, отсюда следует, что спинорное поле $a_{\alpha\beta}^{\dot{\gamma}}$ должно удовлетворять дополнительному условию

$$f_\alpha^\sigma a_{\alpha\beta}^{\dot{\gamma}} = f_\beta^\sigma a_{\alpha\sigma}^{\dot{\gamma}},$$

или

$$f^{\rho\sigma}a_{\rho\sigma}^{\dot{\gamma}} = 0; \tag{3.3}$$

однако в общем случае это условие не может выполняться одновременно с другими уравнениями.

На первый взгляд можно было бы надеяться, что это препятствие удастся обойти, заменив уравнения (3.1), (3.2) более слабыми условиями:

$$2\varkappa b_\gamma^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \Pi^{\dot{\alpha}\rho}a_{\gamma\rho}^{\dot{\beta}} + \Pi^{\dot{\beta}\rho}a_{\gamma\rho}^{\dot{\alpha}}, \tag{4.1}$$

$$2\varkappa a_{\alpha\beta}^{\dot{\gamma}} = \Pi_{\alpha\dot{\rho}}b_\beta^{\dot{\gamma}\dot{\rho}} + \Pi_{\beta\dot{\rho}}b_\alpha^{\dot{\gamma}\dot{\rho}}. \tag{4.2}$$

Однако следует заметить, что даже в отсутствие внешнего поля такая система уже не приводит к волновому уравнению второго порядка. (Более подробное рассмотрение показывает, что эти уравнения помимо частиц со спином $^3/_2$ и массой покоя $\varkappa$ описывают также частицы со спином $^1/_2$ и массой покоя $2\varkappa$.) Кроме того, выражение для полного заряда перестает быть положительно-определенным, что делает невозможным квантование в соответствии с принципом запрета (с другой стороны, при квантовании, отвечающем статистике Бозе, полная энергия в случае полуцелых спинов не положительна).

Поэтому от предложенной модификации пришлось отказаться. Уравнения (1) были оставлены для случая, когда внешнее поле отсутствует.

При этом возникла проблема: какие дополнительные члены, помимо замены $p_{\alpha\dot{\rho}}$ на $\Pi_{\alpha\dot{\rho}}$, следует включить в эти уравнения, чтобы они оставались совместными и при наличии внешнего поля?

Вполне аналогичная проблема возникает и для целых спинов. Например, уравнения поля для спина 2, содержащие, согласно «А», симметричный тензор A_{ik} со следом $\sum_i A_{ii}$, равным нулю, имеют вид:

$$\Box A_{ik} = \varkappa^2 A_{ik}, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} = 0. \tag{5.2}$$

Вторая группа условий необходима, если полная энергия должна быть положительно-определенной. Действительно, если бы этих условий не было, то волны, состоящие из одной-единственной компоненты типа A_{4i}, приводили бы к отрицательным значениям полной энергии. С другой стороны, уравнения, получающиеся из (5.1), (5.2) при замене $\partial/\partial x_k$ на $(\partial/\partial x_k)$— — $(ie\varphi_k)/hc)$, несовместны, поскольку операторы $\Pi^2 \equiv \sum_k \Pi_k^2$ и Π_k не коммутируют $[\Pi_k = -i\,(\partial/\partial x_k) - (e\varphi_k/hc)]$.

Мы не будем предпринимать попыток прямого решения проблемы вывода дополнительных членов, необходимых для совместности уравнений. Вместо этого мы воспользуемся для ее решения одним искусственным приемом. Он состоит во введении вспомогательных тензоров или спиноров меньшего по сравнению с исходными ранга (для спина $^3/_2$ это будут просто спиноры c_α и $d_{\dot{\alpha}}$; для спина 2 — скаляр C) и в выводе всех уравнений из вариационного принципа без обращения к дополнительным условиям. При надлежащем выборе численных коэффициентов в функции Лагранжа из уравнений поля (выведенных из вариационного принципа) будет следовать, что в отсутствие внешнего поля вспомогательные величины обращаются в нуль и дополнительные условия (5.2) или (1) выполняются автоматически [ср. с уравнениями (10), (11) из § 2].

Разумность предлагаемой процедуры можно усмотреть из того, что для массы покоя, обращающейся в нуль, наши уравнения для случая спина, равного *2*, переходят в уравнения общей теории относительности для слабых гравитационных полей (т. е. $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$; члены, имеющие относительно $\gamma_{\mu\nu}$ порядок выше первого, отбрасываются), а градиентные преобразования совпадают с теми изменениями, которые претерпевают $\gamma_{\mu\nu}$ под действием бесконечно малых преобразований координат (см. § 6).

Хотя ниже мы подробно останавливаемся лишь на взаимодействии частиц и внешнего электромагнитного поля, взаимодействие с другими частицами, которые могут поглощаться или испускаться, можно было бы сформулировать аналогичным образом. Например, взаимодействие с новым скалярным полем ψ можно было бы учесть, вводя в функцию Лагранжа дополнительные члены, получающиеся из приводимых ниже членов функции Лагранжа, содержащих множитель $\varkappa^2$, при замене $\varkappa^2$ на ψ. С другой стороны, важно, чтобы между состояниями (собственными функ-

циями) с внешним полем и без него можно было установить взаимно-однозначное соответствие. Это требование эквивалентно утверждению о том, что число условий, которым в *некоторый момент времени* должны удовлетворять поле и вспомогательные переменные (а для целых спинов и их производные по времени), не должно уменьшаться при включении внешнего поля. В противном случае, как показано в приложении 1, на частном примере для частиц со спином 1, при медленном стремлении внешнего поля к нулю могут возникать сингулярности. Однако в основной части текста требование о сохранении дополнительных условий и при включении внешнего поля всегда выполняется.

Это требование, по-видимому, существенно и для вторичного квантования — вопроса, на котором мы подробно не останавливаемся. Именно оно позволяет, исходя из перестановочных соотношений, указанных в «А», разлагать коммутаторы всех переменных поля по степеням заряда e. Следует заметить, что для частиц со спином больше 1 плотности заряда, взятые в различных точках, не будут коммутировать между собой. Более подробно исследование этого обстоятельства, проводящего резкое различие между этим случаем и значениями спина, равными 0, $^1/_2$, 1 [ср. «А», введение], было бы желательным.

Как нетрудно видеть из последнего параграфа настоящей работы (§ 8), наша цель заключалась не столько в том, чтобы вывести наиболее общие из числа возможных релятивистские уравнения для частиц с высшими спинами, сколько в том, чтобы показать, что при нынешнем состоянии теории нельзя исключить существование частиц со спином, бóльшим 1, хотя для таких частиц теория становится значительно более сложной, чем для частиц с меньшими значениями спина. В этой связи следует заметить, что нам не удалось обобщить уравнения поля, которые в обозначениях работы «А» отвечают $k \neq l$, или векторам тока $s^{(q)}$ для $q > 1$ [ср. «А», I, II, III и (**5**.6)].

I. СПИН 2

§ 2. Вывод уравнений в отсутствие внешнего поля из вариационного принципа

В качестве примера теории волнового поля, отвечающего частицам со спином, большим 1, и взаимодействующего с другими полями, рассмотрим прежде всего теорию для спина 2.

Как показано в «А», в отсутствие внешних полей такое поле описывается симметричным тензором A_{ik} второго ранга, след которого равен нулю, удовлетворяющим волновому уравнению

$$\Box A_{ik} = \varkappa^2 A_{ik} \tag{5.1}$$

и дополнительному условию

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} = 0. \tag{5.2}$$

Здесь индексы i, k пробегают значения от 1 до 4, (x_i) означает (x, y, z, ict), а $\square \equiv \nabla^2 - (1/c^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Предполагается, что по индексам, встречающимся дважды, производится суммирование. Можно показать, что полная энергия поля положительна лишь в том случае, если выполняется дополнительное условие (5.2); иначе говоря, если вектор $\partial A_{ik}/\partial x_i$ не обращается в нуль, то он описывает частицы с отрицательной энергией. Если мы вводим внешние поля, то это следует делать так, чтобы после их выключения условие (5.2) вновь выполнялось и, следовательно, чтобы не возникало новых частиц с отрицательной энергией.

Для получения правильного обобщения уравнений (5.1), (5.2) на случай внешних полей будем искать вариационный принцип

$$\delta \int L d\Omega = 0,$$

из которого можно было бы вывести (5.1) и (5.2). Для этого полезно ввести вспомогательное скалярное поле C, от которого, по предположению, зависит L. Поле C следует варьировать независимо от A_{ik}. Введение C является искусственным приемом, позволяющим при варьировании вывести дополнительные условия (5.2) из функции Лагранжа. Для простоты предположим, что поля A_{ik} и C «вещественны», т. е.

$$A^*_{ik} = A_{ik}, \quad C^* = C.$$

[Здесь тензор $A^*_{ik\ldots l}$, сопряженный с тензором $A_{ik\ldots l}$, равен $(-1)^n \bar{A}_{ik\ldots l}$, где n — число раз, которое «4» встречается среди индексов $i, k, \ldots, l$, а черта сверху означает «комплексное сопряжение». «Вещественные» тензоры — это тензоры, для которых $A^*_{ik\ldots l} = A_{ik\ldots l}$.]

Функцию L выберем в следующей форме:

$$L = \varkappa^2 A_{ik} A_{ik} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + a_1 \frac{\partial A_{rk}}{\partial x_r}\frac{\partial A_{sk}}{\partial x_s} + a_2 \varkappa^2 C^2 + \\ + a_3 \frac{\partial C}{\partial x_l}\frac{\partial C}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{rk}}{\partial x_r}\frac{\partial C}{\partial x_k}. \qquad (6)$$

Разумеется, тензор A_{ik} симметричен и удовлетворяет условию $A_{ii} = 0$, что следует помнить при варьировании. Варьируя A_{ik} и C, получаем следующие уравнения:

$$2\varkappa^2 A_{ik} - 2\square A_{ik} - a_1\left\{\frac{\partial^2 A_{rk}}{\partial x_r \partial x_i} + \frac{\partial^2 A_{ri}}{\partial x_r \partial x_k} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial x_r \partial x_s}\right\} - \\ - \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{4}\delta_{ik}\square C = 0, \qquad (7.1)$$

$$2a_2\varkappa^2 C - 2a_3 \square C - \frac{\partial^2 A_{rk}}{\partial x_r \partial x_k} = 0. \qquad (7.2)$$

Выберем теперь три константы a_1, a_2, a_3 так, чтобы $\partial A_{ik}/\partial x_i$ и C вследствие уравнений (7.1) и (7.2) были бы равны нулю. Для этого продифференци-

руем (7.1) по x_i и получим

$$2\varkappa^2 \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} = 2\Box \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} + a_1 \left\{\Box \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 A_{si}}{\partial x_i \partial x_s \partial x_k}\right\} + \frac{3}{4}\Box \frac{\partial C}{\partial x_k}. \qquad (8)$$

Если теперь положить $a_1 = -2$, то правая часть будет содержать лишь производные скаляра C и $\partial^2 A_{ik}/\partial x_i \partial x_k$. Обозначим для краткости последнюю величину через A:

$$\frac{\partial^2 A_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} \equiv A.$$

Тогда уравнение (8) примет вид

$$2\varkappa^2 \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} = -\frac{\partial A}{\partial x_k} + \frac{3}{4}\Box \frac{\partial C}{\partial x_k}. \qquad (8')$$

Это уравнение означает, что вектор $\partial A_{ik}/\partial x_i$ является градиентом некоторого скаляра и поэтому может описывать лишь частицы с нулевым спином.

Продифференцируем теперь (8) по x_k и получим вместе с (7.2) два уравнения:

$$2\varkappa^2 A + \Box A - \frac{3}{4}\Box\Box C = 0, \qquad (9)$$

$$-A + 2a_2\varkappa^2 C - 2a_3 \Box C = 0. \qquad (7.2')$$

Это — система линейных однородных уравнений для A и C. Выберем a_2 и a_3 так, чтобы операторный детерминант этой системы всегда был отличен от нуля. Тогда A и C обратятся в нуль. Из (8) следует, что выражения $\partial A_{ik}/\partial x_i$ также обратятся в нуль.

Для определителя мы имеем выражение

$$4a_2\varkappa^4 + 2\varkappa^2(a_2 - 2a_3)\Box - \left(2a_3 + \frac{3}{4}\right)\Box\Box. \qquad (10)$$

Если положить

$$a_3 = -\frac{3}{8}, \qquad 2a_3 = a_2 = -\frac{3}{4},$$

то определитель будет равен $-3\varkappa^4$ и, так как масса покоя $\varkappa$, по предположению, отлична от нуля, в нуль никогда обращаться не будет. Следовательно,

$$A = 0, \qquad C = 0, \qquad \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} = 0.$$

Итак, мы получили функцию Лагранжа

$$L = \varkappa^2 A_{ik}A_{ik} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} - 2\frac{\partial A_{rk}}{\partial x_r}\frac{\partial A_{sk}}{\partial x_s} - \frac{3}{4}\varkappa^2 C - \frac{3}{8}\frac{\partial C}{\partial x_l}\frac{\partial C}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{rk}}{\partial x_r}\frac{\partial C}{\partial x_k} \qquad (11)$$

и соответствующие уравнения поля

$$2\varkappa^2 A_{ik} - 2\Box A_{ik} + \left\{\frac{\partial^2 A_{sk}}{\partial x_s \partial x_i} + \frac{\partial^2 A_{si}}{\partial x_s \partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial x_r \partial x_s}\right\} - \\ - \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{4}\delta_{ik}\Box C = 0, \qquad (12.1)$$

$$-\frac{3}{2}\varkappa^2 C + \frac{3}{4}\Box C - \frac{\partial^2 A_{rk}}{\partial x_r \partial x_k} = 0, \qquad (12.2)$$

из которых можно вывести уравнения (5.1) и (5.2), а также условие $C = 0$.

Поскольку нас интересует влияние внешних полей на поле A_{ik}, удобно воспользоваться обозначениями, в которых время выделено из остальных координат. Рассмотрим с этой точки зрения уравнения (12.1) и (12.2).

Поле в этом примере отвечает спину $f = 2$ и поэтому при заданных направлениях и частоте дает $2f + 1 = 5$ состояний. Дифференциальные уравнения для полей A_{ik} и C являются уравнениями второго порядка. Следовательно, в любой данный момент времени всем точкам пространства можно приписать значения пяти компонент поля A_{ik} и их производных по времени. Так как поле A_{ik} имеет всего $(f + 1)^2 = 9$ компонент, то вместе с одной компонентой C остается пять компонент и их первых производных по времени, которые нельзя задавать произвольно. Иначе говоря, должно быть десять вспомогательных условий [3], содержащих, быть может, высшие производные по пространственным переменным, но лишь первые производные по времени, из которых можно вычислить остальные десять величин, коль скоро пять компонент A_{ik} и их производные по времени заданы. Эти условия можно вывести из уравнений (12.1) и (12.2).

Следующие уравнения следует считать вспомогательными условиями в указанном выше смысле:

$$C = 0, \qquad (13.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_k} = 0. \qquad (13.2)$$

Рассмотрим уравнение (12.1) для $i \neq 4$, $k = 4$. Чтобы записать уравнение в новых обозначениях, введем греческие индексы α, β, ..., которые принимают значения от 1 до 3. Тогда

$$2\varkappa^2 A_{\alpha 4} - 2\frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2} A_{\alpha 4} + 2\frac{\partial^2 A_{\beta 4}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + 2\frac{\partial^2 A_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta \partial x_4} + 2\frac{\partial^2 A_{44}}{\partial x_\alpha \partial x_4} - \\ - \frac{\partial^2 C}{\partial x_\alpha \partial x_4} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \qquad (13.3)\ldots(13.5)$$

[3] Мы хотели бы обратить внимание на то, что термин «дополнительные условия» мы употребляем в смысле уравнений, не вытекающих из вариационного принципа, с помощью которого получены основные уравнения (см. § 2, 4), в то время как термин «вспомогательные условия» относится к уравнениям, которые следуют из равенства нулю вариации, но не уменьшают числа степеней свободы.

Эти уравнения дают еще три условия, поскольку вторые производные от $A_{\alpha 4}$ по времени выпадают. Шестое условие мы получим, сложив (4, 4)-компоненты уравнений (12.1) и (12.2):

$$2\varkappa^2 A_{44} - 2\frac{\partial^2 A_{44}}{\partial x_\beta^2} - \frac{\partial^2 A_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_\beta^2} - \frac{3}{2}\varkappa^2 C = 0. \qquad (13.6)$$

Дифференцируя (12.1) по x_i, находим

$$2\varkappa^2 \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} + \frac{\partial^3 A_{is}}{\partial x_k \partial x_i \partial x_s} - \frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial x_k}\Box C = 0.$$

Комбинируя этот результат с (12.2), получаем

$$2\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} - \frac{3}{2}\frac{\partial C}{\partial x_k} = 0. \qquad (13.7)\ldots(13.10)$$

Последнее уравнение справедливо при $k = 1, \ldots, 4$. Таким образом, у нас имеется десять вспомогательных условий.

§ 3. Включение взаимодействий

Теория в том виде, как она излагалась до сих пор, эквивалентна теории, изложенной в «А». Вводя соответствующие члены в функцию Лагранжа, мы можем включить взаимодействия с другими полями. Однако следует позаботиться о том, чтобы не нарушить вспомогательных условий. Нарушение их означало бы, что размерность совокупности состояний изменяется при «включении» внешних полей, причем эти новые состояния, как будет показано на примере в приложении, при «включении» внешнего поля приводят к появлению сингулярностей. Мы рассмотрим здесь случай внешнего электромагнитного поля.

Разумеется, в этом случае поля́ A_{ik} и C следует считать комплексными. Пусть φ_k — 4-потенциал электромагнитного поля, e — заряд частиц. Тогда

$$i\Pi_k = \frac{}{\partial x_k} - \frac{ie}{hc}\varphi_k$$

и

$$f_{ik} = \Pi_i \Pi_k - \Pi_k \Pi_i = \frac{ie}{hc}\left\{\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right\}.$$

Выберем L в следующей форме:

$$L = \varkappa^2 A_{ik}^* A_{ik} + \Pi_l A_{ik} \Pi_l^* A_{ik}^* - 2\Pi_r A_{rk} \Pi_s^* A_{sk}^* + f_{ir} A_{rk} A_{ik}^* +$$
$$+ \frac{1}{2}\{\Pi_r A_{rk} \Pi_k^* C^* + \Pi_r^* A_{rk}^* \Pi_k C\} - \frac{3}{4}\varkappa^2 C^* C - \frac{3}{8}\Pi_l C \Pi_l^* C^*. \qquad (14)$$

Член $f_{ir} A_{rk} A_{ik}^*$ (пропорциональный напряженностям поля) был добавлен лишь потому, что в результате такой операции вывод вспомогательных условий становится особенно простым, но отнюдь не является необходимым.

Интегрируя по частям, мы можем представить функцию Лагранжа и в другом виде, а именно:

$$L = \varkappa^2 A^*_{ik}A_{ik} + \frac{1}{2}\{\Pi_l A_{ik} - \Pi_i A_{lk}\}\{\Pi^*_l A^*_{ik} - \Pi^*_i A^*_{lk}\} - \Pi_r A_{rk}\Pi^*_s A^*_{sk} - \\ - \frac{3}{4}\varkappa^2 C^* C + \frac{1}{2}\{\Pi_r A_{rk}\Pi^*_k C^* + \Pi^*_r A^*_{rk}\Pi_k C\} - \frac{3}{8}\Pi_l C \Pi^*_l C^*.$$

Варьируя по A^*_{ik} и C^*, получаем уравнения

$$2\varkappa^2 A_{ik} + 2\Pi^2 A_{ik} - 2\left\{\Pi_i\Pi_s A_{sk} + \Pi_k\Pi_s A_{si} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\Pi_r\Pi_s A_{rs}\right\} + \\ + f_{ir}A_{rk} + f_{kr}A_{ri} + \frac{1}{2}\{\Pi_i\Pi_k + \Pi_k\Pi_i\}C - \\ - \frac{1}{4}\delta_{ik}\Pi^2 C = 0, \tag{15.1}$$

$$-\frac{3}{2}\varkappa^2 C - \frac{3}{4}\Pi^2 C + \Pi_r\Pi_s A_{rs} = 0. \tag{15.2}$$

Покажем теперь, что десять вспомогательных условий следуют из этих уравнений. Три таких условия мы получим из (15.1), положив $i \neq 4$, $k = 4$:

$$2\varkappa^2 A_{\alpha 4} + 2\Pi^2_\beta A_{\alpha 4} - 2\Pi_\alpha\Pi_\beta A_{4\beta} - 2\Pi_\alpha\Pi_4 A_{44} - 2\Pi_4\Pi_\beta A_{\beta\alpha} + \\ + f_{\alpha r}A_{r4} + f_{4\beta}A_{\beta\alpha} + \Pi_\alpha\Pi_4 C + f_{4\alpha}C = 0$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3; \quad r = 1, 2, 3, 4). \qquad (16.3)\ldots(16.5)$$

Складывая (4,4)-компоненты уравнений (15.1) и (15.2), находим

$$2\varkappa^2 A_{44} + 2\Pi^2_\beta A_{44} + 2\Pi_\alpha\Pi_\beta A_{\alpha\beta} - \Pi^2_\alpha C - \frac{3}{4}\varkappa^2 C = 0. \tag{16.6}$$

Применяя оператор Π_k к уравнению (15.1) и используя (15.2), получаем еще четыре условия:

$$2\varkappa^2\Pi_i A_{ik} + 3f_{il}\Pi_l A_{ik} + \frac{1}{i}\frac{\partial f_{il}}{\partial x_l}A_{ik} - 3f_{ik}\Pi_s A_{si} - \frac{1}{i}\frac{\partial f_{rk}}{\partial x_i}A_{ri} - \\ - \frac{3}{2}\varkappa^2\Pi_k C + \frac{3}{2}f_{lk}\Pi_l C + \frac{1}{i}\frac{\partial f_{lk}}{\partial x_l}C = 0$$

$$(k = 1, 2, 3, 4). \qquad (16.7)\ldots(16.10)$$

Применяя Π_k к этим уравнениям еще раз, имеем:

$$2\varkappa^2\Pi_i\Pi_k A_{ik} - \frac{3}{2}\varkappa^2\Pi^2 C + \frac{3}{i}\frac{\partial f_{il}}{\partial x_k}\Pi_l A_{ik} - \frac{3}{i}\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k}\Pi_l A_{li} - \\ - 3f_{ik}f_{kl}A_{li} + \Pi_k\frac{1}{i}\frac{\partial f_{il}}{\partial x_l}A_{ik} - \Pi_k\frac{1}{i}\frac{\partial f_{rk}}{\partial x_l}A_{rl} + \\ + \frac{3}{2i}\frac{\partial f_{lk}}{\partial x_k}\Pi_l C + \frac{3}{4}f_{lk}f_{kl}C + \Pi_k\frac{1}{i}\frac{\partial f_{lk}}{\partial x_l}C = 0.$$

Отсюда с помощью (15.2) мы получаем вспомогательное условие

$$3\varkappa^4 C + \frac{2}{i}\frac{\partial f_{il}}{\partial x_k}\Pi_l A_{ik} - \frac{2}{i}\frac{\partial f_{il}}{\partial x_l}\Pi_k A_{ik} - 2\frac{\partial^2 f_{il}}{\partial x_l \partial x_k}A_{ik} - \\ - 3 f_{ik} f_{kl} A_{il} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f_{lk}}{\partial x_k}\Pi_l C + \frac{3}{4} f_{kl} f_{lk} C = 0. \qquad (16.1)$$

Десятое условие находим, дифференцируя (16.1) по времени. При этом получается выражение, содержащее вторые производные от C, $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha 4}$ и A_{44} по времени; но их можно исключить, если воспользоваться уравнениями (15.1), (15.2) и продифференцированными по времени уравнениями (16.3) — (16.6). Мы не будем приводить этих весьма громоздких выкладок, а ограничимся лишь утверждением о том, что десять вспомогательных условий существуют.

Выражение для вектора электрического заряда-тока получим, взяв производные от L по 4-потенциалу:

$$s_k = \frac{e}{hc}\Big[i\{B_{[ki]l}\overset{*}{A}_{ie} - \overset{*}{B}_{[ki]l}A_{il}\} + \overset{*}{A}_{lk}\Pi_r A_{rl} + A_{lk}\overset{*}{\Pi}_r \overset{*}{A}_{rl} - \\ - \frac{1}{2}\{C^*\Pi_r A_{rk} + C\overset{*}{\Pi}_r \overset{*}{A}_{rk} + \overset{*}{A}_{kr}\Pi_r C + A_{kr}\overset{*}{\Pi}_r C^*\} + \\ + \frac{3}{8}\{C^*\Pi_k C + C\overset{*}{\Pi}_k C\}\Big],$$

где $B_{[ik]l} \equiv i(\Pi_k A_{il} - \Pi_i A_{kl})$. В отсутствие внешнего поля Π_k переходит в $-i(\partial/\partial x_k)$, вектор заряда-тока принимает вид, указанный в «А». Если в L вычеркнуть член, пропорциональный напряженностям поля, то получающееся при этом выражение будет отлично от только что выписанного даже в том случае, когда внешнее поле отсутствует, а именно:

$$\bar{s}_k = \frac{e}{ihc}\left\{\overset{*}{A}_{il}\frac{\partial A_{il}}{\partial x_k} - A_{il}\frac{\partial \overset{*}{A}_{il}}{\partial x_k}\right\}.$$

Это показывает, что выражение для тока в предельном случае отсутствия внешнего поля не единственно — обстоятельство, неожиданно возникающее уже для спина 1.

II. СПИН $^3/_2$

§ 4. Теория для случая, когда внешнее поле отсутствует

В «А» было показано, что свободное волновое поле, отвечающее частицам со спином $^3/_2$, описывается спинорами

$$a^{\dot\alpha}_{\beta\gamma} = a^{\dot\alpha}_{\gamma\beta}, \qquad b^{\dot\alpha\dot\beta}_{\gamma} = b^{\dot\beta\dot\alpha}_{\gamma},$$

которые переходят друг в друга при отражениях. Они удовлетворяют урав-

нениям

$$p^{\dot\beta\rho} a^{\dot\alpha}_{\rho\gamma} + p^{\dot\alpha\rho} a^{\dot\beta}_{\rho\gamma} = 2\varkappa b^{\dot\alpha\dot\beta}_{\gamma}, \qquad p_{\alpha\dot\rho} b^{\dot\rho\dot\gamma}_{\beta} + p_{\beta\dot\rho} b^{\dot\rho\dot\gamma}_{\alpha} = 2\varkappa a^{\dot\gamma}_{\alpha\beta} \tag{17.1}$$

и условиям

$$p^{\beta}_{\dot\alpha} a^{\dot\alpha}_{\beta\gamma} = 0, \qquad p^{\gamma}_{\dot\alpha} b^{\dot\alpha\dot\beta}_{\gamma} = 0, \tag{17.2}$$

где

$$p_{\dot\alpha\beta} = \sigma^{k}_{\dot\alpha\beta} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad \sigma^{k}_{\dot\alpha\beta} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z, iI)_{\dot\alpha\beta}$$

(см. также объяснения в приложении. Здесь мы хотим лишь обратить внимание на то, что $\sigma_k^{\dot\alpha\beta}$ означает величину, эрмитово-сопряженную с $-\sigma^k_{\alpha\dot\beta}$). Из этих уравнений следует волновое уравнение второго порядка для $a^{\dot\gamma}_{\alpha\beta}$ и $b^{\dot\alpha\dot\beta}_{\gamma}$.

Дополнительные условия (17.2) означают, что частиц со спином $^1/_2$ быть не должно. Поля, включающие частицы как со спином $^1/_2$, так и со спином $^3/_2$, не обладают определенным знаком полного заряда в c-числовой теории, вследствие чего не могут быть проквантованы в соответствии с принципом запрета. С другой стороны, последнее физически необходимо для того, чтобы в c-числовой теории энергия была положительной [ср. «А»]. Как и в предыдущем случае, уравнения (17.1) и (17.2) можно вывести из вариационного принципа, если ввести вспомогательные переменные c_α и $d^{\dot\alpha}$. Надлежащим выбором значений констант и функций Лагранжа можно добиться, чтобы величины c_α, $d^{\dot\alpha}$, $p^{\beta}_{\dot\alpha}$, $a^{\dot\alpha}_{\beta\gamma}$, $p^{\gamma}_{\dot\alpha} b^{\dot\alpha\dot\beta}_{\gamma}$ (которые отвечают спину $^1/_2$) обращались в нуль вследствие уравнений поля, если внешние поля отсутствуют. Функцию L следует выбирать в виде

$$\begin{aligned} L = \varkappa \{a^{*\dot\gamma}_{\dot\alpha\dot\beta} b^{\dot\alpha\dot\beta}_{\gamma} + b^{*\alpha\beta}_{\dot\gamma} a^{\dot\gamma}_{\alpha\beta}\} - \{a^{*\gamma}_{\dot\alpha\dot\beta} p^{\dot\beta\rho} a^{\dot\alpha}_{\gamma\rho} + b^{*\alpha\beta}_{\dot\gamma} p_{\alpha\dot\rho} b^{\dot\gamma\dot\rho}_{\beta}\} + \\ + \{a^{*\gamma}_{\dot\alpha\dot\beta} p^{\dot\beta}_{\gamma} d^{\dot\alpha} + b^{*\alpha\beta}_{\dot\gamma} p^{\dot\gamma}_{\beta} c_\alpha + \text{сопряженные величины}\} + \\ + 3\{d^{*\alpha} p_{\alpha\dot\beta} d^{\dot\beta} + c^{*}_{\dot\alpha} p^{\dot\alpha\beta} c_\beta\} + 6\varkappa \{d^{*\alpha} c_\alpha + d^{\dot\alpha} c^{*}_{\dot\alpha}\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Варьируя, получаем уравнения:

$$\begin{aligned} 2\varkappa b^{\dot\alpha\dot\beta}_{\gamma} - p^{\dot\beta\rho} a^{\dot\alpha}_{\gamma\rho} - p^{\dot\alpha\rho} a^{\dot\beta}_{\gamma\rho} + p^{\dot\beta}_{\gamma} d^{\dot\alpha} + p_{\alpha\dot\rho} d^{\dot\beta} = 0, \\ 2\varkappa a^{\dot\gamma}_{\alpha\beta} - p_{\alpha\dot\rho} b^{\dot\rho\dot\gamma}_{\beta} - p_{\beta\dot\rho} b^{\dot\rho\dot\gamma}_{\alpha} + p^{\dot\gamma}_{\beta} c_\alpha + p^{\dot\gamma}_{\alpha} c_\beta = 0; \end{aligned} \tag{19.1}$$

$$\begin{aligned} - p^{\beta}_{\dot\gamma} a^{\dot\gamma}_{\alpha\beta} + 3 p_{\alpha\dot\beta} d^{\dot\beta} + 6\varkappa c_\alpha = 0, \\ - p^{\gamma}_{\dot\beta} b^{\dot\alpha\dot\beta}_{\gamma} + 3 p^{\dot\alpha\beta} c_\beta + 6\varkappa d^{\dot\alpha} = 0. \end{aligned} \tag{19.2}$$

С помощью этих уравнений можно показать, что c_α и $d^{\dot\alpha}$ равны нулю и что условия (17.2) выполняются. Для этого применим $p^{\gamma}_{\dot\beta}$ к первому уравнению

(19.1), а $p^{\alpha\dot{\alpha}}$ — к первому уравнению (19.2), имея в виду, что

$$p_{\alpha\dot{\beta}}\, p^{\dot{\beta}\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}\,\Box, \qquad p_{\alpha\dot{\beta}}\, p_{\gamma}^{\dot{\beta}} = \varepsilon_{\alpha\gamma}\,\Box\,.$$

В результате получим уравнения

$$\begin{aligned} 2\varkappa p_{\dot{\beta}}^{\gamma} b_{\gamma}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} - p^{\dot{\alpha}\rho} p_{\dot{\beta}}^{\gamma}\, a_{\gamma\rho}^{\dot{\beta}} + 3\,\Box\, d^{\dot{\alpha}} &= 0, \\ - p^{\dot{\alpha}\rho} p_{\dot{\beta}}^{\gamma}\, a_{\gamma\rho}^{\dot{\beta}} + 3\,\Box\, d^{\dot{\alpha}} + 6\varkappa p^{\dot{\alpha}\beta} c_{\beta} &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим

$$2\varkappa\,\{p_{\dot{\beta}}^{\gamma} b_{\gamma}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} - 3p^{\dot{\alpha}\beta} c_{\beta}\} = 0.$$

Сравнивая полученное выражение со вторым уравнением (19.2), видим, что

$$d^{\dot{\alpha}} = 0.$$

Равенство нулю отраженной величины c_{α} доказывается аналогично. На этот раз условия (17.2) будут следовать из уравнений (19.2). Уравнения (19.1) примут вид:

$$\varkappa b_{\gamma}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = p^{\dot{\beta}\rho}\, a_{\gamma\rho}^{\dot{\alpha}}, \qquad \varkappa a_{\alpha\beta}^{\dot{\gamma}} = p_{\alpha\dot{\rho}} b_{\beta}^{\dot{\rho}\dot{\gamma}}.$$

Отсюда следует волновое уравнение для $a_{\beta\gamma}^{\dot{\alpha}}$ и $b_{\gamma}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$.

§ 5. Наложение внешнего поля

Внешнее электромагнитное поле снова можно ввести, заменив $p_{\alpha\dot{\beta}}$ на $\Pi_{\alpha\dot{\beta}}$, где $\Pi_{\alpha\dot{\beta}}$ — спинор, соответствующий уже определявшейся величине Π_k. При этом возникают следующие уравнения:

$$\begin{aligned} 2\varkappa b_{\gamma}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} - \Pi^{\dot{\beta}\rho}\, a_{\gamma\rho}^{\dot{\alpha}} - \Pi^{\dot{\alpha}\rho}\, a_{\gamma\rho}^{\dot{\beta}} + \Pi_{\gamma}^{\dot{\beta}} d^{\dot{\alpha}} + \Pi_{\gamma}^{\dot{\alpha}} d^{\dot{\beta}} &= 0, \\ 2\varkappa a_{\alpha\beta}^{\dot{\gamma}} - \Pi_{\alpha\dot{\rho}} b_{\beta}^{\dot{\gamma}\dot{\rho}} - \Pi_{\beta\dot{\rho}} b_{\alpha}^{\dot{\gamma}\dot{\rho}} + \Pi_{\beta}^{\dot{\gamma}} c_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^{\dot{\gamma}} c_{\beta} &= 0, \end{aligned} \tag{21.1}$$

$$\begin{aligned} - \Pi_{\dot{\gamma}}^{\beta}\, a_{\alpha\beta}^{\dot{\gamma}} + 3\Pi_{\alpha\dot{\beta}} d^{\dot{\beta}} + 6\varkappa c_{\alpha} &= 0, \\ - \Pi_{\dot{\beta}}^{\gamma} b_{\gamma}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + 3\Pi^{\dot{\alpha}\beta} c_{\beta} + 6\varkappa d^{\dot{\alpha}} &= 0. \end{aligned} \tag{21.2}$$

Восемь вспомогательных условий должны следовать из этих уравнений, которые в отсутствие внешнего поля должны приводить к равенству нулю величин c_{α}, $d^{\dot{\alpha}}$ и к выполнению условия (17.2). Поскольку уравнения (21.1), (21.2) имеют первый порядок относительно производных по времени, вспомогательные условия вообще не должны содержать никаких производных по времени. Так же, как и в предыдущем случае, применяя

$\Pi^{\gamma}_{\dot\beta}$ к (21.1), $\Pi^{\alpha\dot\alpha}$ — к (21.2), находим:

$$2\varkappa\Pi^{\gamma}_{\dot\beta}b^{\dot\beta\dot\alpha}_{\gamma}-\frac{1}{2}(\Pi^{\gamma}_{\dot\beta}\Pi^{\rho\dot\beta}+\Pi^{\rho}_{\dot\beta}\Pi^{\gamma\dot\beta})a^{\dot\alpha}_{\gamma\rho}-\Pi^{\gamma}_{\dot\beta}\Pi^{\dot\alpha\rho}a^{\dot\beta}_{\gamma\rho}+f^{\dot\alpha}_{\dot\beta}d^{\dot\beta}-3\Pi^2d^{\dot\alpha}=0,$$

$$-\Pi^{\dot\alpha\rho}\Pi^{\gamma}_{\dot\beta}a^{\dot\beta}_{\gamma\rho}+3f^{\dot\alpha}_{\dot\beta}d^{\dot\beta}-3\Pi^2d^{\dot\alpha}+6\varkappa\Pi^{\rho\dot\alpha}c_{\rho}=0.$$

(Здесь произведена подстановка

$$\Pi_{\dot\alpha\beta}\Pi^{\dot\gamma\delta}-\Pi_{\dot\gamma\delta}\Pi^{\dot\alpha\beta}=\delta^{\dot\gamma}_{\dot\alpha}f^{\delta}_{\beta}+\delta^{\delta}_{\beta}f^{\dot\gamma}_{\dot\alpha},$$

$f^{\beta\delta}$, $f^{\dot\alpha\dot\gamma}$ — симметричные тензоры, соответствующие напряженностям электромагнитного поля.)

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$2\varkappa\Pi^{\gamma}_{\dot\beta}b^{\dot\beta\dot\alpha}_{\gamma}-2f^{\gamma\rho}a^{\dot\alpha}_{\gamma\rho}-2f^{\dot\alpha}_{\dot\beta}d^{\dot\beta}-6\varkappa\Pi^{\rho\dot\alpha}c_{\rho}=0. \tag{22}$$

Сравнивая это уравнение со вторым уравнением (21.2), находим

$$6\varkappa d^{\dot\alpha}-\frac{1}{\varkappa}f^{\dot\alpha}_{\dot\beta}d^{\dot\beta}=\frac{1}{\varkappa}f^{\gamma\rho}a^{\dot\alpha}_{\gamma\rho}. \tag{23}$$

Аналогично получаем и отраженное уравнение

$$6\varkappa c_{\alpha}-\frac{1}{\varkappa}f^{\beta}_{\alpha}c_{\beta}=\frac{1}{\varkappa}f_{\dot\gamma\dot\rho}b^{\dot\gamma\dot\rho}_{\alpha}. \tag{24}$$

Это дает нам четыре вспомогательных условия. Чтобы найти еще четыре условия, необходимо в уравнениях (21.1), (21.2) отделить производные по времени от производных по пространственным переменным. Для этого мы рассмотрим эти уравнения в системе координат, в которой временна́я координата фиксирована, и потребуем лишь инвариантности относительно вращений пространства. Спинор $s^{\dot\alpha}$ в этом случае будет эквивалентен s_{α}, а $\Pi^{\dot\alpha}_{\beta}$ — эквивалентен $\Pi_{\alpha\beta}$, где

$$\Pi_{\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{3}\sigma^{k}_{\alpha\beta}\Pi_k.$$

В этих обозначениях наши уравнения содержат в явном виде Π_4. Первые уравнения (21.1), (21.2) можно записать так:

$$\begin{aligned}&2\varkappa b_{\alpha\beta,\gamma}-\Pi^{\rho}_{\beta}a_{\alpha,\gamma\rho}-i\Pi_4a_{\alpha,\gamma\beta}-\Pi^{\rho}_{\alpha}a_{\beta,\gamma\rho}-i\Pi_4a_{\beta,\gamma\alpha}+\\&+\Pi_{\beta\gamma}d_{\alpha}+i\varepsilon_{\beta\gamma}\Pi_4d_{\alpha}+\Pi_{\alpha\gamma}d_{\beta}+i\varepsilon_{\alpha\gamma}\Pi_4d_{\beta}=0,\end{aligned} \tag{25}$$

$$-\Pi^{\beta\gamma}a_{\gamma,\alpha\beta}+i\Pi_4\varepsilon^{\beta\gamma}a_{\gamma,\alpha\beta}+3\Pi^{\beta}_{\alpha}d_{\beta}+3i\Pi_4d_{\alpha}+6\varkappa c_{\alpha}=0. \tag{26}$$

Умножив (25) на $\varepsilon^{\beta\gamma}$, получим

$$2\varkappa b^{\beta}_{\alpha\beta,}-\Pi^{\rho}_{\beta}a^{\beta}_{\alpha,\rho}-\Pi^{\rho}_{\alpha}a^{\beta}_{\beta,\rho}-i\Pi_4a^{\beta}_{\beta,\rho}+\Pi^{\beta}_{\beta}d_{\alpha}+3i\Pi_4d_{\alpha}+\Pi^{\beta}_{\alpha}d_{\beta}=0. \tag{27}$$

Вычитая из (27) уравнение (26), находим

$$2\varkappa b^{\beta}_{\alpha\beta,}+\Pi^{\beta\rho}a_{\alpha,\beta\rho}+\Pi_{\alpha\rho}b^{\beta\rho}_{\beta,}+\Pi^{\beta\gamma}a_{\gamma,\alpha\beta}+\Pi^{\beta}_{\beta}d_{\alpha}-2\Pi^{\beta}_{\alpha}d_{\beta}-6\varkappa c_{\alpha}=0. \tag{28}$$

Для отраженного уравнения результат аналогичен

$$2\varkappa a^{\beta}_{\alpha\beta,} + \Pi^{\beta\rho} b_{\alpha,\beta\rho} + \Pi_{\alpha\rho} b^{\beta\rho}_{\beta,} + \Pi^{\beta\gamma} b_{\gamma,\alpha\beta} + \Pi^{\beta}_{\beta} c_{\alpha} - 2\Pi^{\beta}_{\alpha} c_{\beta} - 6\varkappa d_{\alpha} = 0. \quad (29)$$

Уравнения (28) и (29) дают нам еще четыре вспомогательных условия. Следствием этих восьми условий является неизменность размерности состояний при наложении поля, и мы получаем возможность строить теорию, производя разложения по степеням заряда.

В заключение приведем выражение для вектора плотности заряда-тока

$$s_{\alpha\dot{\beta}} = \overset{*}{a}{}^{\gamma}_{\dot{\beta}\dot{\mu}} a^{\dot{\mu}}_{\gamma\alpha} + \overset{*}{b}{}^{\mu}_{\dot{\gamma},\alpha} b^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}\mu} + \{\overset{*}{a}_{\dot{\mu}\dot{\beta},\alpha} d^{\dot{\mu}} + \overset{\times}{b}_{\dot{\beta},\alpha\mu} c^{\mu} + \text{сопряженные величины}\} - $$
$$- \{3\overset{*}{d}_{\alpha} d_{\dot{\beta}} + \overset{\times}{c}_{\dot{\beta}} c_{\alpha}\}.$$

В отсутствие внешнего поля это выражение сводится к выражению, обозначенному в «А» через $s^{(0)}_{\alpha\beta}$.

III НУЛЕВАЯ МАССА ПОКОЯ

§ 6. Спин 2

В полученных выше формулах для A_{ik} и C можно положить $\varkappa$ равным нулю и таким образом прийти к теории для нулевой массы покоя. Уравнения при этом будут иметь следующий вид:

$$-2\Box A_{ik} + 2\left\{\frac{\partial^2 A_{sk}}{\partial x_s \partial x_i} + \frac{\partial^2 A_{si}}{\partial x_s \partial x_k} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial x_r \partial x_s}\right\} - $$
$$- \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{4}\delta_{ik}\Box C = 0, \quad (30.1)$$

$$\frac{3}{4}\Box C - \frac{\partial^2 A_{rk}}{\partial x_r \partial x_k} = 0. \quad (30.2)$$

Равенство нулю C и $\partial A_{ik}/\partial x_i$ из этих уравнений уже не следует. Тем не менее существуют вытекающие из них четыре тождества, ибо, продифференцировав (30.1) по x_i, а (30.2) — по x_k, найдем и в том и другом случае

$$\frac{3}{4}\Box\frac{\partial C}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial^2 A_{rl}}{\partial x_r \partial x_l} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (31)$$

Поэтому, вычитая одно уравнение из другого, мы при любом значении k получим тождественный нуль. С помощью этих тождеств мы можем, исходя из произвольного векторного поля f_i, построить величины A^0_{ik}, C^0, тождественно удовлетворяющие уравнениям поля. Запишем эти величины:

$$A^0_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_k}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\frac{\partial f_l}{\partial x_l},$$
$$C^0 = 2\frac{\partial f_l}{\partial x_l}. \quad (32)$$

Нетрудно проверить, что функция Лагранжа, к которой сводится (11), если $\varkappa$ положить равным нулю, при «градиентном преобразовании»

$$A'_{ik} = A_{ik} + A^0_{ik}, \quad C' = C + C^0 \tag{33}$$

изменяется лишь на полный дифференциал.

Наши результаты совпадут с результатами «А», если калибровку выбрать так, чтобы

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} = 0.$$

Это условие аналогично условию Лоренца для электромагнитных потенциалов и сужает градиентные преобразования до той группы, которая была рассмотрена в «А». Излагаемая здесь схема тождественна с эйнштейновским «первым приближением» для уравнений гравитационного поля.

Эйнштейн [4] рассмотрел уравнения гравитационного поля для тех случаев, когда отклонения от евклидовой метрики представляют собой величины первого порядка малости. Пусть

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \gamma_{ik}, \qquad \gamma_{ii} = \gamma.$$

Положим

$$\gamma_{ik} = A_{ik} + \frac{1}{4}\delta_{ik}C, \qquad \gamma = C.$$

Мы получим следующие дифференциальные уравнения для γ_{ik}:

$$-\Box\gamma_{ik} - \frac{\partial^2\gamma}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2\gamma_{lk}}{\partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial^2\gamma_{li}}{\partial x_l \partial x_k} + \frac{1}{2}\delta_{ik}\left\{\Box\gamma - \frac{\partial^2\gamma_{lr}}{\partial x_l \partial x_r}\right\} = 0, \quad \Box\gamma - \frac{\partial^2\gamma_{lr}}{\partial x_l \partial x_r} = 0. \tag{34}$$

Эти уравнения совпадают с теми, которые вывел Эйнштейн для пространства, не содержащего материи.

В теорию гравитации градиентные преобразования (33) входят как инфинитезимальные преобразования координат. Если имеется взаимодействие с материей и ограничение линейными членами перестает быть достаточным, группа градиентных преобразований изменяется. В результате размерность возможных преобразований сохраняется; четыре функции положения всегда остаются произвольными. Хорошо известно, что существование тензора энергии-импульса тесно связано с инвариантностью теории гравитации относительно таких преобразований. Точно так же градиентная инвариантность теории Максвелла связана с сохранением заряда.

---

[4] *A. Einstein.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. (Math.-Phys.), 1916, S. 688; 1918, S. 54. (Русск. пер.: *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. 1. М., «Наука», 1965, с. 514, 631.— *Ред.*).

§ 7 Спин $^3/_2$

Полагая $\varkappa$ равным нулю в уравнениях для частиц спина $^3/_2$, получаем:

$$\begin{aligned} &-p^{\dot\beta\rho}a^{\dot\alpha}_{\gamma\rho}-p^{\dot\alpha\rho}a^{\dot\beta}_{\gamma\rho}+p^{\dot\beta}_{\gamma}d^{\dot\alpha}+p^{\dot\alpha}_{\gamma}d^{\dot\beta}=0,\\ &-p_{\alpha\dot\rho}b^{\dot\rho\dot\gamma}_{\beta}-p_{\beta\dot\rho}b^{\dot\rho\dot\gamma}_{\alpha}+p^{\dot\gamma}_{\beta}c_{\alpha}+p^{\dot\gamma}_{\alpha}c_{\beta}=0; \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} &-p^{\beta}_{\dot\gamma}a^{\dot\gamma}_{\alpha\beta}+3p_{\alpha\dot\beta}d^{\dot\beta}=0,\\ &-p^{\gamma}_{\dot\beta}b^{\dot\alpha\dot\beta}_{\gamma}+3p^{\dot\alpha\beta}c_{\beta}=0. \end{aligned} \tag{36}$$

Из этих уравнений вытекают четыре или, если мы воспользуемся методом Майораны [5] и наложим на переменные поля требование вещественности, два тождества. Действительно, дифференцируя (35) по $p^{\gamma}_{\dot\alpha}$, (36) — по $p^{\dot\beta\alpha}$, мы в обоих случаях получаем

$$-p^{\dot\beta\rho}p^{\gamma}_{\dot\alpha}a^{\dot\alpha}_{\gamma\rho}+3\,\square\,d^{\dot\beta}=0\qquad(\dot\beta=1,2)$$

и аналогичные равенства для отраженных уравнений. Поэтому решения можно находить с помощью спинорных полей f_α, $g^{\dot\alpha}$ первого ранга, тождественно удовлетворяющих нашим уравнениям. Положим:

$$\begin{aligned} &a^{0\dot\gamma}_{\alpha\beta}=p^{\dot\gamma}_{\alpha}f_{\beta}+p^{\dot\gamma}_{\beta}f_{\alpha},\qquad d^{0\dot\beta}=p^{\dot\beta\alpha}f_{\alpha};\\ &b^{0\dot\alpha\dot\beta}_{\gamma}=p^{\dot\alpha}_{\gamma}g^{\dot\beta}+p_{\gamma}^{\dot\beta}g^{\dot\alpha},\qquad c^{0}_{\beta}=p_{\beta\dot\alpha}g^{\dot\alpha}. \end{aligned}$$

И в этом случае действие преобразования $a'^{\dot\gamma}_{\alpha\beta}=a^{0\dot\gamma}_{\alpha\beta}+a^{\dot\gamma}_{\alpha\beta}+\ldots$ на функцию Лагранжа сводится к добавлению полного дифференциала.

В то время как теория для спина 2 имеет важное обобщение для случая внешнего поля — теорию гравитации, для спина $^3/_2$ связи с какой-либо известной теорией не существует. Чтобы получить обобщение теории на случай взаимодействий, прежде всего необходимо найти физическую интерпретацию группы градиентных преобразований и связанного с этой группой закона сохранения.

§ 8. Общий случай произвольного спина

Чтобы построить теорию, позволяющую учитывать взаимодействия, для частиц с произвольным спином, мы снова прежде всего должны найти вариационный принцип, из которого можно было бы вывести уравнения «A». Взаимодействия можно было бы учесть, изменяя соответствующим образом функцию Лагранжа. Например, действие электромагнитного поля можно описывать, подставляя Π_k вместо $-i\,(\partial/\partial x_k)$. Обобщая метод, уже применявшийся для спинов 2 и $^3/_2$, мы вновь должны ввести вспомогательные поля, которые в отсутствие внешнего поля обращаются в нуль

---

[5] *E. Majorana.* Nuovo Cimento, 1937, 14, 171.

вследствие уравнений поля. Для иллюстрации этого метода достаточно рассмотреть случай целого спина.

Возьмем тензор $A^f_{ik\ldots l}$ ранга f, симметричный по всем своим индексам, со следом $A^f_{ii\ldots l}$, равным нулю. Введем далее вспомогательные тензорные поля рангов $f-2, \ldots, s, \ldots, 1, 0$, которые точно так же симметричны и имеют след, равный нулю. Некоторые поля могут иметь одинаковый ранг, в этом случае мы будем отличать их по индексу t. Таким образом, поле общего вида, входящее в функцию Лагранжа, мы обозначим через $A^{st}_{ik\ldots l}$, где $i, k, \ldots, l$ — тензорные индексы, по которым поле симметрично, а t отличает различные поля ранга r. Индекс s принимает значения 0, 1, . . ., $f-1$, f. В общем случае с полем A^s ранга s можно связать $s+1$ разновидностей частиц, а именно: частицы со спином s, $s-1, \ldots, 1, 0$. Поэтому функция Лагранжа должна иметь такую структуру, чтобы в конце концов оставались только частицы со спином f. Иначе говоря, все поля, отвечающие частицам со спином $f-1, \ldots, 1, 0$, в силу уравнений поля должны обращаться в нуль. Функцию Лагранжа L выберем в виде

$$L=\sum_s\sum_t\Big[\varkappa^2 A^{st}_{ik\ldots}A^{st}_{ik\ldots}+a_1^{st}\frac{\partial A^{st}_{ik\ldots}}{\partial x_l}\frac{\partial A^{st}_{ik\ldots}}{\partial x_l}+a_2^{st}\frac{\partial A^{s+1,\,t}_{ik\ldots}}{\partial x_i}\frac{\partial A^{s+1,\,t}_{ik\ldots}}{\partial x_l}+$$
$$+\sum_r\Big\{a_3^{st,\,r}\frac{\partial A^{st}_{ik\ldots}}{\partial x_l}A^{s+1,\,r}_{il\ldots}+a_4^{st,\,r}\frac{\partial A^{st}_{il\ldots}}{\partial x_k}\frac{\partial A^{s+2,\,r}_{mikl\ldots}}{\partial x_m}\Big\}\Big],\qquad (37)$$

где a_1^{st}, a_2^{st}, $a_3^{st,r}a_4^{st,r}$ — константы, которые следует выбирать так, чтобы исключить частицы со спином s. Чтобы получить необходимое число констант, введем вспомогательные поля, число которых приводится в следующей таблице.

s	Число полей ранга s	Число частиц со спином s, которые необходимо исключить	Соответствующее число имеющихся в нашем распоряжении констант
$f-1$	0	1	1
$f-2$	1	2	2
$f-3$	1	3	3
$f-4$	1	4	4
$f-5$	2	6	7
$f-6$	3	9	14
. . .	. . .	. . .	. . .
$f-n$	$n-3$	$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+3$	$2(n-3)^2-n+2$

Из таблицы видно, что число констант при этом больше, чем необходимо. Поэтому функцию Лагранжа можно составлять многими способами, причем в отсутствие внешних полей она будет приводить к одной и той же теории, которая изложена в «А». Мы пока не сумели найти никакого простого

способа, позволяющего избавиться от этой неоднозначности. В частности, нельзя сделать так, чтобы приходилось иметь дело лишь с одним полем каждого ранга, поскольку при этом получалось бы n частиц спина $f-2$ и при $n \geqslant 5$ лишь четыре константы для того, чтобы устранить их.

Совершенно аналогичный метод применим и для полуцелых спинов. Единственное различие состоит в том, что функция Лагранжа в этом случае содержит лишь производные первого порядка, что приводит к несколько иному числу констант. Следует заметить, что уже для $^5/_2$ приходится вводить *два* поля, отвечающих спину $^1/_2$. Поскольку в остальном метод ничем не отличается от метода, изложенного для целых спинов, нам нет необходимости останавливаться на деталях.

Приложение

1. Вид функции Лагранжа, приводящий к решениям с особенностями. Как уже подчеркивалось, в тех случаях, когда функцию Лагранжа требуется обобщить так, чтобы можно было учесть взаимодействие с другими полями, особое внимание следует обращать на то, чтобы число ограничительных условий не уменьшалось. Это необходимо, поскольку включение внешних полей приводит к появлению новых частиц, таких, что соответствующие им частные решения уравнений при выключении внешних полей становятся расходящимися.

В качестве примера приведем недопустимую форму взаимодействия частиц спина 1 со скалярным полем ψ. Пусть

$$L = \varkappa^2 A_i^2 + \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)^2 - \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right)^2 + \psi\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right)^2. \qquad (38)$$

Уравнения поля имеют вид

$$\Box A_k - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_i \partial x_k} = \varkappa^2 A_k - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\psi \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right). \qquad (39)$$

Отсюда

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \Box\left(\psi \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right).$$

При $\psi \equiv 0$ это уравнение представляет собой вспомогательное условие на A_i, которое, однако, при включении взаимодействия исчезает.

Чтобы исследовать характер новых решений, возникающих от взаимодействия с ψ, предположим, что A_i и ψ зависят только от времени. Тогда

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_4} - \delta_{k4}\frac{\partial^2 A_4}{\partial x_4^2} = \varkappa^2 A_4 - \delta_{k4}\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\psi \frac{\partial A_4}{\partial x_4}\right).$$

Уравнение для A_4 представляет интерес, поскольку содержит ψ. Оно имеет вид

$$\varkappa^2 A_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\psi \frac{\partial A_4}{\partial x_4}\right). \qquad (40)$$

Предположим, что ψ изменяется так медленно, что $\partial\psi/\partial x_4$ можно пренебречь. Тогда

приближенно будет выполняться равенство

$$\frac{\varkappa^2}{\psi} A_4 = \frac{\partial^2 A_4}{\partial x_4^2}.$$

Поэтому волны A_4 соответствуют массе $\varkappa/\sqrt{\psi}$. При отрицательных ψ эта масса мнима; при $\psi = 0$ она обращается в бесконечность. Поэтому в пределе при $\psi \to 0$ мы получаем решения с сильной сингулярностью. Уравнения (40) можно решить точно, если выбрать ψ в виде

$$\psi = \pm e^{-\alpha t}, \qquad \alpha > 0.$$

В этом случае

$$A_4 = \Im \frac{\text{const}}{\sqrt{\psi}} Z_1(2\varkappa/\alpha \sqrt{\psi}),$$

где $\Im$ означает взятие мнимой части, а Z_1 — функцию Бесселя первого порядка. Поскольку ψ стремится к нулю со стороны отрицательных значений, A_4 расходится экспоненциально.

2. *Правила спинорного анализа.* Приведем сводку тех немногих определений и правил спинорного анализа, которые были использованы в нашей работе.

Поднятие и опускание спинорных индексов производится по следующему правилу:

$$v_1 = -v^2, \quad v_2 = v^1. \tag{1}$$

Скалярное произведение спиноров определяется по формуле

$$v_\alpha u^\alpha = -v^\alpha u_\alpha = v_1 u_1 - v_2 u_2. \tag{2}$$

Его можно записать через спинорные инварианты:

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1, \qquad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0,$$
$$v^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} v_\beta, \qquad v_\alpha = v^\beta \varepsilon_{\beta\alpha},$$
$$v_\alpha u^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} v_\alpha u_\beta = -\varepsilon^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta.$$

Таким образом, чтобы поднять значок, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ применяют слева, чтобы опустить — справа.

Переход от спиноров к четырехмерным тензорам производится с помощью матриц $\sigma^k_{\alpha\beta}$, где k принимает значения от 1 до 4, α и β — от 1 до 2. Матрицы определяются формулами:

$$\overset{1}{\sigma}_{\dot\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{2}{\sigma}_{\dot\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{3}{\sigma}_{\dot\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \overset{4}{\sigma}_{\dot\alpha\beta} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(Наши обозначения отличаются от обозначений Ван-дер-Вардена [6], который в качестве четвертой матрицы выбирал $\sigma^4 = I$. Наши матрицы более удобны, поскольку мы используем мнимую координату $x_4 = ict$.) Из (1) следует:

$$\overset{k}{\sigma}_{1\dot 2} = -\sigma^{k,\dot 1 2}, \qquad \overset{k}{\sigma}_{2\dot 1} = -\sigma^{k,\dot 2 1},$$
$$\overset{k}{\sigma}_{1\dot 1} = \sigma^{k,\dot 2 2}, \qquad \overset{k}{\sigma}_{2\dot 2} = \sigma^{k,\dot 1 1}.$$

---

[6] *B. Van der Waerden.* Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Berlin, 1932, S. 83. (Русск. пер.: *Б. Ван-дер-Варден.* Метод теории групп в квантовой механике. Харьков, 1938.— *Ред.*).

Так как след матрицы σ^k при $k = 1, 2, 3$ равен нулю, мы получаем следующее правило:

$$\sigma^{k, \dot\alpha\beta} = -\overset{k}{\sigma}_{\alpha\dot\beta} \qquad \text{при } k = 1, 2, 3,$$

$$\sigma^{4, \dot\alpha\beta} = \overset{4}{\sigma}_{\alpha\dot\beta}.$$

Величины σ^k удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} \overset{k}{\sigma}_{\dot\alpha\beta}\sigma^{l, \beta\dot\gamma} + \overset{l}{\sigma}_{\dot\alpha\beta}\sigma^{k, \beta\dot\gamma} &= -2\delta_{kl}\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}, \\ \overset{k}{\sigma}_{\dot\alpha\beta}\sigma^{l, \gamma\dot\alpha} + \overset{l}{\sigma}_{\dot\alpha\beta}\sigma^{k, \gamma\dot\alpha} &= -2\delta_{kl}\delta^{\gamma}_{\beta}. \end{aligned} \tag{4}$$

Спинору $a_{\dot\alpha\beta}$ с помощью $\overset{k}{\sigma}_{\dot\alpha\beta}$ можно поставить в соответствие 4-вектор a_k:

$$a_{\dot\alpha\beta} = a_k \overset{k}{\sigma}_{\dot\alpha\beta}. \tag{5}$$

Наоборот,

$$a_{\dot\alpha\beta}\sigma^{k, \dot\alpha\beta} = -2a_k. \tag{6}$$

Таким образом, 4-вектор a_k может быть оператором, например $-i\,(\partial/\partial x_k)$. Если компоненты вектора a_k коммутируют друг с другом:

$$a_i a_k - a_k a_i = 0,$$

то из (4) следует, что

$$\begin{aligned} a_{\dot\alpha\beta}a^{\beta\dot\gamma} &= -a^2\delta^{\dot\gamma}_{\dot\alpha}, \\ a_{\dot\alpha\beta}a^{\gamma\dot\alpha} &= -a^2\delta^{\gamma}_{\beta}, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$a^2 = \sum_{k=1}^{4} a_k^2 = -\frac{1}{2}\, a_{\dot\alpha\beta}a^{\beta\dot\alpha}.$$

В частности, для спинора

$$p_{\dot\alpha\beta} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\overset{k}{\sigma}_{\dot\alpha\beta} \tag{8}$$

из (7) следует, что

$$p_{\dot\alpha\beta}p^{\beta\dot\gamma} = \delta^{\dot\gamma}_{\dot\alpha}\Box, \tag{9}$$

где

$$\Box = \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Далее, если

$$\Pi_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{e}{hc}\varphi_k, \tag{10}$$

то

$$\Pi_k\Pi_l - \Pi_l\Pi_k = \frac{ie}{hc}\left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l}\right) \equiv f_{kl}. \tag{11}$$

Поскольку компоненты Π_k не коммутируют друг с другом, из (4) получаем

$$\Pi_{\dot{\alpha}\beta}\Pi^{\beta\dot{\gamma}} = \sigma^{k}_{\dot{\alpha}\beta}\sigma^{l,\,\beta\dot{\gamma}}\Pi_k\Pi_l = \frac{1}{2}\sigma^{k}_{\dot{\alpha}\beta}\sigma^{l,\,\beta\dot{\gamma}}\{\Pi_k\Pi_l + \Pi_l\Pi_k + f_{kl}\} = -\Pi^2\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}} + f^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}}, \tag{12}$$

где

$$\sigma^{k}_{\dot{\alpha}\beta}\sigma^{l,\,\dot{\gamma}\delta}f_{kl} = \delta^{\delta}_{\beta}f^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}} + \delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}}f^{\delta}_{\beta} = \Pi_{\dot{\alpha}\beta}\Pi^{\dot{\gamma}\delta} - \Pi^{\dot{\gamma}\delta}\Pi_{\dot{\alpha}\beta} \tag{13}$$

— спинор, соответствующий напряженностям поля (ср. Уленбек и Лапорт [7]) и обладающий тем свойством, что

$$f^{\alpha}_{\alpha} = f^{\dot{\alpha}}_{\dot{\alpha}} = 0.$$

Помимо перестановочных соотношений (4), $\sigma^{k}_{\dot{\alpha}\beta}$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=1}^{4}\sigma^{4}_{\dot{\alpha}\beta}\sigma^{4}_{\dot{\gamma}\delta} = 2\,(\delta_{\dot{\alpha}\delta}\delta_{\dot{\gamma}\beta} - \delta_{\dot{\alpha}\beta}\delta_{\dot{\gamma}\delta}) = 2\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\varepsilon_{\delta\beta}. \tag{14}$$

Рассмотрим тензор b_{kl} второго ранга, отвечающий симметричному спинору

$$b_{\dot{\alpha}\dot{\beta},\,\gamma\delta} = b_{\dot{\beta}\dot{\alpha},\,\gamma\delta} = b_{\dot{\alpha}\dot{\beta},\,\delta\gamma}.$$

Из (14) сразу же следует, что след этого тензора равен нулю:

$$b_{kk} = 0.$$

Выводы

Теория частиц с произвольным спином в отсутствие внешнего поля, ранее опубликованная одним из авторов, обобщена в рамках c-числовой теории. Получены волновые уравнения для таких частиц в электромагнитном поле. Подробно рассмотрены спин 2 и спин $^3/_2$. В общем случае доказано лишь, что непротиворечивые волновые уравнения существуют. Непротиворечивости системы уравнений поля удалось добиться, выводя их из функции Лагранжа, содержащей соответствующим образом подобранные дополнительные члены, зависящие от новых вспомогательных величин. Все дифференциальные уравнения поля выведены путем варьирования интеграла действия. Все вспомогательные величины устроены так, что в отсутствие внешнего поля обращаются в нуль в силу уравнений поля.

В частном случае нулевой массы покоя между уравнениями существуют тождества. Сами уравнения в этом случае оказываются инвариантными относительно группы преобразований, служащей обобщением групп градиентных преобразований в теории Максвелла. В частном случае спина 2 и нулевой массы покоя уравнения в отсутствие внешнего поля согласуются с уравнениями Эйнштейна для гравитационных волн в первом приближении общей теории относительности. Соответствующую группу преобразований порождают инфинитезимальные преобразования координат.

[7] *G. Uhlenbeck*, *O. Laporte*. Phys. Rev., 1931, 37, 1380.

О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ИЗВЕСТНЫХ И НЕИЗВЕСТНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ *

(Совместно с Ф. Белинфанте)

Исследуется, в какой мере возможны рассуждения о статистике произвольных гипотетических частиц в релятивистски-инвариантной теории, если принимаются полностью или частично следующие три постулата: (I) энергия положительна; (II) наблюдаемые в различных пространственно-временны́х точках, соединенных пространственно-подобным интервалом, коммутативны; (III) существуют два эквивалентных описания природы, в которых элементарные заряды имеют противоположные знаки, а взаимно-сопряженные полевые величины преобразуются одинаково при преобразованиях Лоренца.

Один из нас (Паули) уже показал, что вообще при целочисленном спине постулат (II) приводит только к статистике Бозе — Эйнштейна, а при полуцелом спине из постулата (I) получается только статистика Ферми — Дирака. Далее второй из нас (Белинфанте) показал, что для некоторого класса частиц (который охватывает все наблюденные до сих пор в природе частицы и который характеризуется тем, что может быть описан не более чем *одним* ундором данного ранга) из постулата (III), конкретизированного с помощью особого закона преобразования, для целого спина вытекает статистика Бозе — Эйнштейна, для полуцелого спина — статистика Ферми — Дирака. В настоящей статье для типичных случаев значений спина 0 и $^1/_2$ приводятся примеры, показывающие, что в общем случае нескольких ундоров равного ранга из постулата (III) невозможно получить однозначные выводы о статистике частиц, тогда как постулаты (II) для целого или (I) для полуцелого спина позволяют делать это всегда. Напротив, в частных случаях скалярного поля, векторного поля и электрона Дирака, когда в теорию входит только один-единственный ундор данного ранга, закон преобразования при зарядовом сопряжении однозначно приводит к тому, что здесь для определения вида статистики достаточно постулата (III).

§ 1. Введение

Недавно один из авторов [1] указал общий принцип, позволяющий определить простым способом статистические свойства (т. е. знак в перестановочных соотношениях для компонент поля) всех частиц и квантов, известных из опыта к настоящему времени. Этот принцип заключается в следующем. Допустим, что поле рассматриваемых частиц и квантов описывается набором ундоров [1] $\Psi_{k_1 \ldots k_n}$ [2], являющихся функциями координат

$$x^1 = x_1 = x, \quad x^2 = x_2 = y, \quad x^3 = x_3 = z, \quad x^0 = -x_0 = ct$$

---

* *On the Statistical Behaviour of Known and Unknown Elementary Particles.* (With F. J. Belinfante).— Physica, 1940, 7, 177—192.

[1] В терминологии Белинфанте ундоры — величины, преобразующиеся как произведения двух 4-компонентных дираковских волновых функций ($\psi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \psi_\beta$).— *Прим. ред.*

и удовлетворяющих некоторой системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (уравнений поля), куда могут входить некоторые постоянные с размерностью заряда.

При бесконечно малом преобразовании Лоренца или пространственном вращении системы отсчета, когда компоненты данного вектора ξ преобразуются по формуле [2]

$$\delta\xi^{\nu} = \xi_{\mu}\delta\omega^{\mu\nu}, \tag{1}$$

эти ундоры преобразуются согласно соотношению [3]

$$\delta\Psi = \frac{1}{4}\delta\omega^{\mu\nu}\Gamma_{\nu}\Gamma_{\mu}\Psi, \tag{2}$$

где

$$\Gamma_{\mu} = \sum_{j=1}^{n}\gamma_{\mu}^{(j)}. \tag{3}$$

Здесь матрицы $\gamma_{\mu}^{(j)}$, действующие на индекс k_j величин $\Psi_{k_1 \ldots k_n}$, удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_{\{\mu}^{(j)}\gamma_{\nu\}}^{(j)} \equiv \gamma_{\mu}^{(j)}\gamma_{\nu}^{(j)} + \gamma_{\nu}^{(j)}\gamma_{\mu}^{(j)} = 2g_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Действуя на комплексно-сопряженный ундор $\Psi^{*}_{\dot{k}_1 \ldots \dot{k}_n}$ линейным оператором

$$\mathfrak{L} = \prod_{j=1}^{n}\mathfrak{L}^{(j)}, \tag{5}$$

где $\mathfrak{L}^{(j)}$ — матрица, действующая на индекс $\dot{k}_j$ величины $\Psi^{*}_{\dot{k}_1 \ldots \dot{k}_n}$ и удовлетворяющая соотношениям

$$\gamma_{\mu}^{(j)}\mathfrak{L}^{(j)} = \mathfrak{L}^{(j)}\gamma_{\mu}^{(j)*}, \tag{6}$$

мы получаем снова ундор

$$\Psi^{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}\Psi^{*}. \tag{7}$$

Матрицу $\mathfrak{L}$ можно нормировать так, что

$$\Psi^{\mathfrak{L}\mathfrak{L}} = \Psi, \tag{8}$$

полагая

$$\mathfrak{L}^{(j)}\mathfrak{L}^{(j)*} = 1. \tag{9}$$

Вместо соотношений (5) — (7) мы могли бы построить ундор $\Psi^{\mathfrak{L}}$ из Ψ^{*}, полагая

$$\Psi^{\mathfrak{L}} = \mathfrak{S}\mathfrak{L}\Psi, \tag{10}$$

---

[2] Греческие индексы пробегают значения от 0 до 3; знаки суммирования опущены. Обращаем внимание на определение (4) матриц γ_{μ}, несколько отличное от определения в предыдущих работах одного из авторов [1—4].

где $\mathfrak{S}$ — скалярный оператор, например, произведение четного [3] числа множителей $\gamma_5^{(j)}$, определенных формулой [4]

$$\gamma_5^{(j)} = i\gamma_1^{(j)}\gamma_2^{(j)}\gamma_3^{(j)}\gamma_0^{(j)}. \tag{11}$$

Подобным же образом можно снова образовать ундор из Ψ^*, полагая

$$\Psi^Q = Q\Psi^*, \text{ или } \Psi^{(Q)} = \mathfrak{S}Q\Psi^*, \qquad Q = \gamma_5^{(1)}\mathfrak{L}, \tag{12}$$

так что

$$\Psi^{QQ} = -\Psi. \tag{13}$$

Теперь можно показать [6, 1], что если ундоры Ψ, описывающие поля экспериментально известных частиц (например, электронов, нуклонов [5], фотонов, мезонов), преобразуются по формуле (7), то мы получаем систему ундоров $\Psi^{\mathfrak{L}}$, снова удовлетворяющих системе уравнений поля, в которой, однако, все (вещественные) постоянные с размерностью заряда, например e, изменяют свой знак на противоположный:

$$e^L = -e^*. \tag{14}$$

Это справедливо только [5] для преобразования по формуле (7), но не по формуле (12). Далее, эта инвариантность уравнений поля и аналогичная *инвариантность всех физически существенных формул* (например, формул, выражающих полную энергию или полный электрический заряд) существуют *только вследствие перестановочных соотношений*, которым удовлетворяют ундоры. Поэтому в результате преобразования

$$\Psi \to \Psi^L \text{ вместе с } e \to e^L, \tag{15}$$

где Ψ^L выражается формулой

$$\Psi^L = \Psi^{\mathfrak{L}}, \tag{16}$$

мы переходим от одного описания полей частиц и квантов (с помощью ун-

---

[3] Если мы потребуем, чтобы Ψ и $\Psi^{\mathfrak{L}}$ преобразовывались в точности одинаково при пространственном отражении относительно начала координат, то это отражение должно выражаться формулой

$$\Psi'_{k_1 \ldots k_n} = \pm\, \gamma_0^{(1)} \ldots \gamma_0^{(n)} \Psi_{k_1 \ldots k_n}.$$

Ундор, принимающий при отражении этот вид, мы будем называть *обыкновенным*.

Если мы потребуем, чтобы совершенно одинаково преобразовывались Ψ и Ψ^Q, то Ψ не должен быть обыкновенным ундором, а такой величиной (*«квазиундором»*), для которой отражение определяется формулой

$$\Psi'_{k_1 \ldots k_n} = \pm\, i\gamma_0^{(1)} \ldots \gamma_0^{(n)} \Psi_{k_1 \ldots k_n}.$$

Нечетное число множителей $\gamma_5^{(j)}$ переводит обыкновенный ундор в квазиундор, а квазиундор — в обыкновенный ундор.

[4] Обращаем внимание на то, что определенная здесь матрица γ_5 отличается знаком от γ_5, определенной в некоторых статьях одного из авторов [5].

[5] Частицу, которая в заряженном состоянии есть протон, а в нейтральном — нейтрон, мы называем *нуклоном*.

доров Ψ) к другому описанию (с помощью $\Psi^{\mathfrak{Q}}$), *полностью эквивалентному* с первоначальным описанием; по терминологии Крамерса [6] последнее называется *зарядово-сопряженным* описанием физического мира.

С другой стороны, постулируя, что преобразование (15), определенное формулой (16), не должно изменять все физически существенные величины [6], мы, очевидно, получаем некую информацию о перестановочных соотношениях для некоторых компонент ундора. Эта информация оказывается достаточной для того, чтобы определить знак в перестановочных соотношениях, т. е. чтобы сделать выбор между коммутативностью и антикоммутативностью компонент поля Ψ и Ψ*, хотя этим способом совершенно невозможно определить *c*-числа (например, δ-функции) в обычных перестановочных соотношениях. Одним из нас [1] было показано, что для некоторого набора гипотетических частиц [7], описываемых одним ундором произвольно заданного ранга, из этого постулата следует, что частицы с целым спином должны подчиняться статистике Бозе — Эйнштейна, а частицы с полуцелым спином — статистике Ферми — Дирака.

С другой стороны, другим из нас [7] было получено весьма общее доказательство того, что аналогичный результат для произвольных частиц, описываемых полем, удовлетворяющим системе линейных однородных дифференциальных уравнений, можно получить из следующих двух постулатов:

(I) для этих частиц *не существует бесконечного числа состояний с отрицательной энергией*;

(II) *наблюдаемые в точках, связанных пространственно-подобным вектором, всегда коммутируют между собой.*

Эти два постулата можно понять с физической точки зрения. Первый постулат необходим для того, чтобы частицы не переходили в состояния со все меньшей и меньшей энергией, рождая бесконечное число квантов или пар частиц. Согласно второму постулату, всегда возможно производить одновременные измерения в точках, соединенных пространственно-подобным вектором; это так и должно быть, поскольку поле в одной точке не может влиять на поле в другой точке, если эти точки соединяются пространственно-подобным вектором.

Инвариантность относительно преобразования (15) с *конкретизацией* (16) представляет собой частный случай инвариантности относительно некоторого *неконкретизированного* преобразования ундоров (15) и инверсии знаков констант (14), имеющих размерность заряда. Инвариантность всех физических величин при преобразовании, отличающемся от (16), но все еще относящемся к типу (14) — (15), означала бы также, что существует

---

[6] Это свойство можно назвать «*зарядовой инвариантностью*» теории. Поскольку преобразование (15) было определено формулой (16), в дальнейшем мы будем называть указанное свойство *конкретизированной* зарядовой инвариантностью. Мы признаем, что название «зарядовая инвариантность» не вполне точно, поскольку этим свойством могут обладать как заряженные, так и нейтральные частицы.

[7] В этот набор входят все частицы, существование которых к настоящему времени установлено экспериментально.

описание физического мира, в котором каждый «элементарный заряд» имеет противоположный знак. Вывод о существовании такого обобщенного зарядово-сопряженного описания можно сделать из рассуждений о возможной симметрии между положительными и отрицательными зарядами, которая — хотя ее и нет на Земле — все же может оказаться фундаментальной чертой природы. (Во всяком случае, мы знаем, что эта симметрия существует для всех *известных* частиц [1]). Поэтому, *не конкретизируя* преобразования с помощью формулы (16) [8], мы постулируем:

(III) *инвариантность всех физически существенных формул и величин относительно некоторого преобразования* (15), в котором Ψ означает некоторую систему ундоров $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$, . . . и Ψ^L — аналогичную систему ундоров $\psi^{(1)L}$, $\psi^{(2)L}$, . . ., преобразующихся так же, как Ψ. Однако мы *не* постулируем, что после преобразования от Ψ к Ψ^L — которое мы будем называть «неконкретизированным зарядовым сопряжением» — компоненты ундора $\psi^{(n)L}$ будут опять линейными комбинациями только из компонент $\psi^{(n)*}$.

Ниже мы рассматриваем отношение постулатов (I), (II) и (III) к вопросу о статистических свойствах гипотетических частиц со спином 0 или $\hbar/2$. Подобное же рассмотрение, хотя и более сложное, можно провести и для спина $\geqslant \hbar$.

§ 2. Частицы или кванты со спином 0

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые возможности квантовой теории частиц, описываемых (по крайней мере частично) функцией s (комплексной) координат x^ν, которая представляет собой скаляр, по меньшей мере относительно пространственных вращений и преобразований Лоренца, и удовлетворяет — если пренебречь всеми внешними силами — уравнению Клейна — Гордона

$$(\Box - \varkappa^2)s = 0, \quad (\Box \equiv \nabla^\nu\nabla_\nu,\ \nabla_\nu \equiv \partial/x^\nu,\ \varkappa = mc/\hbar). \tag{17}$$

Здесь мы рассмотрим случай, когда частицы или кванты обладают массой ($\varkappa \neq 0$) [9]. Полагая в этом случае

$$\varkappa\varphi_\nu = \nabla_\nu s, \tag{18}$$

---

[8] Свойство, выражаемое постулатом (III), можно назвать свойством «*неконкретизированной зарядовой инвариантности*» теории.

[9] Для скалярных частиц с *нулевой* массой уравнения первого порядка имеют вид

$$\varphi_\nu = \nabla_\nu s, \quad \nabla^\nu\varphi_\nu = 0. \tag{18—19a}$$

Эти уравнения можно вывести из функции Лагранжа

$$L = K\,\{\varphi^{*\nu}\,(\varphi_\nu - \nabla_\nu s) + s^*\nabla_\nu\varphi^\nu\}. \tag{21a}$$

Полная энергия в этом случае дается выражением

$$\mathcal{H} = \iiint \sum_{\nu=0}^{3} \varphi_\nu^*\varphi_\nu dx\,dy\,dz \quad (\text{—}c\text{-число}). \tag{22a}$$

Дальнейшее рассмотрение возможных перестановочных соотношений и законов зарядового сопряжения в этом случае аналогично случаю скалярных частиц с ненулевой массой.

мы находим из (17)

$$\varkappa s = \nabla^{\nu}\varphi_{\nu}. \tag{19}$$

Уравнения (18), (19) образуют систему полевых уравнений первого порядка. Ее можно получить из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \iiiint L dx\, dy\, dz\, dt, \tag{20}$$

причем функция Лагранжа L, зависящая от компонент поля s, φ_{ν}, s^* и т. д. и (линейно) от их (первых) производных, имеет вид

$$L = K\,\{\varphi^{*\nu}\,(\varkappa\varphi_{\nu} - \nabla_{\nu}s) - s^*\,(\varkappa s - \nabla_{\nu}\varphi^{\nu})\}. \tag{21}$$

Таким образом, если постоянная K вещественна, то и весь лагранжиан $\mathcal{L}$ (20) будет вещественным.

Для полной энергии мы находим выражение [8]

$$\mathcal{H} = \varkappa K \iiint \{s^* s + \sum_{\nu=0}^{3} \overset{*}{\varphi}_{\nu}\varphi_{\nu}\}\, dx\, dy\, dz \quad (\text{—}c\text{-число}). \tag{22}$$

Относительно правил коммутации будем *предполагать*, что они имеют вид:

$$[s\,(x);\ s^*\,(x')\,] = c\,(x,\ x'), \tag{23}$$

$$[s\,(x);\ s\,(x')] = [s^*\,(x);\ s^*\,(x')] = 0, \tag{24}$$

причем скобочные символы $[A;\ B]$ обозначают либо коммутатор $[A;\ B]_-$, либо антикоммутатор $[A;\ B]_+$:

$$[A;\ B]_{\mp} = AB \pm BA. \tag{25}$$

Кроме того, $c\,(x,\ x')$ означает c-числовую функцию аргументов x_{ν} и x'_{ν}. Перестановочные соотношения для других компонент поля получаются из (23), (24) с помощью уравнений (18).

Из соотношений (23), (24) заключаем, что c—скалярная функция, удовлетворяющая, вследствие (17), уравнениям

$$(\Box - \varkappa^2)c\,(x,x') = (\Box' - \varkappa^2)c\,(x,\ x') = 0 \tag{26}$$

($\Box'$ действует на x' аналогично тому, как $\Box$ действует на x).

Далее мы заметим, что постулат (II) в § 1 удовлетворяется, если мы будем предполагать для всех пар компонент поля q_1, q_2:

$$[q_1\,(\mathbf{x}, x_0);\ q_2\,(\mathbf{x}, x_0)] = 0 \text{ при } x_0 = x_0', \text{ но } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'. \tag{27}$$

Здесь $\mathbf{x}$ означает x^1, x^2, x^3. Так как соотношение (27) должно выполняться для s и s^*, а также для s и $\overset{*}{\varphi}_0$, то c и $\nabla_0 c$ должны обращаться в нуль при $x = x_0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$, так что из скалярности c следует, что функция c должна иметь вид [8, 7]

$$c\,(x, x') = iC \cdot \mathfrak{D}\,(x - x'). \tag{28}$$

Здесь C — постоянная, а функция

$$\mathfrak{D}(x) \equiv \mathfrak{D}(\mathbf{x}, x_0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\sin k^0 x_0}{k^0} dk_x dk_y dk_z \tag{29}$$

$$(k^0 = +\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \varkappa^2})$$

есть решение уравнений (26), удовлетворяющее условиям:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*, \qquad \mathfrak{D}(\mathbf{x}, 0) = 0, \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x_0}\right)_{x_0=0} = \delta(\mathbf{x}). \tag{30}$$

Все другие решения уравнений (26) исключаются постулатом (II). Заметим, что $\mathfrak{D}$ зависит только от $|\mathbf{x}|$ и x_0 и является нечетной функцией x_0, так что имеем

$$\mathfrak{D}^*(x) = -\mathfrak{D}(-x). \tag{31}$$

Перестановочные соотношения теперь принимают вид

$$[s(x);\ s^*(x')]_- = iC\mathfrak{D}(x - x'), \tag{32}$$

так как статистика Ферми — Дирака исключается потому, что при $x = x'$ [ср. (23) с формулами (28), (30)] из соотношения

$$ss^* + s^*s = 0 \tag{33}$$

следует, что поле совершенно исчезает [7]:

$$s = 0. \tag{34}$$

Кроме того, величина iC должна быть чисто мнимой вследствие соотношения (31) и равенства

$$[s(x);\ s^*(x')]^* = [s(x');\ s^*(x)]. \tag{35}$$

Полная энергия (22) автоматически оказывается положительной в согласии с постулатом (I).

Если e — заряд[10] рассматриваемой частицы, мы можем ввести их взаимодействие с максвелловским полем, заменяя в формулах (17) — (21) оператор ∇_ν на

$$D_\nu = \nabla_\nu + (e/i\hbar c)\mathfrak{A}_\nu, \tag{36}$$

где $\mathfrak{A}_\nu$ — четырехмерный электромагнитный векторный потенциал. Из величин s, φ_ν, . . . мы должны теперь получить новые величины s^L, $\overset{L}{\varphi_\nu}$, . . ., удовлетворяющие тем же уравнениям поля, за исключением перемены знака e, т. е. уравнениям, в которых всюду операторы D_ν заменены на D_ν^*.

[10] Если бы заряд рассматриваемого поля обращался в нуль, то применять комплексно-сопряженные компоненты поля в целях зарядового сопряжения нужно было бы только в том случае, когда существовало бы некое взаимодействие между рассматриваемыми нейтральными частицами. Конечно, для нейтральных частиц существует *возможность* того, что они описываются вещественными тензорами или, применяя более общее понятие, *нейтретторами* [2, 1].

Единственную возможность такого зарядового сопряжения (отвлекаясь от произвольного множителя) обеспечивает комплексное сопряжение

$$s^L = s^* \text{ (и потому } \varphi_\nu^L = \varphi_\nu^*,\ s^{*L} = s,\ \varphi_\nu^{*L} = \varphi_\nu). \tag{37}$$

При этом преобразовании (37) лагранжиан $\mathscr{L}$ (20), (21) в случае статистики Бозе — Эйнштейна автоматически оказывается инвариантным, так что выполняется и постулат (III).

Мы подчеркиваем: то обстоятельство, что закон зарядового сопряжения однозначно определяется лагранжианом (20), (21), является прямым следствием того, что в качестве компонент поля не рассматриваются, кроме s^* и φ_ν^*, никакие другие величины, которые описывают частицы с зарядом ($-e$) и преобразуются таким же образом, как s и φ_ν. *Если бы* такие компоненты *существовали*, могли бы возникнуть некоторые сомнения по поводу перестановочных соотношений. Однако антикоммутативность вида (23), (24) можно было бы исключить и в этом случае вследствие постулата (II) [7], так что все законы зарядового сопряжения, не обеспечивающие зарядовой инвариантности для статистики Бозе — Эйнштейна, в силу постулата (II) должны быть исключены.

Доказательство того, что *только постулат* (II), а не комбинация постулатов (I) и (III) приводит к необходимости статистики Бозе — Эйнштейна для полей, описываемых более чем одним скаляром, мы проведем на примере возможной теории частиц с нулевым спином, но подчиняющихся статистике Ферми — Дирака, когда полная энергия строго положительна, а теория зарядово-инвариантна. (В этом случае постулат (II), разумеется, не будет выполняться.) Этот пример был рассмотрен одним из авторов ранее [8]. Введем оператор $\sqrt{\varkappa^2 - \Delta}$, определяемый формулами:

$$f(\mathbf{x}, x_0) = \iiint a(\mathbf{k}, x_0)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dk_x\, dk_y\, dk_z,$$

$$\sqrt{\varkappa^2 - \Delta} \cdot f(\mathbf{x}, x_0) = \iiint a(\mathbf{k}, x_0)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} k^0\, dk_x\, dk_y\, dk_z, \tag{38}$$

$$\left(k^0 = +\sqrt{\varkappa^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}\right),$$

и функцию $\mathfrak{D}_1(x)$ — формулой

$$\mathfrak{D}_1(\mathbf{x}, x_0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\cos k^0 x_0}{k^0}\, dk_x\, dk_y\, dk_z, \tag{39}$$

так что $\mathfrak{D}_1^*(x) = +\mathfrak{D}_1(-x)$. Заметим, что $\mathfrak{D}_1 + i\mathfrak{D}$ удовлетворяет уравнениям:

$$(\mathfrak{D}_1 \pm i\mathfrak{D})^*(x) = (\mathfrak{D}_1 \pm i\mathfrak{D})(-x), \tag{40}$$

$$\nabla^0 (\mathfrak{D}_1 \pm i\mathfrak{D}) = \pm i \sqrt{\varkappa^2 - \Delta} \cdot (\mathfrak{D}_1 \pm i\mathfrak{D}).$$

Теперь мы рассмотрим сначала поле, описываемое формулами (17) — (19), но расщепим скаляр s и четырехмерный вектор φ_ν на две части по

формулам:

$$s = s^{(+)} + s^{(-)}, \quad \nabla_\nu s^{(\pm)} = \varkappa \varphi_\nu^{(\pm)}, \tag{41}$$

$$\nabla^0 s^{(\pm)} = \pm i\sqrt{\varkappa^2 - \Delta}\cdot s^{(\pm)}. \tag{42}$$

Вследствие (42) перестановочные соотношения для $s^{(+)}$ и $s^{(-)}$ принимают следующую форму [ср. (40)]:

$$\begin{gathered}[s^{(\pm)}(x);\ s^{(\pm)*}(x')] = C^{(\pm)}\cdot(\mathfrak{D}_1 + i\mathfrak{D})(x - x'),\\ [s^{(\pm)}(x); s^{(\mp)*}(x')] = 0,\\ [s;\ s] = =[s^*;\ s^*] = 0 \text{ и т. д.}\end{gathered} \tag{43}$$

Здесь $C^{(+)}$ и $C^{(-)}$ — вещественные постоянные. Уравнения (17) — (19) и (42) остаются справедливыми при следующем законе зарядового сопряжения:

$$s^{(\pm)L} = s^{(\mp)*}. \tag{44}$$

Теперь, вместо того чтобы рассматривать полный лагранжиан нашей системы в виде (20), (21), в котором после подстановки (41) интегралы по времени от перекрестных произведений членов, обозначенных индексами (+) и (—), обратились бы в нуль, мы произведем взаимную перестановку $s^{(-)}$ и $s^{(+)*}$ и введем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned}L = K\ \{&\varphi^{(+)*\nu}(\varkappa\varphi_\nu^{(+)} - \nabla_\nu s^{(+)}) - s^{(+)*}(\varkappa s^{(+)} - \nabla_\nu\, \varphi^{(+)\nu}) +\\ &+ \varphi^{(-)\nu}(\varkappa\varphi_\nu^{(-)*} - \nabla_\nu s^{(-)*}) - s^{(-)}(\varkappa s^{(-)*} - \nabla_\nu \varphi^{(-)*\nu})\}.\end{aligned} \tag{45}$$

Из этого лагранжиана можно получить уравнения поля (18), (19) для $s^{(+)}$ и $s^{(-)}$; затем следует добавить два уравнения (42) в качестве дополнительных условий. Для полной энергии мы находим следующее строго положительное выражение [8]:

$$\mathcal{H} = \varkappa K \iiint \left\{ s^{(+)*}s^{(+)} + s^{(-)}s^{(-)*} + \sum_{\nu=0}^{3} (\varphi_\nu^{(+)*}\varphi_\nu^{(+)} + \varphi_\nu^{(-)}\varphi_\nu^{(-)*})\right\} dx\,dy\,dz. \tag{46}$$

Зарядовая инвариантность (III) и положительность энергии (I) теперь обеспечиваются формулами (44) и (46) и для статистики Ферми — Дирака, и для статистики Бозе — Эйнштейна. Поэтому скобочные символы в (43) следует рассматривать как антикоммутаторы [ср. (25)], по крайней мере если в (43) мы положим $C^{(+)}/C^{(-)} > 0$, чтобы исключить соотношения типа (33).

Таким образом, мы видим, что *постулаты* (I) *и* (III) *безусловно не исключают статистики Ферми — Дирака в случае спина* 0, именно, в том более общем случае, когда в качестве компонент поля рассматривается более чем одна скалярная и ее комплексно-сопряженная величины; *однако в случае целого спина для этой цели всегда оказывается достаточным постулат* (II) [7].

§ 3. Частицы или кванты со спином $\hbar/2$

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые возможности квантовой теории частиц, описываемых (хотя бы частично) четырехкомпонентной функцией ψ_k координат, которая преобразуется как ундор первого ранга [2] по крайней мере относительно пространственных вращений и преобразований Лоренца и которая удовлетворяет — в отсутствие внешних сил — уравнению Клейна — Гордона

$$(\Box - \varkappa^2)\,\psi = 0, \qquad (\Box \equiv \nabla^\nu \nabla_\nu). \tag{47}$$

Положим

$$\nabla_{\text{оп}} = \gamma^\nu \nabla_\nu, \qquad \nabla_{\text{оп}}^2 = \Box, \tag{48}$$

где γ_ν — матрицы, определенные соотношениями (2) — (4). Теперь легко показать, что четырехкомпонентная величина

$$\nabla_{\text{оп}}\psi = -\varkappa\chi \tag{49}$$

преобразуется точно так же, как ψ. С определением (49) уравнение (47) на основании (48) принимает вид

$$\nabla_{\text{оп}}\chi = -\varkappa\psi. \tag{50}$$

Уравнения (49), (50) образуют систему уравнений поля первого порядка. Они принимают особенно простую форму, если [4]

$$\chi = \pm\psi. \tag{51}$$

Полагая, что постоянная $\varkappa$ может быть отрицательной, мы можем выбрать в формуле (51) знак $+$, так что в этом частном случае уравнения (49), (50) переходят в уравнение Дирака

$$(\nabla_{\text{оп}} + \varkappa)\psi = 0. \tag{52}$$

Теперь введем матрицу $\gamma^5 = \gamma_5$, определенную формулой (11), и положим

$$\alpha^\mu = \gamma_0\gamma^\mu = -\gamma^0\gamma^\mu \qquad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5), \tag{53}$$

так что [1]

$$\alpha^0 = 1, \qquad \gamma_5 = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3. \tag{54}$$

Далее можно доказать, что существует эрмитова матрица ϑ, такая, что [2] [11]

$$\vartheta\alpha^\mu = (\vartheta\alpha^\mu)^\dagger \qquad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5). \tag{55}$$

Здесь значок $\dagger$ означает эрмитово-сопряженную матрицу [12]. Эта матрица ϑ нормируется так, что плотность электрического заряда поля дается выра-

---

[11] Для матрицы ϑ в предыдущей статье одного из авторов [5] применялось обозначение A.

[12] Поскольку матрица ψ имеет один столбец и четыре строки, эрмитово-сопряженная матрица $\psi^\dagger$ имеет одну строку и четыре столбца. Ее элементы комплексно сопряжены элементам ψ.

жением $e\psi^\dagger\vartheta\psi$. Далее мы полагаем [13]

$$\beta = i\vartheta\gamma^0 \,(= \vartheta\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^5 = \beta^\dagger). \tag{56}$$

Теперь уравнение (52) можно получить из скалярного лагранжиана (20), если

$$L = -K\psi^\dagger\beta\,(\nabla_{\text{оп}} + \varkappa)\psi, \tag{57}$$

или, в ковариантном ундорном виде [2],

$$L = iK\psi^{\mathfrak{Q}l}\,(\nabla_l^k + \varkappa\delta_l^k)\,\psi_k, \tag{58}$$

где мы положили [14]

$$\psi^{\mathfrak{Q}l} \equiv i\psi^\dagger\beta\ (\equiv \psi^+) \tag{59}$$

и

$$\nabla_l^k \equiv (\gamma^\nu)_l^k\cdot\nabla_\nu \equiv (\nabla_{\text{оп}})_l^k, \tag{48а}$$

так что

$$\nabla_m^l\nabla_l^k = \delta_m^k\cdot\nabla_\nu\nabla^\nu = \delta_m^k\,\Box. \tag{48б}$$

Полная энергия теперь дается выражением

$$\mathcal{H} = (iK/c)\iiint\psi^\dagger\,\vartheta\,(\partial\psi/dt)\,dxdydz\quad (c\text{-число}). \tag{60}$$

Аналогично предыдущему параграфу мы *предполагаем*, что перестановочные соотношения имеют вид

$$[\psi_k\,(x);\ \psi^{\mathfrak{Q}l}\,(x')] = c_k^l\,(x,\ x'), \tag{61}$$

$$[\psi_k\,(x);\ \psi_l\,(x')] = [\psi_k^{\mathfrak{Q}}\,(x);\ \psi_l^{\mathfrak{Q}}\,(x')] = 0. \tag{62}$$

Так как величина $c_k^l\,(x, x')$ должна быть смешанным ундором второго ранга [ср. (61)] и должна удовлетворять уравнениям (26) и (27), то вследствие (47) и постулата (II) ундор $c_k^l\,(x, x')$ должен иметь вид

$$c_k^l\,(x,\,x') = C\,(\nabla_k^l + a\delta_k^l)\,\mathfrak{D}\,(x - x'), \tag{63}$$

где C и a — постоянные, а функция $\mathfrak{D}\,(x)$ дается выражением (29). В нашем частном случае (52) постоянная a определяется уравнением

$$(\nabla_{\text{оп}} + \varkappa)\,c = 0. \tag{64}$$

Подставляя

$$(\Box - \varkappa^2)\mathfrak{D} = 0, \tag{26а}$$

мы находим [ср. (48])

$$C\,(\nabla_{\text{оп}} + \varkappa)\,(\nabla_{\text{оп}} + a)\,\mathfrak{D} = 0 = C\,(\nabla_{\text{оп}} + \varkappa)\,(\nabla_{\text{оп}} - \varkappa)\,\mathfrak{D},$$

или

$$(a + \varkappa)\,(\nabla_{\text{оп}} + \varkappa)\,\mathfrak{D} = 0,$$

---

[13] В статье одного из авторов [5] для матрицы β применялось то же обозначение β, а в статьях другого [2, 1] — обозначение $\vartheta\beta$.

[14] Заметим, что связь между ковариантным и контравариантным ундорами (59) отличается множителем i от соответствующего определения в статье одного из авторов [2].

так что

$$a = -\varkappa \text{ и } c = C\,(\nabla_{\text{оп}} - \varkappa)\,\mathfrak{D}. \quad (65)$$

Учитывая соотношения (31), (59), (48а) и равенства [ср. (53), (55), (56)]

$$\beta\gamma^{\mu} = -i\vartheta\alpha^{\mu} = \text{антиэрмитовой матрице} = -(\beta\gamma^{\mu})^{\dagger} = -\gamma^{\mu\dagger}\beta, \quad (66)$$

находим [ср. (35)], что постоянная C должна быть опять вещественной.

Уравнение (52) является зарядово-инвариантным только в случае преобразования [5, 6, 2]

$$\psi^{L} = \psi^{\mathfrak{L}} \equiv \mathfrak{L}\psi^{*}. \quad (67)$$

Зарядовая инвариантность всех физических величин, вытекающая из лагранжиана (20), (57), соблюдается при преобразовании (67) только в случае *антикоммутативности* компонент ψ^* и ψ [1], так что постулат (III) приводит к статистике Ферми — Дирака. Это необходимо также для того, чтобы полная энергия (60) оставалась строго положительной после квантования поля, так что постулаты (I) и (III) в этом случае являются эквивалентными.

Все снова усложняется, если мы допускаем, что поле может описываться бо́льшим числом ундоров, чем только ψ и $\psi^{\mathfrak{L}}$ (или ψ^*). Тогда, *например*, поле могут описывать *первоначальные* уравнения (49), (50) *без ограничительного условия* (51). В *этом* случае удобно ввести ундоры

$$\Psi_{(\pm)}\sqrt{2} = \psi \pm \chi, \quad (68)$$

удовлетворяющие уравнениям поля первого порядка

$$(\nabla_{\text{оп}} \pm \varkappa)\,\Psi_{(\pm)} = 0, \quad (69)$$

так что это поле, можно сказать, описывает смесь дираковских частиц (52) с положительной и отрицательной массами ($\pm\,\varkappa\hbar/c$). Уравнения (69) инвариантны относительно любого из следующих преобразований [в которых $\Psi^{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}\Psi^{*}$, $\Psi^{Q} = Q\Psi^{*}$, ср. (6), (7) и (12)]:

$$\text{либо } \Psi^{L}_{(\pm)} = a_{(\pm)}\Psi^{\mathfrak{L}}_{(\pm)}, \ |a_{(\pm)}|^2 = 1, \quad (70\text{а})$$

$$\text{либо } \Psi^{L}_{(\pm)} = a_{(\mp)}\Psi^{Q}_{(\mp)}, \ (\overset{*}{a}_{\pm}a_{\mp})^2 = 1, \quad (70\text{б})$$

$$\text{так что } \Psi^{LL}_{(\pm)} = \Psi_{(\pm)} \text{ или, возможно, } \Psi^{LL}_{(\pm)} = -\Psi_{(\pm)}. \quad (70\text{в})$$

В случае (70б) поля частиц с положительной и отрицательной массами при зарядовом сопряжении «взаимно обмениваются» ролями.

Уравнения поля (69) можно получить из лагранжиана (20), полагая

$$L = -K_{(+)}\Psi^{\dagger}_{(+)}\beta\,(\nabla_{\text{оп}} + \varkappa)\,\Psi_{(+)} - K_{(-)}\Psi^{\dagger}_{(-)}\beta\,(\nabla_{\text{оп}} - \varkappa)\,\Psi_{(-)}, \quad (71)$$

так что полная энергия оказывается равной

$$\mathcal{H} = (i/c)\iiint \{K_{(+)}\Psi^{\dagger}_{(+)}\vartheta(\partial\Psi_{(+)}/\partial t) + K_{(-)}\Psi^{\dagger}_{(-)}\vartheta\,(\partial\Psi_{(-)}/\partial t)\}\,dxdydz \quad (c\text{-число}). \quad (72)$$

По аналогии с (61), (62), (65) это поле можно квантовать согласно соот-

ношениям:

$$[\Psi_{(\pm)k}(x);\ \Psi^{\mathfrak{L}l}_{(\pm)}(x')] = C_{(\pm)}(\nabla^l_k \mp \varkappa\delta^l_k)\,\mathfrak{D}(x - x'),$$

$$[\Psi_{(\pm)k}(x);\ \Psi^{\mathfrak{L}l}_{(\mp)}(x')] = 0,\ C_{(\pm)} \text{ — вещественны;} \tag{73}$$

далее

$$[\Psi;\ \Psi] =]\Psi^{\mathfrak{L}};\ \Psi^{\mathfrak{L}}] = 0. \tag{74}$$

При $x = x'$ мы находим из (73), учитывая соотношения (48а), (30) и (59), (56):

$$[\Psi_{(\pm)k}(x);\ \overset{*}{\Psi}_{(\pm)\dot{k}}(x)] = C_{(\pm)}\,\delta\,(\mathbf{0})\vartheta^{-1}_{\dot{k}k}. \tag{75}$$

В обычных представлениях ундоров матрица ϑ равна единице [5]. Эта матрица остается единицей до тех пор, пока допускаются только *унитарные* преобразования ундоров [2]. Используя только эти частные представления, мы можем упростить соотношение (75):

$$[\Psi_{(\pm)k}(x);\ \{\Psi_{(\pm)k}(x)\}^*] = C_{(\pm)}\delta\,(\mathbf{0}), \tag{75а}$$

так что в случае статистики Ферми — Дирака постоянные $C_{(\pm)}$ должны быть положительными, тогда как из (75) следует, что $\Psi_{(+)} = 0$, если $C_{(+)} = 0$, и что $\Psi_{(-)} = 0$ при $C_{(-)} = 0$ [ср. (33), (34)]. В этой связи небезынтересно отметить, что соотношения (73), (74) выражают канонические перестановочные соотношения (из которых, например, вытекает $i\hbar\dot{F} = [F;\ \mathcal{H}]$) только в том случае, если

$$C_{(+)}K_{(+)} = C_{(-)}K_{(-)} = \hbar c. \tag{76}$$

Таким образом, *канонические перестановочные соотношения в случае статистики Ферми — Дирака исключаются, если* $K_{(+)}/K_{(-)} < 0$. С другой стороны, *статистика Бозе — Эйнштейна полностью исключается* постулатом (I); так, в этом случае никакой выбор постоянных $K_{(\pm)}$ и $C_{(\pm)}$ не приводит строго к положительной определенности энергии.

Если мы применим постулат (III) зарядовой инвариантности всех величин, получаемых из лагранжиана (71), то закон зарядового сопряжения (70б) приведет к статистике Ферми — Дирака только при условии

$$|a_{(+)}|^2 = 1/|a_{(-)}|^2 = K_{(+)}/K_{(-)}, \tag{77}$$

а к статистике Бозе — Эйнштейна — при условии

$$|a_{(+)}|^2 = 1/|a_{(-)}|^2 = -K_{(+)}/K_{(-)},$$

тогда как при любом другом выборе постоянных $K_{(\pm)}$ и $a_{(\pm)}$ зарядовая инвариантность оказывается невозможной ни для статистики Ферми — Дирака, ни для статистики Бозе — Эйнштейна. Следовательно, в нашем случае статистику Бозе — Эйнштейна нельзя исключить, пользуясь одними только постулатами (II) и (III). Если же мы *объединим* постулаты (III)

и (I), то сможем исключить закон зарядового сопряжения (70б) в случае, когда постоянные $K_{(\pm)}$ в лагранжиане и $a_{(\pm)}$ в законе зарядового сопряжения не связаны соотношением (27). Например, условие $K_{(+)}/K_{(-)} \leqslant 0$ противоречило бы соотношению (77).

С другой стороны, определяя зарядовое сопряжение обычным образом по формуле (70а), а не (70б), мы получаем статистику Ферми — Дирака для *любых* $K_{(+)}$ и $K_{(-)}$ исходя из постулата зарядовой инвариантности. В случае (70а) постулаты (I) и (III) опять оказываются эквивалентными.

§ 4. Заключение

Выше мы видели, что при введении двух скаляров (38), (40) или двух ундоров данного ранга (68) — (71) там, где было бы достаточно одного скаляра (21) или одного ундора (51) — (57), возникает несколько возможностей построения теории квантового поля свободных элементарных частиц. Вообще ни лагранжиан, ни перестановочные соотношения, ни закон зарядового сопряжения [в неконкретизированной форме (15) без (16)] априори не определяются однозначно уравнениями поля первого порядка.

Однако постулаты положительности энергии (I) и коммутативности наблюдаемых в точках, связанных пространственно-подобным вектором, (II) оказываются в этих случаях достаточными для того, чтобы сделать выбор между коммутативностью и антикоммутативностью [7], хотя при этом c-числа в перестановочных соотношениях уже не определяются однозначно. Постулат о *неконкретизированной* зарядовой инвариантности всех физически существенных величин (III) в этих случаях в общем оказывается *недостаточным* для такого выбора [ср. обсуждение формул (44), (45) в § 2, а также (70б) и (77) в § 3], хотя в последнем, рассмотренном в § 3, случае для этой цели было достаточно постулировать *конкретизированную* зарядовую инвариантность [т. е. инвариантность относительно преобразования (15) *при* конкретизации (16)].

В случае *целого спина* (тензорное поле) постулаты (I) и (III) оказываются совершенно лишними, так как они выполняются автоматически, если удовлетворяется постулат (II). С другой стороны, существуют случаи с целым спином и статистикой Ферми — Дирака, где удовлетворяются постулаты (I) и (III), но не выполняется постулат (II).

Уравнения поля первого порядка для частиц, *фактически известных до настоящего времени*, обладают свойством однозначной определенности закона зарядового сопряжения, тогда как построить для них лагранжиан (первого порядка), не вводя излишних величин, можно только единственным способом. Далее, перестановочные соотношения полностью определяются либо постулатами (I) и (II), либо постулатами (III) и (II), если мы предполагаем, что они имеют обычную форму [ср., например, соотношения (23), (24) или (61), (62)]. В этом случае постулат (III) определяет знак, который надо ставить в скобочных символах $[A; B]$, а постулат (II) определяет c-числа, которым должны быть равны эти скобочные символы. С другой стороны, если эти c-числа будут известны [из постулата (II)], то знак

в скобочных символах определяется опять *автоматически* в случае целого спина [7], тогда как в случае полуцелого спина этот знак может быть получен с помощью как постулата (III), так и постулата (II).

Получена 23 декабря 1939 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. J. Belinfante.* Physica, 1939, 6, 870.
2. *F. J. Belinfante.* Physica, 1939, 6, 849.
3. *F. J. Belinfante.* Physica, 1939, 6, 887.
4. *F. J. Belinfante.* Theory of Heavy Quanta. Thesis, Leiden, M. Nijhoff, the Hague, 1939, III, § 4.
5. *W. Pauli.* Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 109. (Русск. пер. см. с. 222.— *Ред.*).
6. *H. A. Kramers.* Proc. roy. Acad. Amsterdam, 1937, 40, 814.
7. *W. Pauli.* Bericht über die allgemeinen Eigenschaften der Elementarteilchen, I, § 3. 8-me Conseil Phys. Solvay. (См. следующую статью.— *Ред.*).
8. *W. Pauli.* Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 137.

СВЯЗЬ МЕЖДУ СПИНОМ И СТАТИСТИКОЙ *[1]

В настоящей работе мы заключаем для релятивистски-инвариантного волнового уравнения свободных частиц: из постулата (I), согласно которому энергия должна быть положительной, необходимость статистики Ферми — Дирака для частиц с произвольным полуцелым спином; из постулата (II), согласно которому наблюдаемые в разных пространственно-временны́х точках, разделенных пространственно-подобным интервалом, коммутативны, необходимость статистики Бозе — Эйнштейна для частиц с произвольным целым спином. Найдено полезным разделить величины, неприводимые относительно преобразований Лоренца, на четыре класса симметрии, которые соответствуют коммутативному умножению типа $+1$, -1, $+\varepsilon$, $-\varepsilon$, где $\varepsilon^2 = 1$.

§ 1. Единицы и обозначения

Поскольку требования теории относительности и квантовой теории являются фундаментальными для любой теории, естественно использовать в качестве единиц скорость света в вакууме c и постоянную Планка, деленную на 2π, которую мы будем обозначать $\hbar$. Это означает, что все величины приведены к размерности степени длины путем умножения на некоторые степени $\hbar$ и c. Обратная длина, соответствующая массе покоя m, обозначается $\varkappa = mc/\hbar$.

В качестве временно́й координаты мы используем длину светового пути. Однако в особых случаях мы не отказываемся от использования мнимой временно́й координаты. Соответственно тензорный индекс, обозначаемый латинской буквой i, относится к мнимой временно́й координате и пробегает значения от 1 до 4. Представляется желательным условиться об обозначении комплексно-сопряженных величин. В то время как для величин с индексом 0 звездочкой будут обозначаться комплексно-сопряженные величины в обычном смысле (например, для вектора тока S_i величина $\overset{*}{S}_0$ является комплексно-сопряженной плотности заряда S_0), в общем случае $\overset{*}{U}_{ik...}$ означает комплексно-сопряженную $U_{ik...}$ величину, умноженную на $(-1)^n$, где n — число цифр 4, встречающихся среди индексов $i, k, \ldots$ (например, $S_4 = iS_0$, $\overset{*}{S}_4 = i\overset{*}{S}_0$).

---

* *The Connection between Spin and Statistics.*— Phys. Rev., 1940, 58, 716—722.

[1] Эта статья представляет собой часть доклада, который был подготовлен автором для Сольвеевского конгресса 1939 г. и в который потом были внесены незначительные улучшения. Ввиду неблагоприятной обстановки Сольвеевский конгресс так и не состоялся, и публикация докладов была отложена на неопределенное время. Соотношение между настоящим рассмотрением связи спина со статистикой и несколько менее общим рассмотрением Белинфанте, основанным на концепции зарядовой инвариантности, разъяснено в статье Паули и Белинфанте [Physica, 1940, **7**, 177. (Русск. пер. см. с. 339.— *Ред.*)].

Дираковские спиноры u_ρ, где $\rho = 1, \ldots, 4$, всегда имеют греческие индексы, пробегающие значения от 1 до 4, и u_ρ^* означает величину, комплексно-сопряженную в обычном смысле.

Волновые функции, поскольку они являются обычными векторами или тензорами, обозначаются в общем случае большими буквами (U_i, $U_{ik\ldots}$). Свойства симметрии этих тензоров вообще должны указываться дополнительно. Электромагнитное и гравитационное поля как классические, а также поля с нулевой массой покоя занимают особое место и поэтому обозначаются обычными символами φ_i, $f_{ik} = -f_{ki}$ и $g_{ik} = g_{ki}$ соответственно.

Тензор энергии-импульса T_{ik} определен так, что плотность энергии W и плотность импульса G_k даются в естественных единицах соотношениями $W = -T_{44}$, $G_k = -iT_{k4}$, где $k = 1, 2, 3$.

§ 2. Неприводимые тензоры. Определение спинов

Нам понадобятся лишь некоторые общие свойства величин, преобразующихся по неприводимым представлениям группы Лоренца [2]. Собственная группа Лоренца — это непрерывная линейная группа, преобразования которой оставляют инвариантной форму

$$\sum_{k=1}^{4} x_k^2 = \mathbf{x}^2 - x_0^2$$

и, кроме того, удовлетворяют условию, что они имеют детерминант, равный $+1$, и не обращают направления времени. Тензор или спинор, который преобразуется неприводимым образом при преобразованиях этой группы, можно охарактеризовать двумя целыми положительными числами (p, q). [Соответствующие «квантовые числа момента количества движения» (j, k) определяются при этом соотношениями $p = 2j + 1$, $q = 2k + 1$, где j и k — целые или полуцелые числа [3].]

Величина $U(j, k)$, определяемая парой чисел (j, k), имеет $pq = (2j + 1)(2k + 1)$ независимых компонент. Следовательно, величине $(0, 0)$ соответствует скаляр, $(^1/_2, {}^1/_2)$ — вектор, $(1, 0)$ — самодуальный антисимметричный тензор, $(1, 1)$ — симметричный тензор со следом, равным нулю, и т. д. Дираковский спинор u_ρ сводится к двум неприводимым величинам $(^1/_2, 0)$ и $(0, {}^1/_2)$, каждая из которых состоит из двух компонент. Если $U(j, k)$ преобразуется по представлению Λ:

$$U'_r = \sum_{s=1}^{(2j+1)(2k+1)} \Lambda_{rs} U_s,$$

---

[2] См. *B. L. van der Waerden.* Die Gruppentheoretische Methode in der Quanten Mechanik. Berlin, 1932. (Русск. пер.: *Б. Ван-дер-Варден.* Метод теории групп в квантовой механике. Харьков, 1938.— *Ред.*)

[3] В спинорном исчислении это — спинор с $2j$ пунктирными и $2k$ непунктирными индексами.

то $U^*(k, j)$ преобразуется по комплексно-сопряженному представлению Λ^*. Таким образом, если $k = j$, то $\Lambda^* = \Lambda$. Это верно лишь при надлежащем упорядочении компонент $U(j, k)$ и $U(k, j)$. При произвольном выборе компонент подобие между преобразованиями Λ и Λ^* необходимо вводить как дополнительное требование. В общем случае, в соответствии с § 1, мы обозначаем через U^* величину, преобразование которой эквивалентно Λ^*, если преобразование U эквивалентно Λ.

Наиболее важной операцией является редукция произведения двух величин

$$U_1(j_1, k_1) \cdot U_2(j_2, k_2),$$

которое по известному правилу сложения моментов разлагается на несколько $U(j, k)$, где j и k пробегают независимо друг от друга значения:

$$j = j_1 + j_2,\ j_1 + j_2 - 1, \ldots, |j_1 - j_2|,$$
$$k = k_1 + k_2,\ k_1 + k_2 - 1, \ldots, |k_1 - k_2|.$$

Если ограничить преобразования только подгруппой пространственных вращений, то различие между числами j и k исчезает, и $U(j, k)$ ведет себя по отношению к этой группе как произведение двух неприводимых величин $U(j)$ $U(k)$, которое в свою очередь приводится к нескольким неприводимым величинам $U(l)$, каждая из которых имеет $2l + 1$ компонент, причем

$$l = j + k,\ j + k - 1, \ldots, |j - k|.$$

При пространственных вращениях величины $U(l)$ с целым l преобразуются по однозначному представлению, а с полуцелым l — по двузначным представлениям. Поэтому неприведенные величины $U(j, k)$ с целым (полуцелым) $j + k$ являются однозначными (двузначными).

На первый взгляд кажется, что значение спина частиц, соответствующих данному полю, определяется значением $l = j + k$. Однако такое определение не соответствовало бы физическим фактам, так как тогда не существовало бы связи между значением спина и числом независимых плоских волн, допустимых в отсутствие взаимодействия при данных значениях компонент k_i в фазовом множителе $\exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$.

Чтобы надлежащим образом определить спин [4], рассмотрим сначала случай, когда масса покоя всех частиц отлична от нуля. Произведем в этом случае преобразование к системе, в которой частица покоится, т. е. все пространственные компоненты k_i равны нулю и волновая функция зависит лишь от времени. Приведем в этой системе компоненты поля (которые, согласно уравнениям поля, не обязательно должны обращаться в нуль) к частям, неприводимым по отношению к пространственным вращениям. Каждой такой части с $r = 2s + 1$ компонентами отвечают r различ-

---

[4] См. *M. Fierz.* Helv. phys. acta, 1939, **12**, 3; *L. de Broglie.* C. r. (Paris), 1939, **208**, 1697; **209**, 265.

ных собственных функций, которые при пространственных вращениях преобразуются друг в друга и относятся к частице со спином s. Если уравнения поля описывают частицы, обладающие лишь одним значением спина, то в покоящейся системе существует лишь одна неприводимая группа компонент. Из лоренц-инвариантности следует для произвольной системы отсчета, что r или Σr собственных функций принадлежат некоторым данным произвольным k_i. В общей системе координат число величин $U(j, k)$, входящих в теорию, определить труднее, так как эти величины должны вместе с вектором k_i удовлетворять нескольким условиям.

В случае нулевой массы покоя имеет место особое вырождение, так как в этом случае, как показал Фирц, допустимо градиентное преобразование второго рода [5]. Но если поле описывает лишь один сорт частиц с нулевой массой покоя и определенным значением спина, то при заданных значениях k_i имеются лишь два состояния, не переходящих друг в друга при градиентном преобразовании. С физической точки зрения в этом случае можно не давать определения спина, так как полный момент количества движения поля не может быть разделен с помощью измерений на орбитальный и спиновый моменты. Однако для определения спина можно использовать следующее свойство. Если в q-числовой теории рассмотреть состояния, в которых имеется лишь одна частица, то допустимыми оказываются не все собственные значения $j(j+1)$ квадрата момента: j начинается с определенного минимального значения s, принимая значения $s, s+1, \ldots$ [6] Так происходит лишь при $\varkappa = 0$. Для фотонов $s = 1$; для отдельного фотона j не может принимать нулевое значение [7]. Для квантов гравитационного поля $s = 2$ и j не может принимать значений 0 и 1.

В произвольной системе координат и при произвольных массах покоя величины U, которые все без исключения преобразуются по двузначным (однозначным) представлениям с полуцелым (целым) $j + k$, описывают лишь частицы с полуцелым (целым) спином. Специальное исследование необходимо лишь в том случае, если нужно решить, описывает ли теория частицы с одним-единственным или с несколькими значениями спина.

---

[5] Под «градиентным преобразованием первого рода» мы понимаем преобразование $U \to Ue^{i\alpha}$, $U^* \to U^*e^{-i\alpha}$, где α — произвольная функция пространственных координат и времени. Под «градиентным преобразованием второго рода» мы понимаем преобразование типа

$$\varphi_k \to \varphi_k - \frac{1}{\varepsilon} i \frac{\partial \alpha}{\partial x_k},$$

аналогичное преобразованию электромагнитных потенциалов.

[6] Общее доказательство этого утверждения дал Фирц (*M. Fierz.* Helv. phys. acta, 1940, 13, 45).

[7] См., например, *W. Pauli.* Wellenmechanik, Handbuch der Physik, Bd. 24/2, 1933, S. 260. (Русск. пер.: *В. Паули.* Общие принципы волновой механики. М.— Л., Гостехиздат, 1947. См. также *В. Паули.* Труды по квантовой теории. М., «Наука», 1975, с. 556.— *Ред.*).

§ 3. Доказательство неопределенного характера заряда при целом спине и неопределенного характера при полуцелом спине

Рассмотрим сначала теорию, в которой используются лишь U с целыми $j+k$, т. е. которая описывает только частицы с целым спином. При этом не предполагается, что описываются частицы лишь с одним-единственным спином; однако все частицы должны иметь целый спин. Разобьем величины U на два класса: 1) класс «+ 1» с целыми j и k; 2) класс «—1» с полуцелыми j и k.

Такое обозначение классов оправдывается тем, что по указанным правилам редукции произведения на неприводимые относительно группы Лоренца составляющие произведение двух величин класса «+1» или класса «—1» содержит лишь величины класса «+1», а произведение величин разных классов содержит лишь величины класса «—1». Существенно, что комплексно-сопряженная величина U^* с переставленными j и k принадлежит к тому же классу, что и U. Как нетрудно видеть из правила умножения, тензоры с четным (нечетным) числом индексов приводятся только к величинам класса «+ 1» («—1»). Волновой вектор k_i мы относим к классу «—1», так как при умножении на другие величины он ведет себя как величина класса «—1».

Рассмотрим теперь однородное линейное уравнение для величин U (не обязательно первого порядка). Для плоской волны мы можем заменить — $i\partial/\partial x_l$ на k_l. В силу инвариантности относительно *собственной* группы Лоренца уравнение должно иметь форму

$$\Sigma\, kU^+ = \Sigma\, U^-, \quad \Sigma kU^- = \Sigma\, U^+. \tag{1}$$

Такая форма означает, что может быть столько же различных членов одинакового типа, сколько имеется величин U^+ и U^-. Кроме того, под U^+ мы понимаем здесь как U^+, так и $(U^+)^*$, а для некоторых U может выполняться условие вещественности $U = U^*$. Наконец, мы опустили *четное* число множителей k. Они могут входить в любом числе в члены суммы в правой или левой частях этих равенств. Эти уравнения, очевидно, инвариантны относительно подстановки

$$\begin{gathered} k_i \to -k_i, \quad U^+ \to U^+, \ [(U^+)^* \to (U^+)^*], \\ U^- \to -U^-, \ [(U^-)^* \to -(U^-)^*]. \end{gathered} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь тензоры T четного ранга (скаляры, антисимметричные или симметричные тензоры второго ранга и т. д.), являющиеся квадратичными или билинейными формами от U. Они состоят лишь из величин с четными j и k и, следовательно, имеют форму

$$T \sim \Sigma U^+U^+ + \Sigma UU^- + \Sigma U^+kU^-, \tag{3}$$

где опять опущены возможные множители k (четное число) и не различаются U и U^*. Подстановка (2) оставляет эту форму инвариантной: $T \to T$.



В. ПАУЛИ
(Голландия, 1949 г.)

Иначе обстоит дело с тензорами нечетного ранга S (векторы и т. д.), состоящими из величин с полуцелыми j и k. Они имеют вид

$$S \sim \Sigma U^{+}kU^{+} + \Sigma U^{-}kU^{-} + \Sigma U^{-} \tag{4}$$

и, следовательно, меняют при подстановке (2) знак: $S \to -S$. В частности, это относится к вектору тока s_i. Преобразованию $k_i \to -k_i$ для произвольных волновых пакетов соответствует преобразование $x_i \to -x_i$; замечателен тот факт, что из одной лишь инвариантности (1) относительно собственной группы Лоренца следует инвариантность при изменении знака всех координат. В частности, отсюда следует неопределенный характер плотности тока и полного заряда при четном спине, так как каждому решению уравнений поля соответствует другое решение с противоположным знаком компонент s_k. Поэтому для четного спина нельзя ввести определенную плотность частиц, преобразующуюся как четвертая компонента вектора.

Перейдем теперь к рассмотрению несколько более сложного случая полуцелых спинов. Разобьем величины U с полуцелыми $j+k$ следующим образом: 3) класс «$+\varepsilon$» с целым j и полуцелым k; 4) класс «$-\varepsilon$» с полуцелым j и целым k.

Перемножение классов 1—4 подчиняется правилу $\varepsilon^2 = 1$ и закону коммутативности. Это правило не изменится, если ε заменить на $-\varepsilon$.

Правила перемножения величин различных классов можно свести в следующую таблицу:

	$+1$	-1	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$		$+1$	-1	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$
$+1$	$+1$	-1	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	-1	$+1$	-1
-1	-1	$+1$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	-1	$+1$

Существенно, что здесь комплексно-сопряженные величины с переставленными j и k не принадлежат одному и тому же классу, так что

$U^{+\varepsilon}$, $(U^{-\varepsilon})^*$ принадлежат классу «$+\varepsilon$»,

$U^{-\varepsilon}$, $(U^{+\varepsilon})^*$ принадлежат классу «$-\varepsilon$».

Поэтому мы будем явно выписывать комплексно-сопряженные величины. [Можно было бы даже подобрать $U^{+\varepsilon}$ так, чтобы все величины класса «$-\varepsilon$» имели вид $(U^{+\varepsilon})^*$.]

Вместо (1) мы получаем следующую типичную форму уравнений:

$$\begin{aligned} \Sigma kU^{+\varepsilon} + \Sigma k\,(U^{-\varepsilon})^* &= \Sigma U^{-\varepsilon} + \Sigma\,(U^{+\varepsilon})^*, \\ \Sigma kU^{-\varepsilon} + \Sigma k\,(U^{+\varepsilon})^* &= \Sigma U^{+\varepsilon} + \Sigma\,(U^{-\varepsilon})^*, \end{aligned} \tag{5}$$

так как множитель k или $i\partial/\partial x$ всегда переводит выражение из одного из классов «$+\varepsilon$» и «$-\varepsilon$» в другой. Как и ранее, мы опустили четное число множителей k.

Теперь рассмотрим вместо (2) подстановку

$$\begin{gathered} k_i \to -k_i, \quad U^{+\varepsilon} \to iU^{+\varepsilon}, \ (U^{-\varepsilon})^* \to i\,(U^{-\varepsilon})^*, \\ (U^{+\varepsilon})^* \to -(U^{+\varepsilon})^*, \quad U^{-\varepsilon} \to -iU^{-\varepsilon}. \end{gathered} \tag{6}$$

Она удовлетворяет алгебраическому требованию перехода к комплексно-сопряженным величинам и требованию, чтобы величины одного класса, как, например, $U^{+\varepsilon}$, $(U^{-\varepsilon})^*$, преобразовывались одинаково. Кроме того, она не противоречит возможным условиям вещественности типа $U^{+\varepsilon} = (U^{-\varepsilon})^*$ или $U^{-\varepsilon} = (U^{+\varepsilon})^*$. При подстановке (6) уравнения (5) остаются инвариантными.

Рассмотрим опять тензоры четного ранга (скаляры, тензоры второго ранга и т. д.), являющиеся квадратичными или билинейными формами от U и U^*. По соображениям, аналогичным приведенным выше, они будут:

$$\begin{aligned} T \sim & \sum U^{+\varepsilon}U^{+\varepsilon} + \sum U^{-\varepsilon}U^{-\varepsilon} + \sum U^{+\varepsilon}kU^{-\varepsilon} + \sum U^{+\varepsilon}(U^{-\varepsilon})^* + \sum U^{-\varepsilon}(U^{+\varepsilon})^* + \\ & + \sum (U^{-\varepsilon})^* kU^{-\varepsilon} + \sum (U^{+\varepsilon})^* kU^{+\varepsilon} + \sum (U^{-\varepsilon})^* k (U^{+\varepsilon})^* + \sum (U^{-\varepsilon})^* (U^{-\varepsilon})^* + \\ & + \sum (U^{+\varepsilon})^* (U^{+\varepsilon})^*. \end{aligned} \tag{7}$$

Тензоры нечетного ранга (векторы и т. д.) должны иметь вид:

$$\begin{aligned} S \sim & \sum U^{+\varepsilon}kU^{+\varepsilon} + \sum U^{-\varepsilon}kU^{-\varepsilon} + \sum U^{+\varepsilon}U^{-\varepsilon} + \sum U^{+\varepsilon}k(U^{-\varepsilon})^* + \sum U^{-\varepsilon}k(U^{+\varepsilon})^* + \\ & + \sum U^{-\varepsilon}(U^{-\varepsilon})^* + \sum U^{+\varepsilon}(U^{+\varepsilon})^* + \sum (U^{-\varepsilon})^*(U^{-\varepsilon})^* + \sum (U^{+\varepsilon})^* k (U^{+\varepsilon})^* + \\ & + \sum (U^{-\varepsilon})^*(U^{+\varepsilon})^*. \end{aligned} \tag{8}$$

Подстановка (6) приводит к результатам, противоположным результатам подстановки (2); тензоры четного ранга меняют знак, а нечетного — не меняют:

$$T \to -T, \qquad S \to +S.$$

Следовательно, при полуцелом спине нельзя ввести положительно-определенную плотность энергии или положительно-определенную полную энергию. Последнее следует из того, что при подстановке (6) плотность энергии в каждой пространственно-временно́й точке меняет знак, а следовательно, меняет знак и полная энергия.

Следует подчеркнуть, что теория отнюдь не обязательно должна исходить из волновых уравнений первого порядка [8]. Более того, остается также открытым вопрос о том, инвариантна ли теория относительно пространственных отражений ($\mathrm{x}' = -\mathrm{x}$, $x_0' = x_0$). Поэтому наша схема включает и двухкомпонентные волновые уравнения Дирака (с нулевой массой покоя).

---

[8] В то же время мы исключаем операции типа $(\varkappa^2 + k^2)^{1/2}$, действующие на конечных расстояниях в координатном пространстве.

Из этих рассмотрений не следует, что при целых спинах всегда существует определенная плотность энергии, а при полуцелых — определенная плотность заряда. Действительно, как показал Фирц [9], при спине больше 1 плотности не удовлетворяют этому требованию. Однако (в c-числовой теории) при полуцелых спинах существует определенный полный заряд, а при целых — определенная полная энергия. Спин $^1/_2$ отличается тем, что для него можно ввести определенную плотность заряда, а спины 0 и 1 — тем, что можно ввести определенную плотность энергии. Тем не менее современная теория допускает любые значения спиновых квантовых чисел элементарных частиц, так же как и любые значения массы покоя, электрического заряда и магнитного момента частиц.

§ 4. Квантование полей в отсутствие взаимодействия. Связь спина и статистики

Невозможность удовлетворительного с физической точки зрения определения плотности частиц в случае целого спина и плотности энергии в случае полуцелых спинов в c-числовой теории указывает на то, что невозможно дать удовлетворительную интерпретацию теории в рамках задачи одного тела [10]. Действительно, все релятивистски-инвариантные теории приводят к частицам, которые могут во внешнем поле излучаться и поглощаться в виде пар с противоположным зарядом (в случае электрически заряженных частиц) или в виде отдельных частиц (в случае нейтральных частиц). Поэтому поля должны подвергаться вторичному квантованию. Мы не будем для этого применять канонический формализм, при котором время и пространство резко разделены и который удобен лишь при отсутствии дополнительных условий на канонические переменные [11]. Вместо этого мы здесь применим обобщение метода, впервые использованного Иорданом и Паули для электромагнитного поля [12]. Этот метод особенно удобен при отсутствии взаимодействия, когда все поля $U^{(r)}$ удовлетворяют волновому уравнению второго порядка

$$\Box U^{(r)} - \varkappa^2 U^{(r)} = 0, \tag{9}$$

где

$$\Box \equiv \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2},$$

а $\varkappa_0$ — масса покоя частиц (в единицах $\hbar/c$).

[9] *M. Fierz.* Helv. phys. acta, 1939, **12**, 3.

[10] Поэтому автор считает неубедительным первоначальный аргумент Дирака, согласно которому уравнение поля должно быть первого порядка.

[11] Из-за наличия таких условий канонический формализм неприменим для спина > 1; поэтому обсуждение связи спина и статистики в работе де Вета (*J. S. de Wet.* Phys. Rev., 1940, 57, 646), основанное на этом формализме, не является достаточно полным.

[12] Последовательное развитие этого метода ведет к многовременному формализму Дирака, изложенному в монографии: *P. A. M. Dirac.* Quantum Mechanics. 2nd ed. Oxford, 1935. (Русск. пер.: *П. А. М. Дирак.* Принципы квантовой механики. Изд. 2-е. М.— Л., ОНТИ, 1937.— *Ред.*).

Для вторичного квантования важную роль играет инвариантная D-функция, которая удовлетворяет волновому уравнению (9) и задается в объеме периодичности собственных функций следующим выражением:

$$D(\mathbf{x}, x_0) = \frac{1}{V}\sum \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]\,\frac{\sin k_0 x_0}{k_0}, \tag{10}$$

или в пределе $V \to \infty$

$$D(\mathbf{x}, x_0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]\,\frac{\sin k_0 x_0}{k_0}. \tag{11}$$

Под k_0 мы понимаем положительный корень

$$k_0 = +(k^2 + \varkappa^2)^{1/2}. \tag{12}$$

D-функция определена единственным образом условиями:

$$\Box D - \varkappa^2 D = 0, \qquad D(\mathbf{x}, 0) = 0, \qquad \left(\frac{\partial D}{\partial x_0}\right)_{x_0=0} = \delta(\mathbf{x}). \tag{13}$$

При $\varkappa = 0$ мы имеем просто

$$D(\mathbf{x}, x_0) = \{\delta(r - x_0) - \delta(r + x_0)\}/4\pi. \tag{14}$$

Это выражение определяет также особенность $D(\mathbf{x}, x_0)$ на световом конусе при $\varkappa \neq 0$. Но в последнем случае D больше не является отличной от нуля внутри конуса. Для этой области находим [13]

$$D(\mathbf{x}, x_0) = -\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}F(r, x_0),$$

где

$$F(r, x_0) = \begin{cases} J_0[\varkappa(x_0^2 - r^2)^{1/2}] & \text{при} \quad x_0 > r, \\ 0 & \text{при} \quad r > x_0 > -r, \\ -J_0[\varkappa(x_0^2 - r^2)^{1/2}] & \text{при} \quad -r > x_0. \end{cases} \tag{15}$$

Скачок функции F от $+$ до $-$ на световом конусе соответствует δ-образной особенности D на этом конусе. Для дальнейшего решающее значение имеет тот факт, что D обращается в нуль вне конуса, т. е. при $r > x_0 > -r$.

Вид множителя d^3k/k_0 определяется тем фактом, что d^3k/k_0 инвариантно на гиперболоиде (k) четырехмерного импульсного пространства $(\mathbf{k}, k_0)$. По этой причине помимо D существует еще одна функция, которая является инвариантной и удовлетворяет уравнению (9), а именно

$$D_1(\mathbf{x}, x_0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]\,\frac{\cos k_0 x_0}{k_0}. \tag{16}$$

При $\varkappa = 0$ находим

$$D_1(x, x_0) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{r^2 - x_0^2}. \tag{17}$$

---

[13] См. *P. A. M. Dirac.* Proc. Cambridge Philos. Soc., 1934, **30**, 150.

Вообще имеем

$$D_1(\mathrm{x}, x_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}F_1(r, x_0),$$

где

$$F_1(r, x_0) = \begin{cases} N_0\,[\varkappa (x_0^2 - r^2)^{1/2}] & \text{при} \quad x_0 > r, \\ -H_0^{(1)}\,[i\varkappa (r^2 - x_0^2)^{1/2}] & \text{при} \quad r > x_0 > -r, \\ N_0\,[\varkappa (x_0^2 - r^2)^{1/2}] & \text{при} \quad -r > x_0. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь N_0 — функция Неймана и $H_0^{(1)}$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого порядка. Наиболее сильная сингулярность D-функции на поверхности светового конуса определяется в общем соотношением (17).

Однако в дальнейшем мы будем постулировать, что *все физические величины на конечном расстоянии вне светового конуса* (при $|x_0' - x_0''| < |\mathrm{x}' - \mathrm{x}''|$) *коммутируют* [14]. Отсюда следует, что скобки для всех величин, удовлетворяющих волновому уравнению (9), можно выразить через D-функцию и конечное число ее производных, не используя функции D_1. То же самое верно и для скобок со знаком $+$, так как в противном случае градиентно-инвариантные величины, представляющие собой билинейные комбинации $U^{(r)}$, как, например, плотность заряда, были бы не коммутативны в двух точках, разделенных пространственно-подобным интервалом [15].

Наш постулат оправдывается тем, что измерения в двух точках, разделенных пространственно-подобным интервалом, никогда не могут влиять друг на друга, так как никакие сигналы не могут распространяться со скоростями, превышающими скорость света. Теории, в которых при квантовании использовалась бы функция D_1, фундаментально отличались бы по своим выводам от известных теорий.

Мы сможем сделать дальнейшие заключения о числе производных D-функции, которые могут встречаться в скобочных выражениях, если учтем инвариантность теорий относительно преобразований собственной группы Лоренца и используем результаты предыдущего параграфа о разбиении тензоров на классы. Допустим, что величины $U^{(r)}$ упорядочены так, что каждая компонента поля состоит лишь из величин одного класса. Рассмотрим, в частности, скобки, составленные из компоненты поля $U^{(r)}$ и комплексно-сопряженной ей величины

$$[U^{(r)}(\mathrm{x}', x_0'), U^{*(r)}(\mathrm{x}'', x_0'')].$$

Здесь мы будем различать два случая: полуцелого и целого спинов. В первом случае это выражение, согласно (8), преобразуется при преобразова-

---

[14] Для канонического формализма квантования этот постулат выполнен явным образом. Однако этот постулат является значительно более общим, чем сам канонический формализм.

[15] См. *W. Pauli*. Ann Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 137, особенно § 3. (Русск. пер. см. с. 244.— *Ред.*).

ниях Лоренца как тензор нечетного ранга, а во втором — как тензор четного ранга. Поэтому при полуцелом спине

$$[U^{(r)}(\mathbf{x}', x_0'),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}'', x_0'')] =$$

$=$ нечетному числу производных функции $D(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'', x_0' - x_0'')$, (19а)

и аналогично при целом спине

$$[U^{(r)}(\mathbf{x}', x_0'),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}'', x_0'')] =$$

$=$ четному числу производных функции $D(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'', x_0' - x_1'')$. (19б)

Выражения (19а), (19б) следует понимать в том смысле, что в правой части равенства может стоять сложная сумма выражений указанного типа. Рассмотрим теперь выражение

$$X = [U^{(r)}(\mathbf{x}', x_0'),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}'', x_0'')] + [U^{(r)}(\mathbf{x}'', x_0''),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}', x_0')], \quad (20)$$

симметричное по отношению к обеим точкам. Так как D является четной функцией пространственных координат и нечетной функцией времени, в чем легко убедиться из уравнений (11) или (15), то из симметрии X следует, что X равно произведению нечетного числа временно-подобных производных от $D(x' - x'', x_0' - x_0'')$. Это полностью согласуется с (19а) для полуцелого спина, но противоречит (19б) для целого спина, если только X не обращается в нуль. Поэтому для целого спина

$$[U^{(r)}(\mathbf{x}', x_0'),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}'', x_0'')] + [U^{(r)}(\mathbf{x}'', x_0''),\ U^{*(r)}(\mathbf{x}', x_0')] = 0. \quad (21)$$

До сих пор мы не проводили различия между двумя случаями — статистикой Бозе и принципом запрета. В первом случае мы имеем обычные скобки со знаком —, во втором, согласно Иордану и Вигнеру,— скобки

$$[A, B]_+ = AB + BA$$

со знаком $+$. *Если в (20) подставить скобки со знаком $+$, то мы придем к алгебраическому противоречию*, так как левая часть существенно положительна при $x' = x''$ и может обращаться в нуль только, если $U^{(r)}$ и $U^{*(r)}$ равны нулю [16].

[16] К этому противоречию можно прийти также, разлагая $U^{(r)}$ по собственным гармоникам:

$$U^{*(r)}(\mathbf{x}, x_0) = V^{-1/2} \sum_k \{U_+^*(k) \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)] + U_-(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)]\},$$

$$U^{(r)}(\mathbf{x}, x_0) = V^{-1/2} \sum_k \{U_+(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)] + U_-^*(k) \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)]\}.$$

Тогда из (21) вытекает, в частности, соотношение

$$[U_+^*(k),\ U_+(k)] + [U_-(k),\ U_-^*(k)] = 0,$$

которое для скобок со знаком $+$ может выполняться лишь при $U_\pm(k)$ и $U_\pm^*(k)$, равных нулю.

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: *при целом спине квантование согласно принципу запрета невозможно. Для этого вывода существенно, что применение функции* D_1 *вместо* D *запрещено из общих соображений.*

С другой стороны, формально возможно квантование теории для полуцелого спина по статистике Бозе — Эйнштейна, но при этом *энергия системы, согласно общим результатам предыдущего параграфа, не была бы положительна.* Так как из физических соображений ее следует считать положительной, необходимо применять принцип запрета в сочетании с дираковской теорией дырок.

Доказательство того, что возможна теория с положительной полной энергией для целых (полуцелых) спинов с квантованием согласно статистике Бозе (принципу запрета), приводится в уже упоминавшейся работе Фирца. В другой работе Фирца и Паули [17] рассмотрен случай электромагнитного поля, а также связь специального случая спина, равного 2, с теорией гравитационного поля Эйнштейна.

В заключение мы хотели бы отметить, что установление связи спина со статистикой, по нашему мнению, является одним из наиболее существенных приложений специальной теории относительности.

Поступила 19 августа 1940 г.

Цюрих,
Физический институт Высшей технической школы
Принстон,
Институт перспективных исследований

[17] *M. Fierz, W. Pauli.* Proc. Roy. Soc. London, 1939, **A173**, 211. (Русск. пер. см. с. 318.— *Ред.*).

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЕМЕНТА В СЛУЧАЕ НУЛЕВОЙ МАССЫ ПОКОЯ *

§ 1. Введение

В общей теории относительности линейный элемент, квадрат которого ds^2 задается квадратичной формой от дифференциалов координат

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \qquad (i, \ k = 1, \ldots, 4), \tag{1}$$

имеет абсолютный смысл; его численное значение определяется непосредственно с помощью естественных масштабных линеек и часов. Поэтому в общей теории относительности законы природы *не* инвариантны относительно преобразования линейного элемента вида

$$ds' = f(x) \cdot ds, \quad g'_{ik} = f^2(x)\, g_{ik}, \tag{2}$$

где $f(x)$ может быть совершенно произвольной функцией координат. Вряд ли стоит выдвигать и требование *общей* ковариантности законов природы относительно таких преобразований [1], сохраняющих лишь отношения компонент g_{ik} и, следовательно, оставляющих инвариантным световой конус $ds^2 = 0$ (в дальнейшем мы будем для краткости называть их «конформными преобразованиями»), если учесть, что материальные элементарные частицы обладают отличными от нуля значениями массы покоя. Согласно квантовой теории, умножение величины, обратной массе покоя, на h/c приводит к возникновению естественной абсолютной единицы длины.

С другой стороны, хорошо известно, что уравнения Максвелла инвариантны относительно конформных преобразований (2). Тем более удивительно, что обычное скалярное волновое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\, g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^k}\right) = 0 \quad (\text{где } g \equiv \mathrm{Det}\, \| g_{ik} \|),$$

которое, согласно представлениям квантовой теории, описывает частицы с нулевой массой покоя и без спина, *не обладает* инвариантностью относительно конформных преобразований.

---

* *Über die Invarianz der Dirac'schen Wellengleichungen gegenüber Ähnlichkeitstransformationen des Linienelementes im Fall verschwindender Ruhmasse.*— Helv. phys. acta, 1940, 13, 204—208.

[1] Как известно, это требование играло некоторую роль в теории Г. Вейля, где преобразование (2) появлялось в связи с группой градиентных преобразований

$$\varphi'_i = \varphi_i - 2\,\frac{1}{f}\,\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

электрических потенциалов. Независимо от преобразований электрических потенциалов «конформную инвариантность» рассматривал Эйнштейн [*A. Einstein.* Berl. Ber. Math.-phys. Kl., 1921, S. 261. (Русск. пер.: *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. 2. М., «Наука», 1966, с. 105.— *Ред.*)].

В связи с этим представляет интерес исследовать поведение волновых уравнений Дирака, соответствующих частицам со спином $^1/_2$, относительно конформных преобразований (2). Ниже будет показано, что в частном случае, когда масса покоя частиц равна нулю, уравнения Дирака так же, как и уравнения Максвелла, обладают свойством конформной инвариантности. Волновые функции при этом преобразуются так, что компоненты вектора плотности 4-тока остаются инвариантными [2].

§ 2. Математические выкладки

Мы следуем здесь той же формулировке волнового уравнения Дирака в гравитационном поле, которая была дана Шредингером [3]. Пусть x^k — четыре вещественные координаты. Условимся впредь, что в квадрате линейного элемента временно́му измерению отвечает положительное, а трем пространственным измерениям — отрицательные собственные значения квадратичной формы (2). В случае специальной теории относительности ds^2 перейдет в $-d\mathbf{x}^2 + (dx^4)^2$. Кроме того, пусть четырехрядные квадратные матрицы γ_i удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i = 2g_{ik}. \tag{3}$$

Тогда уравнения Дирака в гравитационном поле можно записать в виде

$$\gamma^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_k\right)\psi = i\mu\psi, \tag{4}$$

где, как обычно, поднятие индекса у γ^k осуществляется с помощью g^{ik}. Матрицы Γ_k должны удовлетворять соотношениям

$$\Gamma_k\gamma_i - \gamma_i\Gamma_k = \frac{\partial\gamma_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^r\gamma_r, \tag{5}$$

где Γ_{ik}^r — обычный символ Кристоффеля:

$$\Gamma_{ik}^r = \frac{1}{2}g^{rs}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s}\right). \tag{6}$$

---

[2] Проблема, поставленная в этой заметке, возникла из переписки с Э. Шредингером, в работах которого по собственным колебаниям расширяющейся Вселенной [*E. Schrödinger*, Physica, 1939, 6, 899; выражаю благодарность г. Шредингеру, предоставившему мне возможность ознакомиться с последней работой до ее публикации] отчетливо показано различие между скалярным волновым уравнением, с одной стороны, и уравнениями Дирака и Максвелла (в том числе и при нулевой массе покоя) — с другой.

[3] *E. Schrödinger*. Berl. Ber. Math.-phys. Kl., 1932, S. 105, с дополнениями Баргмана (*V. Bargmann*. Ibid., S. 346). Ср. также *W. Pauli*. Ann. Phys., 1933, 18, 337, где дается несколько более общая трактовка уравнений Дирака с пятью однородными координатами.

Соотношения (5) не накладывают на следы матриц Γ_k никаких ограничений. Потребуем, чтобы

$$\text{След } (\Gamma_k + \Gamma_k^\dagger) = \frac{\partial F}{\partial x^k}. \quad (7)$$

Здесь и далее знаком $\dagger$ будет обозначаться матрица, эрмитово-сопряженная с данной. Следуя Шредингеру, можно предположить, что мнимая часть следа Γ_k пропорциональна 4-потенциалу внешнего электромагнитного поля.

Выписанные уравнения инвариантны не только относительно преобразований координат x^k, но и относительно произвольных S-преобразований $\psi' = S\psi$ спинорного пространства (на определитель S никаких ограничений не накладывается), причем преобразованиям координат, не меняющих g_{ik}, отвечает S-преобразование спиноров ψ при фиксированных γ_i.

Волновые уравнения (4) наполняются физическим содержанием лишь после того, как выписан 4-ток или аналогичная физическая величина, построенная из ψ и ψ^* и билинейная по ним. Если β — некоторая матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$\gamma_i^\dagger = \beta\gamma_i\beta^{-1}, \qquad \beta^\dagger = \beta, \quad (8)$$

причем матрица $\beta\gamma_i$ — эрмитова, то вещественный вектор плотности тока

$$\mathfrak{s}^k = s^k\sqrt{|g|} = \psi^*\beta\gamma^k\sqrt{|g|}\,\psi \quad (9)$$

удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^k}{\partial x^k} = 0, \quad (10)$$

если величина F, определяемая формулой (7), связана с определителем матрицы β соотношением

$$F = -\ln \operatorname{Det} \beta. \quad (11)$$

Оно получается из равенства

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_k} + \Gamma_k^\dagger\beta + \beta\Gamma_k = 0$$

умножением на β^{-1} и взятием следа. Если γ^{0k} — матрицы Дирака, удовлетворяющие соотношению $\gamma_i^0\gamma_k^0 + \gamma_k^0\gamma_i^0 = 2\delta_{ik}$, то в предельном случае специальной теории относительности в силу принятого нами соглашения о знаках в ds^2 матрицы γ_i переходят в

$$\gamma_\alpha = i\gamma_\alpha^0 \quad \text{при} \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad \text{и} \quad \gamma_4 = \gamma_4^0.$$

Поэтому, учитывая (8) и (11), можно положить

$$\beta = \gamma_4^0.$$

Теперь мы уже можем выяснить, как ведет себя волновое уравнение (4) при конформном преобразовании (2). Из (3) получаем

$$\gamma_i' = f\gamma_i, \tag{12}$$

в то время символы Кристоффеля (6) преобразуются по закону

$$\Gamma'^r_{ik} = \Gamma^r_{ik} + \frac{1}{f}\left(\delta^r_i \frac{\partial f}{\partial x^k} + \delta^r_k \frac{\partial f}{\partial x^i} - g_{ik}g^{rs}\frac{\partial f}{\partial x^s}\right). \tag{13}$$

Вводя для краткости обозначение

$$\gamma_{[ik]} = \frac{1}{2}(\gamma_i\gamma_k - \gamma_k\gamma_i)$$

и разрешая уравнения (5) относительно Γ_k', находим

$$\Gamma_k' = \Gamma_k + \frac{1}{2}\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x^s}g^{rs}\gamma_{[rk]} + k\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{14}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями

$$\gamma_{[rk]}\gamma_i - \gamma_i\gamma_{[rk]} = 2(\gamma_r g_{ik} - g_{ir}\gamma_k),$$

а произвольный численный множитель k в выражении для следа Γ_k' определили из уравнения

$$\text{След } \Gamma_k' = \text{След } \Gamma_k + 4k\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

При этом из (7) получилось соотношение

$$F' = F + 4(k + k^*)\ln f. \tag{15}$$

Принимая во внимание, что

$$\gamma^k\gamma_{[rk]} = -3\gamma_r,$$

получаем из (14)

$$\gamma_k'\Gamma_k' = \frac{1}{f}\left[\gamma^k\Gamma_k + \left(k - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x^r}\gamma^r\right].$$

Если

$$\psi' = \Omega f^{-3/2+k}, \tag{16}$$

то из

$$\gamma'^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_k'\right)\psi' = i\mu\psi'$$

следует, что

$$\gamma^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_k\right)\Omega = i\mu f\Omega. \tag{17}$$

Учитывая (8), получаем из (11) и (15)

$$\beta' = \beta f^{-(k+k')}, \tag{18}$$

а поскольку $\sqrt{|g|'} = \sqrt{|g|}\, f^4$, то

$$\psi^* \beta' \gamma'^k \sqrt{|g|'} \psi = \Omega^* \beta \gamma^k \sqrt{|g|}\, \Omega. \qquad (19)$$

Мы видим, что массовый член в (17) нарушает конформную инвариантность системы уравнений[4]. Однако в частном случае при $\mu = 0$, пользуясь формулами (16) и (17), можно положить

$$\Omega = \psi, \quad \psi' = \psi f^{-3/2+k} \text{ при } \mu = 0. \qquad (20)$$

Тогда из (9) и (19) будет следовать упоминавшаяся во введении инвариантность вектора плотности:

$$\mathfrak{s}'^k = \mathfrak{s}^k \text{ при } \mu = 0. \qquad (21)$$

[4] В этой связи хотелось бы обратить внимание на то, что во всякой конформно-инвариантной теории след $\sum_i T_{ii}$ тензора энергии T_{ik}, как это следует из принципа действия $\delta \int L d^4x = 0$ и конформной инвариантности функции Лагранжа, обращается в нуль. В случае отличной от нуля массы покоя это условие не выполняется.

1941

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ *[1]

I. ТРАНСФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 1. Единицы и обозначения

Поскольку любая теория принимает требования теории относительности и квантовой теории за основные гипотезы, в качестве единиц естественно выбрать $\hbar$ — постоянную Планка, деленную на 2π, и c — скорость света в пустоте. Это означает, что размерности всех величин с помощью умножения на соответствующие степени $\hbar$ и c приводятся к размерности той или иной степени длины. Например, величина E будет в дальнейшем означать энергию, разделенную на $\hbar c$, т. е. величину с размерностью $см^{-1}$; g будет означать импульс, выраженный в единицах $\hbar$, и будет также иметь размерность $см^{-1}$. Момент количества движения P в единицах $\hbar$ является безразмерным. Нулевую размерность в единицах $(\hbar c)^{1/2}$ имеет электрический заряд ε. Электромагнитный потенциал φ_i и напряженности электромагнитного поля $f_{ik} = -f_{ki}$ имеют в единицах $(\hbar c)^{1/2}$ соответственно размерности $см^{-1}$ и $см^{-2}$. Волновое число, соответствующее массе покоя частицы, будем в дальнейшем обозначать $\varkappa = mc/\hbar$.

Выбрав $\hbar$ и c основными единицами, мы должны были бы использовать в качестве временно́й координаты длину светового пути $x_0 = ct$. Однако наряду с x_0 мы будем употреблять и мнимую временну́ю координату $x_4 = ix_0 = ict$. Таким образом, тензоры с индексами, обозначаемыми латинскими буквами $i, k, \ldots$ и пробегающими значения от 1 до 4, содержат мнимую временну́ю компоненту. В связи с этим целесообразно пользоваться специальным правилом перехода к комплексно-сопряженным величинам. Для величин с индексом 0 звездочка будет означать комплексно-сопряженную величину в обычном смысле (например, $\overset{*}{s}_0$ комплексно сопряжено с плотностью заряда s_0; s_i — вектор тока). В общем случае под $\overset{*}{U}_{ik\ldots}$ мы будем понимать величину, комплексно-сопряженную $U_{ik\ldots}$, умноженную на $(-1)^n$, где n — число цифр 4 среди чисел $i, k, \ldots$ (например, $s_4 = is_0$, $\overset{*}{s}_4 = i\overset{*}{s}_0$).

Спиноры Дирака u_ρ, где $\rho = 1, \ldots, 4$, будут всегда употребляться с греческими индексами, пробегающими значения от 1 до 4; при этом $\overset{*}{u}_\rho$ означает величину, комплексно-сопряженную с u_ρ в обычном смысле.

Волновые функции (векторы или тензоры) будем обозначать большой буквой U с компонентами $U_i, U_{ik}, \ldots$ Свойства симметрии тензора иног-

* *Relativistic Field Theories of Elementary Particles.*— Rev. Med. Phys., 1941, 13, 203—232.

[1] Эта статья представляет собой переработанный вариант доклада, написанного к Сольвеевскому конгрессу 1939 г., который не был опубликован ввиду неблагоприятной обстановки.

да будут указываться отдельно. Электромагнитные и гравитационные поля занимают особое положение, так как они являются классическими, и масса покоя связанных с ними частиц равна нулю. Поэтому мы будем пользоваться для них обычными обозначениями φ_i, $f_{ik} = -f_{ki}$ и соответственно $g_{ik} = g_{ki}$.

Тензор энергии-импульса определен так, что $-T_{44}$ и $-iT_{k4}$, где $k = 1, 2, 3$, совпадают соответственно с плотностью энергии W и плотностью импульса G, измеренными в принятых нами естественных единицах.

§ 2. Вариационный принцип и тензор энергии-импульса; градиентное преобразование и вектор тока

а) *Случай отсутствия внешних полей.* Будем сначала рассматривать все величины как обычные c-числа и исходить из функции Лагранжа L, зависящей от произвольных функций $q^{(r)}$ координат x_i ($i = 1, \ldots, 4$) и от их первых производных

$$q_k^{(r)} = \frac{\partial q^{(r)}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

но не зависящей явно от координат x_i. Относительно действия на $q^{(r)}$ (собственных) преобразований Лоренца не нужно делать никаких специальных предположений; достаточно, чтобы вещественная функция L оставалась инвариантной по отношению к этим преобразованиям. Как известно, вариационный принцип

$$\delta \int L\left(q_k^{(r)}, q^{(r)}\right) d^4x = 0 \tag{2}$$

(вариация на концах предполагается равной нулю) определяет уравнения поля

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial q_k^{(r)}} - \frac{\partial L}{\partial q^{(r)}} = 0. \tag{3}$$

Тензор энергии-импульса можно получить из функции Лагранжа

$$T_{ik} = \sum_r \frac{\partial L}{\partial q_k^{(r)}} q_i^{(r)} - L\delta_{ik}; \tag{4}$$

при этом в силу (3) он будет удовлетворять уравнению непрерывности

$$\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{5}$$

Тензор T_{ik}, определенный уравнением (4), будем называть каноническим тензором энергии-импульса. Вообще говоря, он не симметричен, а плотность энергии не является положительно-определенной. В связи с этим необходимо помнить, что при заданных значениях интегралов энергии и импульса локализация энергии и импульса в пространстве однозначно

определяется лишь в гравитационной теории, в которой гравитационное поле придает тензору энергии-импульса непосредственный физический смысл.

Если взаимодействие отсутствует, то условие положительности полной энергии является необходимым. Однако, как мы увидим, во многих случаях оно выполняется лишь в q-числовой теории. Действуя в рамках этой теории, мы будем предполагать, что можем определять по своему усмотрению порядок сомножителей в выражениях для физических величин в том или ином частном случае.

Наряду с каноническим тензором энергии-импульса T_{ik} имеется тензор момента количества движения $M_{ij,k} = -M_{ji,k}$, который с помощью соотношения

$$P_{ij} = -P_{ji} = \int M_{ij,4} d^4x \tag{6}$$

при $i, j = 1, 2, 3$ определяет полный момент количества движения и который также удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\sum_k \frac{\partial M_{ij,k}}{\partial x_k} = 0. \tag{7}$$

Этот тензор проще всего получить, используя инвариантность функции Лагранжа относительно преобразований Лоренца (включающих и трехмерные вращения). При инфинитезимальном преобразовании Лоренца

$$\delta x_i = \sum_j \delta w_{ij} x_j,$$

где

$$\delta w_{ij} = -\delta w_{ji}, \tag{8}$$

величины $q^{(r)}$ в заданной пространственно-временной точке преобразуются следующим образом:

$$\delta q^{(r)} = \sum_{i<j} \sum_s S_{ij}^{(r,s)} q^s \delta w_{ij}. \tag{9}$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\delta q = \sum_{i<j} S_{ij,\text{оп}} q \delta w_{ij}. \tag{9a}$$

Следует заметить, что вариация

$$\delta q = q'(x + \delta x) - q(x)$$

отличается от

$$\delta^* q = q'(x) - q(x) = \delta q - \sum_i q_i \delta x_i = \sum_{i<j} \delta w_{ij} (x_i q_j - x_j q_i + S_{ij,\text{оп}} q). \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что

$$\delta^* q_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \delta^* q. \tag{10a}$$

Аналогичное соотношение для δq_k не выполняется.

Теперь вариацию интеграла $\int L dx$ можно представить в виде

$$\delta \int L\,dx = \int \delta^* L dx + \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (L \delta x_k) \right] dx, \tag{11}$$

где мы опять положили

$$\delta L = L'(x') - L(x), \qquad \delta^* L = L'(x) - L(x).$$

Если вариация $\delta^* L$ может быть получена с помощью инфинитезимального преобразования Лоренца, то вариация интеграла должна обращаться в нуль вследствие лоренц-инвариантности L. Из (3) и (10а) находим [2]

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_q \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta^* q + L \delta x_k \right] = 0.$$

Из равенства

$$\sum_q \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta^* q + L \delta x_k = \sum_{i<j} M_{ij,\,k} \delta w_{ij},$$

пользуясь соотношениями (11) и (4), можно получить выражение для тензора момента количества движения

$$M_{ij,\,k} = x_i T_{jk} - x_j T_{ik} + \sum_q \frac{\partial L}{\partial q_k} S_{ij,\,\text{оп}} q. \tag{12}$$

Этим завершается доказательство уравнения непрерывности (7). С помощью уравнения (5) его можно представить в виде

$$-T_{ij} + T_{ij} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_q \frac{\partial L}{\partial q_k} S_{ij,\,\text{оп}} q = 0. \tag{7а}$$

Итак, если определить антисимметричный по j и k тензор

$$f_{i,\,jk} = -f_{i,\,kj} \tag{13а}$$

с помощью соотношения

$$-f_{i,\,jk} + f_{j,\,ik} = \sum_q \frac{\partial L}{\partial q_k} S_{ij,\,\text{оп}} q, \tag{13б}$$

то согласно (7а) и (13) величина

$$\vartheta_{ij} = T_{ij} + \sum_k \frac{\partial f_{i,\,jk}}{\partial x_k} \tag{14}$$

симметрична по i и j:

$$\vartheta_{ij} = \vartheta_{ji}, \tag{14а}$$

[2] См. *W. Pauli*. Relativitätstheorie.— Encycl. math. Wiss., 1921, Bd. V/2, S. 539. (Русск. пер.: *В. Паули*. Теория относительности. М.—Л., Гостехиздат, 1947.—*Ред.*).

и удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\sum_k \frac{\partial \vartheta_{ik}}{\partial x_k} = 0. \qquad (14б)$$

Из (13а), (13б) однозначно следует, что

$$f_{i,\,jk} = \sum_q \frac{1}{2}\left[-S_{ij,\,\text{оп}} q \frac{\partial L}{\partial q_k} - S_{ki,\,\text{оп}} q \frac{\partial L}{\partial q_j} + S_{jk,\,\text{оп}} q \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]. \qquad (13в)$$

Необходимо подчеркнуть, что тензор ϑ_{ij} симметричен лишь в силу уравнений поля (3). Кроме того, согласно (12) и (13б)

$$x_i\vartheta_{jk} - x_j\vartheta_{ik} = M_{ij,\,k} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i f_{j,\,kl} - x_j f_{i,\,kl}). \qquad (14в)$$

Равенство интегралов энергии и импульса по пространственно-подобному объему, вычисленных от T_{i4} и ϑ_{i4}, следует из (14)

$$\int \vartheta_{i4} dV = \int T_{i4} dV. \qquad (15а)$$

Равенство для тензора момента количества движения

$$P_{ij} = \int M_{ij,\,4} dV = \int (x_i\vartheta_{j4} - x_j\vartheta_{i4})\, dV \qquad (15б)$$

получается из (14в) аналогичным образом.

Общее определение (14) симметричного тензора энергии-импульса было дано Белинфанте [3] и Розенфельдом [4]. Поскольку локализация энергии играет роль главным образом в теории гравитации, важно отметить, что тензор энергии-импульса, определяемый в теории гравитации [5], для частного случая специальной теории относительности переходит в приведенный выше тензор. Необходимо, однако, иметь в виду, что плотность энергии, получаемая из ϑ_{ik}, а именно $-\vartheta_{44}$, положительно определена лишь в специальных случаях.

Для подготовки к введению внешнего электромагнитного поля полезно разделить характеристики поля q на комплексные величины $U(x)$, комплексно-сопряженные им величины $U^*(x)$, которые считаются независимыми от $U(x)$, и вещественные величины $V(x)$. Каждая сумма по q разбивается на суммы по U, U^* и V, так что, например, тензор энергии-

---

[3] *F. J. Belinfante.* Physica, 1939, 6, 887. Связь с теорией гравитации см. Physica, 1940, 7, 305.

[4] *L. Rosenfeld.* Mém. Acad. Roy. Belgique, 1940, 6, 30. (Идея вывода симметричного тензора энергии-импульса и применение ее к гравитационному полю изложена также в кн.: *Л. Ландау, Е. Лифшиц.* Теория поля. М., Гостехиздат, 1941, § 90.— *Ред.*).

[5] *D. Hilbert.* Göttingen Nachr. Math. Phys., 1915, S. 395. Обобщение на случай спиноров см. *H. Weyl.* Z. Phys., 1929, 56, 330.

импульса принимает вид

$$T_{ik} = \sum_r \left(U_i^{*(r)} \frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}} + \frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}} U_i^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial V_k^{(r)}} V_i^{(r)} \right) - L\delta_{ik}. \tag{16}$$

Введем постоянное в пространстве и во времени изменение фазы величин $U^{(r)}$, $U^{*(r)}$:

$$U^{(r)} \rightarrow U^{(r)}e^{i\alpha}, \qquad U^{*(r)} \mapsto U^{*(r)}e^{-i\alpha} \tag{17}$$

как преобразование, допустимое даже при отсутствии внешних полей. Условимся считать, что функция Лагранжа L инвариантна относительно такого изменения фазы при любом постоянном значении α. Тогда дифференцирование L по фазе даст соотношение

$$\sum_r \left[U^{*(r)} \frac{\partial L}{\partial U^{(*)r}} + \sum_k U_k^{*(r)} \frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}} \right] = \sum_r \left[U^{(r)} \frac{\partial L}{\partial U^{(r)}} + \sum_k U_k^{(r)} \frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}} \right]. \tag{18}$$

В силу этого можно определить вектор s_k:

$$s_k = \varepsilon_i \sum_r \left[\frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}} U^{(r)} - U^{*(r)} \frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}} \right], \tag{19}$$

где ε — постоянная. Легко убедиться, что s_k удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\sum_k \frac{\partial s_k}{\partial x_k} = 0. \tag{20}$$

Мы интерпретируем s_k как электромагнитный ток. Разумеется, однозначно его можно определить лишь в том случае, если даны внешние электромагнитные поля. Вещественные поля, не допускающие преобразования фазы вида (17), описывают частицы, которые, вообще говоря, не могут быть источниками электромагнитных волн и поэтому не обладают ни электростатическими, ни магнитостатическими свойствами. Тем не менее само электромагнитное поле, которое в корпускулярной картине ассоциируется с фотонами, описывается вещественными полями.

Для простоты мы считали, что все комплексные поля, содержащиеся в L, принадлежат частицам с одним и тем же зарядом. Если бы мы хотели, чтобы эти поля отвечали частицам с различными зарядами, то необходимо было бы потребовать инвариантности L относительно преобразований типа (17) для нескольких $U^{(r)}$ с различными значениями α_r фазы α для каждого из полей. При этом α_r должны быть пропорциональны зарядам.

б) *Случай внешних электромагнитных полей.* Мы специально предполагаем, что все уравнения поля содержатся в соотношениях (3), являющихся следствием вариационного принципа, или вытекают из них, вследствие чего отпадает необходимость добавлять какие бы то ни было дополнительные условия. Это допущение позволяет ввести внешнее электромагнитное поле путем замены оператора $\partial/\partial x_k$, действующего на

$U^{(r)}$ в уравнении Лагранжа и в волновых уравнениях, оператором

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - i\varepsilon\varphi_k, \tag{21}$$

а того же оператора $\partial/\partial x_k$, действующего на $U^{*(r)}$, — оператором, комплексно-сопряженным D_k:

$$D_k^* = \frac{\partial}{\partial x_k} + i\varepsilon\varphi_k. \tag{21'}$$

При действии оператора $\partial/\partial x_k$ на вещественные поля $V^{(r)}$ такой замены производить не нужно; поэтому в дальнейшем вещественные поля рассматриваться не будут. Здесь φ_k означает электромагнитный потенциал (с размерностью, указанной в § 1), ε — заряд частицы в единицах $(\hbar c)^{1/2}$. Напряженность поля определяется выражением

$$f_{ik} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}. \tag{22}$$

Существование этого поля проявляется в том, что операторы D_k не коммутируют:

$$\begin{aligned} D_i D_k - D_k D_i &= -i\varepsilon f_{ik}, \\ D_i^* D_k^* - D_k^* D_i^* &= i\varepsilon f_{ik}. \end{aligned} \tag{22a}$$

Таким образом, новую функцию Лагранжа мы получим, переопределив величины $U_k^{(r)}$ и $U_k^{*(r)}$, но сохранив вид функциональной зависимости

$$L\,(U_k^{(r)},\ U^{(r)},\ U_k^{*(r)},\ U^{*(r)}).$$

В новой функции

$$U_k^{(r)} = D_k U^{(r)}, \quad U_k^{*(r)} = D_k^* U^{*(r)}. \tag{1'}$$

Уравнения, получаемые из вариационного принципа (2), при фиксированных φ_k, принимают вид:

$$\begin{aligned} D_k^* \frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}} - \frac{\partial L}{\partial U^{(r)}} &= 0, \\ D_k \frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}} - \frac{\partial L}{\partial U^{*(r)}} &= 0. \end{aligned} \tag{3'}$$

В производных по $U^{(r)}$ мы всегда считаем постоянными $U_k^{(r)}$ (а не $\partial U^{(r)}/\partial x_k$). Но если помимо этих уравнений в теории существуют некоторые дополнительные условия, то новые дополнительные условия, возникающие при подстановках вместо $\partial/\partial x_k$ операторов (21) и (21'), могут оказаться несовместимыми с другими уравнениями без введения дополнительных членов.

Построенная таким образом теория инвариантна относительно градиентного преобразования:

$$U^{(r)} \to U^{(r)} e^{i\alpha}, \quad U^{*(r)} \to U^{*(r)} e^{-i\alpha}, \tag{23а}$$

$$\varphi_k \to \varphi_k - \frac{1}{\varepsilon} i \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}, \tag{23б}$$

причем теперь α может быть произвольной функцией точки.

Это всегда верно, если функция Лагранжа в отсутствие внешнего поля инвариантна относительно преобразования (17) с постоянной фазой. Действительно, из (1′) следует, что соотношения

$$U_k^{(r)} \to U_k^{(r)} e^{i\alpha}, \quad U_k^{*(r)} \to U_k^{*(r)} e^{-i\alpha} \tag{23в}$$

верны также и для преобразований (23а), (23б). Кроме того, из градиентной инвариантности следует, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}} &\to \frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}} e^{-i\alpha}, \\ \frac{\partial L}{\partial U^{(r)}} &\to \frac{\partial L}{\partial U^{(r)}} e^{-i\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}} &\to \frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}} e^{i\alpha}, \\ \frac{\partial L}{\partial U^{*(r)}} &\to \frac{\partial L}{\partial U^{*(r)}} e^{i\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{24$^+$}$$

Именно поэтому выражения для операторов D^* в первом и D во втором уравнениях (3′) совместны.

Необходимо отметить различие между полями типа $U^{(r)}$, $U^{*(r)}$, преобразующимися под действием группы градиентных преобразований по формуле (23а) (такие преобразования мы будем называть градиентными преобразованиями первого рода), и такими полями, как электромагнитное поле, потенциалы которых испытывают градиентное преобразование второго рода (23б). Это различие проявляется в том, что лишь выражения, билинейные по U и U^*, связаны с физически измеримыми величинами, даже если соответствующее поле квантуется согласно статистике Бозе. С другой стороны, вещественные поля V и напряженности электромагнитного поля (квантующегося согласно статистике Бозе) являются измеримыми величинами. Отсюда следует, что в принципе непосредственным измерением могут быть получены лишь градиентно-инвариантные величины. (Значение точного равенства нулю массы покоя фотона для преобразований второго типа рассмотрено в § 2,в и 2,д ч. II.)

При расчетах, связанных с вектором тока и тензором энергии, полезно иметь в виду следующее. Пусть f^* — произвольная функция от $U^{(r)}$, $U^{*(r)}$, $U_k^{(r)}$, $U_k^{*(r)}$, которая умножается при градиентном преобразовании первого рода на $e^{-i\alpha}$, а g — другая функция этих величин, которая

умножается на $e^{i\alpha}$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f^* g) = (D_k^* f^*)\, g + f^*(D_k g),$$

так как члены с φ_k сокращаются. Аналогично для производной по x_k от градиентно-инвариантной функции Лагранжа мы получаем

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \sum_r \left[\frac{\partial L}{\partial U^{(r)}} D_k U^{(r)} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial U_i^{(r)}} D_k D_i U^{(r)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial L}{\partial U^{*(r)}} D_k^* U^{*(r)} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial U_i^{*(r)}} D_k^* D_i^* U^{*(r)} \right].$$

Члены, содержащие φ, сокращаются в силу равенства (18), остающегося справедливым при изменении $U_k^{(r)}$ и $U_k^{*(r)}$ согласно равенству (1′).

Определим, как и раньше, вектор тока s_k *и тензор энергии* T_{ik} *выражениями* (19) и (4). Согласно (3′), уравнение непрерывности (20) для тока остается в силе. Из тензора энергии-импульса мы получаем, используя (3′) и выражение для $\partial L/\partial x_k$:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \sum_r \left\{ [(D_k D_i - D_i D_k)\, U^{(r)}] \frac{\partial L}{\partial U_k^{(r)}} + [(D_k^* D_i^* - D_i^* D_k^*)\, U^{*(r)}] \frac{\partial L}{\partial U_k^{*(r)}} \right\}.$$

Таким образом, из (20) и (19) следует, что

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = f_{ik} s_k. \qquad (25)$$

Это уравнение должно выполняться для тензора энергии исходного поля U там, где есть внешнее электромагнитное поле, так как оно выражает существование силы Лоренца. Кроме того, именно уравнение (25) служит обоснованием нашей интерпретации s_k как четырехмерного вектора тока.

Мы еще не рассматривали создание электромагнитного поля полем U. Приведенные рассуждения наводят на мысль, что учесть этот эффект можно с помощью уравнения Максвелла $s_i = \partial f_{ik}/\partial x_k$, поскольку тогда будет выполняться уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(T_{ik} + S_{ik}) = 0,$$

где T_{ik} — тензор энергии поля U и

$$S_{ik} = f_{ir} f_{kr} - \frac{1}{4} f_{rs} f_{rs} \delta_{ik}$$

— тензор энергии электромагнитного поля. Однако использование корпускулярных представлений или вторичного квантования поля при таком способе генерации электромагнитного поля приводит к известным трудностям, связанным с бесконечной собственной энергией. Эти трудности еще не преодолены.

Рассмотрим теперь возможность включения в функцию Лагранжа дополнительных членов, зависящих явно от напряженностей поля f_{ik} и согласующихся с постулатом градиентной инвариантности. Первоначальное определение тока и уравнение непрерывности для тока сохраняют силу и в этом случае, но вместо (25) мы получаем [6]

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = f_{ik}s_k - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial f_{rs}}\frac{\partial f_{rs}}{\partial x_i}.$$

Это приводит к необходимости включения дополнительных членов в T_{ik} и s_k, так как для новых величин T'_{ik} и s'_k должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial T'_{ik}}{\partial x_k} = f_{ik}s'_k. \qquad (25')$$

Выражение для s'_k легче всего найти из уравнения, получающегося при вариации φ_k:

$$\delta \int L d^4x = -\int s'_k \delta\varphi_k d^4x.$$

Отсюда

$$s'_k = s_k - \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial L}{\partial f_{kl}}. \qquad (26)$$

Дополнительный член удовлетворяет уравнению непрерывности, так что равенство

$$\frac{\partial s'_k}{\partial x_k} = 0 \qquad (20')$$

также выполняется. Уравнение (25′) будет выполнено, если положить

$$T'_{ik} = T_{ik} - f_{ir}\frac{\partial L}{\partial f_{rk}}. \qquad (27)$$

Это можно проверить, используя уравнения Максвелла

$$\frac{\partial f_{ks}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_s} + \frac{\partial f_{si}}{\partial x_k} = 0,$$

вытекающие из (22).

Использование таких дополнительных членов для описания частиц, имеющих магнитный момент, мы рассмотрим во второй части (см. § 2,г и 3,а).

---

[6] Множитель $^1/_2$ в дополнительном члене появляется потому, что суммирование по r и s производится независимо. При этом условии для вариации напряженностей поля получается выражение

$$\delta L = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial f_{rs}}\delta f_{rs}.$$

II. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПОЛЕЙ

§ 1. Волновые поля частиц без спина

а) *Волновое уравнение, вектор тока и тензор энергии-импульса.* Простейшим примером релятивистски-инвариантного волнового уравнения является скалярное уравнение

$$\Box U - \varkappa^2 U = 0, \tag{1}$$

где

$$\Box = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{2}$$

$\varkappa = mc/\hbar$, m — масса покоя, $\hbar$ — квант действия, деленный на 2π. Вещественность функции U не предполагается.

Волновое уравнение (1) можно получить из вариационного принципа

$$\delta \int L d^4x = 0$$

(d^4x — четырехмерный элемент объема), если в качестве функции Лагранжа взять

$$L = \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \varkappa^2 U^* U. \tag{3}$$

Отсюда для вектора тока согласно уравнению (19) ч. I мы получаем [7]

$$s_k = \varepsilon_i \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_k} U - \frac{\partial U}{\partial x_k} U^* \right), \tag{4}$$

где ε — заряд частицы в единицах $(\hbar c)^{1/2}$. Этот вектор тока удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial s_k}{\partial x_k} = 0. \tag{5}$$

Тензор энергии-импульса T_{ik} определяется в этом случае равенством

$$T_{ik} = \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{\partial U^*}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_i} - L\delta_{ik}. \tag{6}$$

Он также удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{7}$$

Тензор T_{ik} симметричен; кроме того, плотность энергии — T_{44} обладает

---

[7] Такой порядок сомножителей удобен в q-числовой теории, так как в этом случае мы избегаем нулевого заряда.

весьма важным свойством: она положительно-определенна:

$$W = -T_{44} = -\frac{\partial U^*}{\partial x_4}\frac{\partial U}{\partial x_4} + \operatorname{grad} U^* \cdot \operatorname{grad} U + \varkappa^2 U^* U =$$
$$= \frac{\partial U^*}{\partial x_0}\frac{\partial U}{\partial x_0} + \operatorname{grad} U^* \cdot \operatorname{grad} U + \varkappa^2 U^* U. \qquad (8)$$

Волновое уравнение второго порядка часто бывает полезно преобразовать в следующую систему волновых уравнений первого порядка:

$$U_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \qquad \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \varkappa^2 U. \qquad (1')$$

Эта форма уравнений имеет больше общего с системой уравнений векторной теории, которую мы рассмотрим далее. Кроме того, уравнения (1') можно вывести из вариационного принципа, если взять функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{\partial U^*}{\partial x_i} U_i + U_i^* \frac{\partial U}{\partial x_i} - U_i^* U_i + \varkappa^2 U^* U \qquad (3')$$

и варьировать U_k, U и комплексно-сопряженные им величины независимо.

Упомянем, наконец, о теории псевдоскалярного поля, дуальной к теории, основанной на уравнениях (1'). В этой теории скаляр U заменяется псевдоскаляром U_{klmn}, антисимметричным по всем индексам, а вектор U_k — псевдовектором U_{klm}, также антисимметричным по всем индексам. Уравнения, аналогичные (1'), будут иметь вид:

$$U_{lmn} = \frac{\partial U_{klmn}}{\partial x_k},$$
$$\frac{\partial U_{lmn}}{\partial x_k} - \frac{\partial U_{mnk}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_{nkl}}{\partial x_m} - \frac{\partial U_{klm}}{\partial x_n} = \varkappa^2 U_{klmn}. \qquad (9)$$

б) *Собственные состояния в пространстве импульсов. Зарядово-сопряженные решения.* Как известно, самое общее решение уравнения (1) можно представить в виде суммы плоских волн. Если ввести в рассмотрение большой куб с длиной ребра, равной L, так что решения будут периодическими в кубической решетке с постоянной решетки L, то компоненты волновых чисел должны быть кратны $2\pi/L$.

Из волнового уравнения (1) следует, что волновые векторы (k_0, **k**) [8] удовлетворяют известному соотношению

$$k_0^2 = k^2 + \varkappa^2. \qquad (10)$$

Под k_0 будем всегда понимать положительный корень:

$$k_0 = +\sqrt{k^2 + \varkappa^2}. \qquad (10')$$

---

[8] В случаях, когда не может возникнуть недоразумения, векторы **k** и x будут набраны курсивом.

Запишем следующие разложения:

$$U^*(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k (2k_0)^{-1/2} \{U_+^*(k) \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0x_0)] + $$
$$+ U_-(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0)]\}, \qquad (11)$$

$$U(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k (2k_0)^{-1/2} \{U_+(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0)] + $$
$$+ U_+^*(k) \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0x_0)]\}. \qquad (11^*)$$

Обозначения здесь выбраны таким образом, что амплитуды разложения Фурье со звездочками умножаются на exp (ik_0x_0), а не имеющие звездочек — на exp $(-ik_0x_0)$. Величина $(2k_0)^{-1/2}$ берется всегда положительной.

Из формул (5) и (7) получаем для полной энергии, полного импульса и полного заряда следующие выражения:

$$E = -\int T_{44}dV = \sum_k k_0 [U_+^*(k) U_+(k) + U_-(k) U_-^*(k)], \qquad (12)$$

$$\mathbf{G} = \sum_k \mathbf{k} [U_+^*(k) U_+(k) + U_-(k) U_-^*(k)], \qquad (13)$$

$$e = \frac{1}{i}\int s_4 dV = \varepsilon \sum_k [U_+^*(k) U_+(k) - U_-^*(k) U_-(k)]. \qquad (14)$$

Уравнение (14) показывает, что собственные колебания с отрицательной частотой в U^* (и положительной частотой в U) отвечают состояниям с отрицательным зарядом. Это находится в согласии с тем фактом, что при перестановке U и U^* в (4) знак вектора тока изменяется на противоположный, а тензор энергии-импульса остается инвариантным. Таким образом, решение волнового уравнения U^*, комплексно-сопряженное данному решению $U(x, x_0)$, является «зарядово-сопряженным решением». Это согласуется также с рассмотрением задачи на основе общего принципа, изложенного в ч. I для случая наличия внешних электромагнитных полей, согласно которому волновое уравнение (1) должно быть заменено уравнением

$$\sum_i D_i^2 U - \varkappa^2 U = 0. \qquad (15)$$

Это уравнение остается справедливым при замене U и e на U^* и $-e$, так как D_k переходит в D_k^* [9].

В § 3, в будет показано, что при полуцелом спине соотношение между комплексно-сопряженными и зарядово-сопряженными решениями несколько сложнее.

Изложенная здесь теория относится к частицам без спина, так как при заданном $\mathbf{k}$ и заданном знаке k_0 существует лишь одно собственное состояние.

---

[9] Относительно теории образования пар, основанной на таком подходе, см. *W. Pauli, V. Weisskopf.* Helv. phys. acta, 1934, 7, 709. (Русск. пер. см. с. 194.— *Ред.*).

в) *Квантование.* Мы не хотим основывать последующие рассуждения на каноническом формализме, поскольку при этом вводится ненужное резкое различие между временем и пространством, что удобно лишь при отсутствии дополнительных условий, содержащих канонические переменные в данный момент. Здесь мы воспользуемся обобщением метода квантования, впервые примененным Иорданом и Паули для случая электромагнитного поля [10]. Кроме того, мы потребуем, чтобы для любой физической величины F, не зависящей явно от времени, выполнялось соотношение

$$\frac{dF}{dx_0} = i\,[H, F], \tag{16}$$

где H — оператор Гамильтона, выражающий полную энергию, деленную на $\hbar c$.

Величины $U_+(k)$, $U_+^*(k)$, $U_-(k)$, $U_-^*(k)$, определенные равенствами (11) и (11*), содержат время в явном виде в отличие от величин

$$\begin{aligned} u_\pm(k) &= U_\pm(k)\exp(-ik_0x_0), \\ u_\pm^*(k) &= U_\pm(k)\exp(+ik_0x_0), \end{aligned} \tag{17}$$

не зависящих явно от времени, поскольку их, не вводя явно x_0, можно выразить через U, U^*, $\partial U/\partial x_0$, $\partial U^*/\partial x_0$ [11]. Поскольку в отсутствие сил величины $U_\pm(k)$ постоянны, мы получаем из (16) соотношения:

$$\begin{aligned} i\,[H, u_\pm(k)] &= -ik_0u_\pm(k), \\ i\,[H, u_\pm^*(k)] &= ik_0u_\pm^*(k); \\ [H, U_\pm(k)] &= -k_0U_\pm(k), \\ [H, U_\pm^*(k)] &= k_0U_\pm^*(k). \end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим сначала квантование согласно статистике Бозе. Значения всех скобок вида

$$[U(k), U(k')],\ [U^*(k), U^*(k')],\ [U(k), U^*(k')],$$

где величинам U и U^* можно произвольно приписывать индексы $+$ или $-$, однозначно определяются из (12) и (18), если дополнительно предположить, что эти скобки сами являются c-числами. Действительно, из

[10] Логическое развитие этого метода, включающее взаимодействие частиц, дано многовременным формализмом Дирака. См. *P. A. M. Dirac.* Quantum Mechanics. Oxford, 1935. (Русск. пер.: *П. А. М. Дирак.* Принципы квантовой механики. Изд. 2-е. М., ОНТИ, 1937.— *Ред.*).

[11] Величины $U_\pm(k)$, $U_\pm^*(k)$ также весьма существенны в случае, когда имеется взаимодействие поля U с другими полями. Если при этом функция Гамильтона определяется выражением $H_0 + \Omega$, где H_0 — функция Гамильтона в отсутствие сил, а Ω — энергия взаимодействия, то уравнение (16) сводится к следующим:

$$\frac{dU_\pm(k)}{dx_0} = i\,[\Omega, U_\pm(k)], \qquad \frac{dU_\pm^*(k)}{dx_0} = i\,[\Omega, U_\pm^*(k)].$$

(12) и (18) следует, что только последняя из написанных скобок отлична от нуля и то лишь при $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ и одинаковых индексах (+ или —) у обеих величин. Из (18) находим, что

$$[U_+(k),\ U_-^*(k)] = [U_-(k),\ U_-^*(k)] = 1. \tag{19}$$

Из этих соотношений обычным путем получаем, что собственные значения величин

$$\begin{aligned} N_+(k) &= U_+^*(k)\, U_+(k), \\ N_-(k) &= U_-^*(k)\, U_-(k) \end{aligned} \tag{20}$$

являются целыми неотрицательными числами. Именно это делает допустимым обычный переход к корпускулярным представлениям. Из соотношений (12), (13) и (14) следует (в этом можно убедиться, пользуясь обычными методами), что $N_+(k)$ и $N_-(k)$ отвечают соответственно зарядам $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$ и одному и тому же импульсу $+\mathbf{k}$. Как видно из (12), для каждого значения $\mathbf{k}$ имеется нулевая энергия вакуума k_0; таким образом, нулевая энергия, приходящаяся на собственное состояние в вакууме, как и в случае электромагнитного поля, равна половине кванта ($^1/_2 k_0$).

Переходя к скобкам для самих функций поля $U(x, x_0)$, находим из (11) и (19), что

$$i\,[U(x, x_0),\ U(x', x_0')] = i\,[U^*(x, x_0),\ U^*(x', x_0')] = 0 \tag{21'}$$

и что

$$i\,[U(x, x_0), U^*(x', x_0')] = i\,[U^*(x, x_0), U(x', x_0')] = D(x - x', x_0 - x_0'). \tag{21}$$

Функция D в соотношении (21) определяется равенством

$$D(x, x_0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, \frac{\sin k_0 x_0}{k_0}\,, \tag{22}$$

а

$$k_0 = \sqrt{k^2 + \varkappa^2}.$$

Вид функции D однозначно определяется требованием, чтобы она удовлетворяла волновому уравнению

$$\Box D - \varkappa^2 D = 0 \tag{22'}$$

и соотношениям

$$D(x, 0) = 0, \qquad \left(\frac{\partial D}{\partial x_0}\right)_{x_0=0} = \delta(\mathbf{x}). \tag{22''}$$

При $\varkappa = 0$

$$D(x, x_0) = \frac{1}{4\pi r}\,[\delta(r - r_0) - \delta(r + r_0)]. \tag{23}$$

В общем случае при $\varkappa \neq 0$ это выражение по-прежнему имеет особенность на световом конусе, но при этом D уже не равна нулю внутри конуса

Действительно [12],

$$D(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}F(r, x_0), \qquad (24)$$

$$F(r, x_0) = \begin{cases} J_0(\varkappa\sqrt{x_0^2 - r^2}) & \text{при} \quad x_0 > r, \\ 0 & \text{при} \quad r > x_0 > -r, \\ -J_0(\varkappa\sqrt{x_0^2 - r^2}) & \text{при} \quad -r > x_0. \end{cases} \qquad (25)$$

Изменение на световом конусе значения F на множитель ± 1 соответствует δ-образному характеру особенности функции D. Для дальнейшего особенно важно, что D равна нулю вне светового конуса (т. е. при $r > x_0 > -r$).

Из соотношений (21) и (21′), продифференцировав их по x и подставив $x_0 = x_0'$, можно получить известные перестановочные соотношения:

$$i\,[U(x, x_0), \; U^*(x', x_0)] = 0,$$

$$i\left[\frac{\partial U(x, x_0)}{\partial x_0}, U^*(x', x_0)\right] = i\left[\frac{\partial U^*(x, x_0)}{\partial x_0}, U(x', x_0)\right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Рассмотрим теперь квантование в случае, когда выполняется принцип запрета. Исходя из функции Гамильтона (8) или (12), мы должны прежде всего потребовать, чтобы соотношения (18) выполнялись там, где скобки имеют свой прежний смысл. С другой стороны, выражения $[U(k), U(k')]_+$, $[U^*(k), U^*(k')]_+$, $[U(k), U^*(k')]_+$ являются c-числами. (Здесь скобка определена равенством $[AB]_+ = AB + BA$.) Из (18) следует, как и раньше, что первые две скобки всегда равны нулю, а последняя отлична от нуля лишь при $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ и одинаковых индексах $+$ или $-$ у величин, входящих в скобки. Далее,

$$U_+^*(k)\,U_+(k) + U_+(k)\,U_+^*(k) = 1,$$

$$U_-^*(k)\,U_-(k) + U_-(k)\,U_-^*(k) = -1.$$

Последнее равенство противоречит предположению, что величина U^* является эрмитово-сопряженной с U, так как при этом левая часть равенства должна быть существенно положительной. Однако это предположение необходимо для того, чтобы физические величины, как, например, плотность заряда s_0, имели вещественные собственные значения.

Можно также показать, что в теории скалярного поля квантование согласно принципу запрета нельзя провести без использования специальной функции Гамильтона и равенства (16). Наряду с функцией D имеется другая — инвариантная и удовлетворяющая волновому уравнению (1) — функция D_1, а именно:

$$D_1(x, x_0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{k_0}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \cos(k_0 x_0). \qquad (22')$$

[12] См. *P. A. M. Dirac*. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1934, **30**, 100.

При $\varkappa = 0$

$$D_1(x, x_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r^2 - x_0^2}. \tag{23'}$$

В общем случае можно положить

$$D_1(x, x_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F_1(r, x_0), \tag{24'}$$

где

$$F_1(r, x_0) = \begin{cases} N_0(\varkappa \sqrt{x_0^2 - r^2}) & \text{при} \quad x_0 > r \text{ или } -r < x_0, \\ iH_0^{(1)}(i\varkappa \sqrt{r^2 - x_0^2}) & \text{при} \quad r > x_0 > -r. \end{cases} \tag{25'}$$

Здесь N_0 — функция Неймана, $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода. Особенность D_1 на световом конусе определяется равенством (23) также и в общем случае при $\varkappa \neq 0$.

Поскольку скалярное поле должно удовлетворять волновому уравнению (1) и быть релятивистски-инвариантным, то единственно возможными являются соотношения

$$[U(x, x_0), U^*(x', x_0')]_\pm = cD(x - x', x_0 - x_0') + c_1 D_1(x - x', x_0 - x_0'), \tag{26}$$

где c и c_1 — постоянные. Поэтому мы постулируем в дальнейшем, что любые две физические величины, относительные координаты которых лежат вне светового конуса, коммутируют. Вследствие этого левая часть равенства (26) для таких точек должна обращаться в нуль, если взять знак плюс. Иначе мы получили бы некоммутативность в обычном смысле для величин, билинейных по U и U^* и инвариантных при градиентном преобразовании, например для плотности заряда [13].

Наш постулат оправдан тем фактом, что измерения в пространственно-временны́х точках, связанных пространственно-подобным интервалом, никогда не могут влиять друг на друга, так как сигналы не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света. Во всяком случае те теории, которые, вместо D или наряду с D, используют при квантовании функцию D_1, приводят к следствиям, весьма отличающимся от известных ныне.

Итак, если наш постулат о коммутативности выполнен, то постоянная c_1 в (26) должна обращаться в нуль, вследствие чего

$$[U(x, x_0), U^*(x', x_0')] = \text{const} \cdot D(x - x', x_0 - x_0'). \tag{21'}$$

Но если взять скобку с положительным знаком, то левая часть равенства будет существенно положительна при $\mathrm{x} = \mathrm{x}'$, $x_0 = x_0'$, а правая обра-

[13] См. *W. Pauli*. Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 137. Обобщение этого рассмотрения для целого спина см. *W. Pauli*. Phys. Rev., 1940, 58, 716. (Русск. пер. см. с. 244, 354.—*Ред.*).

тится в нуль для $x_0 = x_0'$. Таким образом, мы пришли к противоречию, аналогичному полученному выше [14].

В итоге мы показали, что в релятивистской теории частиц без спина, основанной на общих постулатах, квантование может происходить лишь согласно статистике Бозе — Эйнштейна.

г) *Вещественное поле.* В этом случае всегда $U = U^*$, вектор тока тождественно равен нулю и соответствующие частицы не могут породить электромагнитного поля. Функцию Лагранжа и тензор энергии-импульса можно записать в виде:

$$L = \frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\varkappa^2 V^2, \tag{27}$$

$$T_{ik} = \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_k} - L\delta_{ik}. \tag{27'}$$

Коэффициенты разложения Фурье (11) связаны дополнительным соотношением

$$V_-(k) = V_+(k), \qquad V_-^*(k) = V_+^*(k).$$

Это позволяет записать (11) в более простой форме

$$V(x, x_0) = (V)^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}\{V(k)\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0x_0)] + $$
$$+ V^*(k)\exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0x_0)]\}. \tag{28}$$

Энергия и импульс принимают вид:

$$E = \sum_k \frac{1}{2}k_0[V^*(k)V(k) + V(k)V^*(k)], \tag{29}$$

$$G = \sum_k \frac{1}{2}\mathbf{k}[V^*(k)V(k) + V(k)V^*(k)]. \tag{30}$$

Перестановочные соотношения (11) остаются в силе:

$$[V(k), V^*(k)] = 1, \tag{31}$$

а скобки $[V(k), V(k')]$, $[V^*(k), V^*(k')]$ и (при $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$) $[V(k), V^*(k')]$ обращаются в нуль. Из уравнения (29) видно, что нулевая энергия вакуума опять равна половине кванта, $^1/_2 k_0$, на каждое собственное состояние. Вместо (21) получаем

$$i[V(x, x_0), V(x', x_0')] = D(x - x', x_0 - x_0'). \tag{32}$$

---

[14] Это легко обнаружить также разложением функций U и U^* в ряд Фурье по пространственным компонентам. Если

$$u(k) = U_+(k) + U_-(k) \text{ и } u^*(k) = U_+^*(k) + U_-^*(k)$$

[см. (17)] — соответствующие амплитуды, то из (21') в случае применимости принципа запрета следует при $x_0 = x_0'$, что $[u(k), u^*(k)]_+ = 0$ для всех собственных состояний. Отсюда в свою очередь $U_+(k) = U_-(k) = 0$.

При квантовании согласно принципу запрета имеются две альтернативы: либо энергия становится постоянным c-числом, что невозможно, либо в правой части равенства (32) появляется функция D_1, что противоречит нашим прежним постулатам.

Следует отметить. что первоначальная форма теории с комплексной функцией U, очевидно, эквивалентна теории с двумя вещественными полями $V = V^*$ и $W = W^*$, соответствующими вещественной и мнимой частям U. В связи с этим целесообразно ввести множитель $1/\sqrt{2}$,чт обы в перестановочных соотношениях не появлялось никаких численных множителей. Поэтому положим

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(V + iW), \qquad U^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(V - iW). \tag{33}$$

Тогда из (21) следует, что

$$i\,[V(x, x_0),\ V(x', x_0')] = i\,[W(x, x_0),\ W(x', x_0')] = \\ = D(x - x',\ x_0 - x_0'), \qquad i\,[V(x, x_0),\ W(x', x_0')] = 0. \tag{34}$$

Тензор энергии-импульса (7) принимает вид:

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_k}\right] - L\delta_{ik}, \\ T = \frac{1}{2}\sum\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_0}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\varkappa^2(V^2 + W^2), \tag{35}$$

а вектор тока

$$s_k = \varepsilon\left[\frac{\partial W}{\partial x_k}V - \frac{\partial V}{\partial x_k}W\right]. \tag{36}$$

Если согласно (28) V и W разложить по собственным состояниям и воспользоваться перестановочными соотношениями вида (31), то энергию E и импульс G можно представить в виде суммы двух выражений вида (29) и (30), одно из которых зависит от V, а второе от W. С другой стороны, для полного заряда получится выражение

$$e = \varepsilon i \sum_k [W(k)\,V^*(k) - V(k)\,W^*(k)]. \tag{37}$$

Отсюда можно получить «сокращенную» теорию с одним вещественным полем V, если опустить W и положить вектор тока равным нулю.

§ 2. Волновые поля для частиц со спином 1

а) *с-числовая теория для случая, когда внешние поля отсутствуют.* Этот вопрос стоит сейчас в центре внимания, с тех пор как Юкава для объяснения зависимости силы взаимодействия протона и нейтрона от спина предположил, что мезон имеет спин 1. Схема Юкавы была развита затем Прока́.

Простейшая возможность обобщения теории, изложенной в § 1, заключается, по-видимому, во введении векторного поля U_k, удовлетворяющего волновому уравнению

$$\square U_k - \varkappa^2 U_k = 0, \tag{38}$$

компоненты которого рассматриваются как независимые скаляры. Но, как легко видеть, при такой формулировке компонента $U_4 = iU_0$ приводит к отрицательным членам в энергии, если знаки выбраны так, что пространственно-подобным компонентам вектора U_k соответствуют положительные члены в энергии. Эту трудность можно преодолеть, потребовав выполнения наряду с (38) дополнительного условия

$$\sum_k \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0. \tag{39}$$

Смысл этого условия становится особенно ясным в системе координат, в которой частица покоится, а волновое поле зависит периодически от времени, но не от пространственных координат. В этой системе равенство (39) требует обращения U в нуль. Отсюда ясно, что тогда вследствие (39) энергия обязательно положительна. Из лоренц-инвариантности теории следует, что и в общем случае полная энергия (объемный интеграл плотности энергии) положительна. Как мы увидим далее, можно показать, что в этом случае плотность энергии в любой пространственной точке также положительно-определенна.

Антисимметричный тензор $U_{ik} = -U_{ki}$, связанный с U_k так, как напряженности поля связаны с потенциалом в электродинамике, можно получить из U_k с помощью операции rot:

$$U_{ik} = \frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k}. \tag{40}$$

Из (40) следует, согласно (38) и (39), равенство

$$\sum_k \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_k} + \varkappa^2 U_i = 0. \tag{41}$$

Это соотношение существенно, так как оно показывает, что U_i однозначно определяется при заданных U_{ik} так же, как U_{ik} определяется заданием U_i согласно (40). Следовательно, при массе покоя, отличной от нуля, добавление к U_i градиента недопустимо. Поэтому при $\varkappa \neq 0$ не существует градиентного преобразования второго рода для U_i. Стоит отметить, что (38) и (39) вытекают из (40) и (41). Если продифференцировать (41) по x_i и просуммировать по i, то первый член обращается в нуль вследствие антисимметричности U_{ik} и получается (39). Подставляя затем (40) в (41), находим уравнение (36). Наконец, из (40) вытекают соотношения

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial U_{kl}}{\partial x_i} = 0. \tag{42}$$

Рассмотрение (40) и (41) как основных уравнений теории, а остальных уравнений как производных имеет известные преимущества, так как (40) и (41) можно вывести из вариационного принципа

$$\delta \int L d^4x = 0,$$

если положить

$$L = -\frac{1}{2} U_{ik} U_{ik}^{*} + \frac{1}{2} U_{ik}^{*} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_k^{*}}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i^{*}}{\partial x_k} \right) U_{ik} + \varkappa^2 U_i^{*} U_i. \tag{43}$$

(Здесь использовано обычное обозначение суммирования с помощью «немых индексов».) При варьировании величины U_i, $U_{ik} = -U_{ki}$ и сопряженные им должны варьироваться независимо.

Для канонического тензора энергии, определяемого согласно (4) ч. I, получается выражение

$$T_{ik} = U_{kr}^{*} \frac{\partial U_r}{\partial x_i} + \frac{\partial U_r^{*}}{\partial x_i} U_{kr} - L \delta_{ik}. \tag{44}$$

Его можно преобразовать в симметричный тензор. Согласно общим формулам (14) и (13в) ч. I, из (40) и (41) вытекает, что

$$T_{ik} = \vartheta_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_r} (U_{kr}^{*} U_i + U_i^{*} U_{kr}), \tag{45}$$

где

$$\vartheta_{ik} = \vartheta_{ki} = U_{ir}^{*} U_{kr} + U_{kr}^{*} U_{ir} + \varkappa^2 (U_i^{*} U_k + U_k^{*} U_i) - \delta_{ik} \left(\frac{1}{2} U_{rs}^{*} U_{rs} + \varkappa^2 U_r^{*} U_r \right). \tag{46}$$

Из (37) следует, с одной стороны, что

$$\frac{\partial \vartheta_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}, \tag{45а}$$

в силу чего из равенства второй дивергенции нулю получаем обращение в нуль и первой; с другой стороны, из (37) имеем

$$\int \vartheta_{i4} dV = \int T_{i4} dV, \tag{45б}$$

откуда ясно, что безразлично, как вычислять полную энергию и полный импульс — с помощью канонического тензора или симметричного тензора.

Вводя величины U_0, U_{0k},

$$U_4 = iU_0, \quad U_{4k} = iU_{0k}, \quad U_4^{*} = iU_0^{*}, \quad U_{4k}^{*} = iU_{0k}^{*} \quad (k = 1, 2, 3), \tag{47}$$

мы получаем из (41) для плотности энергии $-\vartheta_{44}$ выражение [15]

$$W = -\vartheta_{44} = \sum_{k=1}^{3} U_{0k}^{*} U_{0k} + \sum_{i \leqslant k}^{3} U_{ik}^{*} U_{ik} + \varkappa^2 \left(U_0^{*} U_0 + \sum_{k=1}^{3} U_k^{*} U_k \right). \tag{48}$$

Следовательно, плотность энергии является положительно-определенной, как и в скалярной теории.

Вектор тока, определенный согласно (19), ч. I, имеет вид

$$s_i = i\,(U_{ir}^{*} U_r - U_r^{*} U_{ir}). \tag{49}$$

Однако, как мы увидим, это выражение не является единственным, так как дополнительные члены в L, пропорциональные f_{ik}, могут изменить его даже в отсутствие внешних полей.

Соответствующую теорию для псевдовекторного поля мы наметим, не вдаваясь в детали. Вектор U_i заменяется тензором U_{lmn}, антисимметричным по всем индексам (псевдовектором), а U_{ik} — антисимметричным тензором такого же типа, как и U_{ik}. Уравнения (39) и (42) заменяются уравнениями:

$$\frac{\partial U_{lmn}}{\partial x_k} - \frac{\partial U_{mnk}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_{nkl}}{\partial x_m} - \frac{\partial U_{klm}}{\partial x_n} = 0, \tag{31'}$$

$$U_{ik} = \frac{\partial U_{ikr}}{\partial x_r}, \tag{40'}$$

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{li}}{\partial x_k} - \varkappa^2 U_{lik} = 0, \tag{41'}$$

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_i} = 0. \tag{42'}$$

б) *Собственные состояния в пространстве импульсов.* Выпишем сначала амплитуды трех пространственных компонент (без нормировки):

$$\mathbf{U}^{*}(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \mathbf{U}_{+}^{*}(k) \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)] + \mathbf{U}_{-}(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)] \}, \tag{50}$$

$$\mathbf{U}(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \mathbf{U}_{+}(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)] + \mathbf{U}_{-}^{*}(k) \exp[i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)] \},$$

где k_0 дается выражением (10′). Тогда из дополнительных условий (39)

---

[15] В связи с этим важно иметь в виду смысл U_{4k}^{*} $(k = 1, 2, 3)$ и U^{*}, определенный в первой части; U_0^{*} и U_{0k}^{*} означают обычные комплексно-сопряженные значения U_0 и U_{0k}.

для четвертых компонент U_k^* и U_k следуют равенства:

$$U_0^*(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{k_0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_+^*(k) \exp[i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + k_0 x_0)] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{k_0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_-(k) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k_0 x_0)] \right\}, \qquad (51)$$
$$U_0(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{k_0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_+(k) \exp\left[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k_0 x_0)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{k_0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_-^*(k) \exp[i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k_0 x_0)] \right\}.$$

Если определить пространственный вектор $\mathbf{V}_0$ с компонентами U_{0k} $(k = 1, 2, 3)$ и второй вектор $\mathbf{V}$ с компонентами U_{23}, U_{31}, U_{21}, то из (35) следует:

$$\mathbf{V}_0^*(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \left[-k_0 \mathbf{U}_+^*(k) + \frac{\mathbf{k}}{k_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_+^*(k)) \right] \exp[i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + k_0 x_0)] + \right.$$
$$\left. + \left[k_0 \mathbf{U}_-(k) - \frac{\mathbf{k}}{k_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_-(k)) \right] \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k_0 x_0)] \right\},$$
$$\qquad (52)$$
$$\mathbf{V}_0(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \left[k_0 \mathbf{U}_+(k) - \frac{\mathbf{k}}{k_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_+(k)) \right] \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k_0 x_0)] + \right.$$
$$\left. + \left[-k_0 \mathbf{U}_-^*(k) + \frac{\mathbf{k}}{k_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_-^*(k)) \right] \exp[i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + k_0 x_0)] \right\},$$

$$\mathbf{V}^*(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ -[\mathbf{k} \times \mathbf{U}_+^*(k)] \exp[i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + k_0 x_0)] + \right.$$
$$\left. + [\mathbf{k} \times \mathbf{U}_-(k)] \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k_0 x_0)] \right\},$$
$$\qquad (53)$$
$$\mathbf{V}(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \frac{i}{\sqrt{2}} \{ [\mathbf{k} \times \mathbf{U}_+(k)] \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k_0 x_0)] -$$
$$- [\mathbf{k} \times \mathbf{U}_-^*(k)] \exp[i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + k_0 x_0)] \}.$$

Если для сокращения положить

$$N_+(k) = k_0 (\mathbf{U}_+^*(k) \mathbf{U}_+(k)) - \frac{1}{k_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_+^*(k)) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_+(k)), \qquad (54)$$

$$N_-(k) = k_0 (\mathbf{U}_-^*(k) \mathbf{U}_-(k)) - \frac{1}{k_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_-^*(k)) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_-(k)), \qquad (55)$$

то для энергии, импульса и заряда из (41) — (43) следуют выражения:

$$E = \sum_k k_0 [N_+(k) + N_-(k)], \qquad (56)$$

$$\mathbf{G} = \sum_k \mathbf{k}\,[N_+(k) + N_-(k)], \tag{57}$$

$$e = \varepsilon \sum_k [N_+(k) - N_-(k)] \tag{58}$$

Выражения $N_+(k)$ и $N_-(k)$ являются билинейными формами трех компонент $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^*$. Их можно привести к диагональной форме и нормировать, разбив $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^*$ на компоненту, параллельную k (продольное колебание), и две компоненты, перпендикулярные k (поперечные колебания). Пусть e_1 и e_2 — два комплексных ортогональных единичных вектора, перпендикулярных k:

$$(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_s) = \delta_{rs},\ (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{k}) = (\mathbf{e}_r^* \cdot \mathbf{k}) = 0 \quad (r, s = 1, 2).$$

Если положить

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\pm}(k) &= (k_0)^{-1/2} \sum_{r=1,2} \mathbf{e}_r U_{r,\pm}(k) + \frac{(k_0)^{1/2}}{k} \frac{\mathbf{k}}{|k|} U_{3,\pm}(k), \\ \mathbf{U}_{\pm}^*(k) &= (k_0)^{-1/2} \sum_{r=1,2} \mathbf{e}_r^* U_{r,\pm}(k) + \frac{(k_0)^{1/2}}{k} \frac{\mathbf{k}}{|k|} U_{3,\pm}^*(k), \end{aligned} \tag{59}$$

то $N_+(k)$ и $N_-(k)$ принимают обычный вид:

$$\begin{aligned} N_+(k) &= \sum_{r=1}^{3} U_{r,+}^*(k)\, U_{r,+}(k), \\ N_-(k) &= \sum_{r=1}^{3} U_{r,-}^*(k)\, U_{r,-}(k). \end{aligned} \tag{60}$$

Это преобразование есть не что иное, как приведение к главным осям.

в) *Квантование.* Прежде чем формулировать перестановочные соотношения, отметим разницу между специальным случаем $\varkappa = 0$ (электродинамика) и интересующим нас случаем. В электродинамике компоненты вектора U_i обычно квантуются как независимые скаляры согласно непосредственному обобщению равенства (21):

$$i\,[U_i(x, x_0), U_k^*(x', x_0')] = i\,[U_i^*(x, x_0), U_k(x', x_0')] = \delta_{ik} D(x - x', x_0 - x_0').$$

Но тогда соотношение (39) должно быть введено в качестве дополнительного условия в виде

$$\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\right) \Psi = 0.$$

Оператор $\partial U_k / \partial x_k$ в левой части этого соотношения не должен обязательно коммутировать со всеми другими величинами; но если подействовать

им на функцию Шредингера Ψ, то получим нуль. Однако необходимо, чтобы он коммутировал с комплексно-сопряженным ему оператором в различных пространственно-временны́х точках. В нашем случае простые выкладки дают

$$i\left[\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\right)_{x,\,x_0}, \left(\frac{\partial U_k^*}{\partial x_k}\right)_{x',\,x_0'}\right] = -\Box D(x-x', x_0-x_0').$$

Но $\Box D = \varkappa^2 D$ и при $\varkappa \neq 0$ правая часть не равна нулю. Следовательно, мы пришли к выводу, что при массе покоя, отличной от нуля, перестановочные соотношения для U_i не могут быть такими же, как для независимых скаляров.

Простейший метод вторичного квантования в случае $\varkappa \neq 0$ (который мы будем рассматривать в дальнейшем) заключается в такой формулировке перестановочных соотношений, при которой не только волновое уравнение (38), но и дополнительное уравнение (39) тождественно удовлетворяются как уравнения в q-числах. Эта формулировка имеет следующий вид:

$$i\,[U_i(x, x_0), U_k^*(x', x_0')] = i\,[U_i^*(x', x_0'), U_k(x', x_0')] =$$
$$= \left(\delta_{ik} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\right) D(x-x', x_0-x_0'). \qquad (61)$$

Отсюда следует, что

$$\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_i}, U_k^*(x', x_0')\right] = 0,$$

так как

$$(\Box - \varkappa^2) D = 0.$$

Невыписанные скобки $[U_i(x, x_0), U_k(x', x_0')]$ и $[U_i^*(x, x_0), U_k^*(x', x_0')]$ должны обращаться в нуль. Кроме того, из (61) следует:

$$[U_{ik}(x, x_0), U_r^*(x', x_0')] = i\,[U_{ik}^*(x, x_0), U_r(x', x_0')] =$$
$$= \left(\delta_{kr}\frac{\partial}{\partial x_i} - \delta_{ir}\frac{\partial}{\partial x_k}\right) D(x-x', x_0-x_0'), \qquad (62)$$

$$i\,[U_{ik}(x, x_0), U_{rs}^*(x', x_0')] = i\,[U_{ik}^*(x, x_0), U_{rs}(x', x_0')] =$$
$$= \left[\delta_{kr}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_s} - \delta_{ir}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_s} - \delta_{ks}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_r} + \delta_{is}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_r}\right] D(x-x', x_0-x_0'). \qquad (63)$$

Заметим, что в отличие от результатов, полученных при «канонических» перестановочных соотношениях, (61) приводит к отличным от нуля выражениям для $[U_4(x), U^*(x')]$ и $\left[U_4(x), \frac{\partial U_4^*(x)}{\partial x_4}\right]$ при $x_0 = x_0'$.

Штюкельберг [16] дал другой вариант приведенной выше формулировки теории. Он ввел два вспомогательных поля — вектор A_i и скаляр B, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \varkappa B\right)\Psi = 0.$$

Если в перестановочных соотношениях рассматривать A_i и B как независимые скаляры, то

$$i\,[A_i(x, x_0),\ A_k^*(x', x_0')] = \delta_{ik} D(x - x', x_0 - x_0'),$$

$$i\,[B(x, x_0),\ B^*(x', x_0')] = D(x - x', x_0 - x_0').$$

Отсюда

$$i\left[\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \varkappa B\right)_{x, x_0},\ \left(\frac{\partial A_i^*}{\partial x_i} + \varkappa B^*\right)_{x', x_0'}\right] = 0.$$

Таким образом, дополнительное условие не противоречиво. Кроме того, в силу этого соотношения полная энергия положительна, если только функция Лагранжа состоит из суммы членов, зависящих от независимых компонент поля A_i, B. Тогда U_i, удовлетворяющее уравнению

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)\Psi = 0,$$

дается выражением

$$U_i = A_i + \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial B}{\partial x_i}.$$

Это опять приводит к перестановочным соотношениям (61) для U_i. Для A и B существуют градиентные преобразования второго рода

$$A_i' = A_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad B' = B - \varkappa f, \qquad \text{причем} \quad \Box f - \varkappa^2 f = 0;$$

U_i являются инвариантами этой группы преобразований.

Как показал Штюкельберг, преимущество этого метода заключается в том, что взаимодействие мезонов, описываемых такими полями, с протонами и нейтронами может быть рассмотрено с помощью формализма, совершенно аналогичного формализму Дирака [17], примененному для трактовки взаимодействия света с электронами.

---

[16] *E. C. Stückelberg.* Helv. phys. acta, 1938, 11, 225, 299.

[17] См. *P. A. M. Dirac.* Quantum Mechanics. 2nd ed. Oxford, 1935. (Русск. пер.: *П. А. М. Дирак.* Принципы квантовой механики. М.— Л., 1937.— *Ред.*). В случае мезонов дополнительное условие на A_i и B остается однородным даже при взаимодействии с тяжелыми частицами (этого нет в аналогичном случае для света), но в то же время появляются дополнительные члены в U_0, возникающие вследствие различия дифференцирования по времени мезона и по общему времени.

Однако мы не будем в дальнейшем вводить вспомогательные поля, а дополнительное условие (39) будем рассматривать просто как тождество.

Единственный остающийся еще в (61) произвол связан с возможностью введения численного множителя в правой части. Это обстоятельство посредством равенства (16) связано с соответствующей нормировкой численного множителя в операторе Гамильтона. Покажем, что нормировка (61) находится в согласии с использованием (44) в качестве тензора энергии-импульса. Для этой цели наиболее удобно разложить поля по собственным состояниям. При вычислении выражения для энергии следует учесть порядок множителей. Как видно из равенства (12), множители в членах, возникающие от $\mathbf{U}(k)$ и $\mathbf{U}^*(k)$, появляются в порядке, обратном тому, в котором они стоят в равенстве (55). Как будет показано ниже путем сравнения с (18), равенство (16) требует, чтобы перестановочные соотношения для $U_r(k)$ и $U_r^*(k)$ имели вид

$$[U_{r,+}(k),\ U_{s,+}^*(k)] = [U_{r,-}(k),\ U_{s,-}^*(k)] = \delta_{rs}\ (r,\ s = 1,\ 2,\ 3) \tag{64}$$

и чтобы остальные скобки для этих величин обращались в нуль. Но отсюда следует, что $U(k)$ и $U^*(k)$ [см. (50)] удовлетворяют соотношениям

$$[U_{i,+}(k), U_{k,+}^*(k)] = [U_{i,-}(k), U_{k,-}^*(k)] = \frac{1}{k_0}\left(\delta_{ik} + \frac{1}{\varkappa^2} k_i k_k\right). \tag{65}$$

Подставляя эти соотношения в (50) и (51), мы получаем согласие с (61), если функция D определена равенством (22).

Таким образом, величины $N_+(k)$ и $N_-(k)$, определенные равенствами (65), дают число частиц с зарядами $+1$ и -1 соответственно и с импульсом $\mathbf{k}$. Порядок множителей в выражении для энергии приводит, как и (6) в § 1, к нулевой энергии, равной половине кванта на каждое собственное состояние.

Как и в скалярной теории, квантование согласно принципу запрета невозможно, так как функция $[1 - (\partial^2/\partial x_i^2)]D$ обращается в нуль при $x_0 = x_0'$ вместе с D.

Различие между продольными и поперечными колебаниями исчезает в системе, в которой частица покоится, т. е. для случая $k = 0$. Введение нормальных колебаний согласно (59) излишне, так как вторая часть в (65) обращается в нуль. Кроме того, из (51) следует, что U_0, как уже упоминалось, обращается в нуль. Следовательно, в покоящейся системе при заданном знаке частоты имеются три характеристических решения, переходящих друг в друга при пространственном вращении координатных систем. Этим доказывается утверждение, что рассматриваемая теория в случае квантования описывает исключительно частицы со спином 1.

г) *с-числовая теория для случая внешнего электромагнитного поля.* Общее правило § 2, б ч. I для обобщения уравнений поля на случай, когда имеется внешнее поле, может быть непосредственно применено, если исхо-

дить из вариационного принципа. С помощью операторов

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - i\varepsilon\varphi_k, \qquad \overset{*}{D}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + i\varepsilon\varphi_k$$

обобщенную функцию Лагранжа (43) можно представить в виде

$$L = -\frac{1}{2}\overset{*}{U}_{ik}U_{ik} + \frac{1}{2}\overset{*}{U}_{ik}(D_iU_k - D_kU_i) + \\ + \frac{1}{2}U_{ik}(\overset{*}{D}_i\overset{*}{U}_k - \overset{*}{D}_k\overset{*}{U}_i) + \varkappa^2\overset{*}{U}_iU_i. \qquad (66)$$

Из вариационного принципа вместо (40) и (41) получаются уравнения:

$$U_{ik} = D_iU_k - D_kU_i, \qquad (67)$$

$$D_kU_{ik} + \varkappa^2U_i = 0. \qquad (68)$$

Используя равенство

$$D_iD_k - D_kD_i = -i\varepsilon f_{ik},$$

мы находим, применяя оператор D_i к (68) и суммируя по i, уравнение

$$\varkappa^2D_iU_i - \frac{1}{2}i\varepsilon f_{ik}U_{ik} = 0. \qquad (69)$$

Далее, вместо (42) имеем

$$D_lU_{ik} + D_iU_{kl} + D_kU_{li} = -i\varepsilon(f_{li}U_k + f_{ki}U_l + f_{kl}U_i). \qquad (70)$$

Наконец, подстановка (67) в (68) с учетом (69) дает

$$\sum_k D_k^2U_i - \varkappa^2U_i - i\varepsilon f_{ik}U_k - \frac{i}{2}\frac{\varepsilon}{\varkappa^2}\frac{\partial f_{rs}}{\partial x_i}U_{rs} - \frac{i}{2}\frac{\varepsilon}{\varkappa^2}f_{rs}D_iU_{rs} = 0. \qquad (71)$$

Следует отметить, что уравнения (67) и (68), которые можно непосредственно вывести из вариационного принципа, отличаются от (69), (70) и (71) тем, что не содержат членов, в которые явно входит f_{ik}.

Выражение (49) для вектора тока остается в этой теории прежним, меняется лишь смысл U_{ik}. Согласно § 2, б ч. I, для тензора энергии вместо (44) получается выражение

$$T_{ik} = \overset{*}{U}_{kr}(D_iU_r) + (\overset{*}{D}_i\overset{*}{U}_r)U_{kr} - L\delta_{ik}, \qquad (44')$$

которое можно преобразовать в симметричный тензор энергии ϑ_{ik} вида (46). Таким образом, выражение (46) остается в силе.

Рассмотрение нерелятивистского предельного случая показывает [18], что частица, описываемая полем, обладает магнитным моментом, находящимся в таком же отношении к механическому моменту, как и в случае классического вращающегося заряда, а именно $e\hbar/2m_0c$. Однако этот вывод не однозначен. В функцию Лагранжа можно ввести новые члены вида

$$L' - L = \varepsilon K\frac{1}{2}f_{ik}i(\overset{*}{U}_iU_k - \overset{*}{U}_kU_i), \qquad (66')$$

[18] *A. Proca.* J. phys. et radium, [7], 1938, 9, 61.

где K — безразмерный множитель. Соотношение (67) при этом остается неизменным, но (68) должно быть заменено на уравнение

$$D_k U_{ik} + \varkappa^2 U_i + K i \varepsilon f_{ik} U_k = 0, \tag{68'}$$

а вектор тока согласно (26) ч. I принимает вид

$$s_k' = s_k - i\varepsilon K \frac{\partial}{\partial x_l} (U_l^* U_k - U_k^* U_l). \tag{49'}$$

При малых скоростях частицы это изменение обусловливает появление множителя $(1 + K)$ в первоначальном выражении для магнитного момента; таким образом, магнитному моменту может быть придано любое значение.

д) *Замечания о вещественных полях. Случай нулевой массы покоя.* Переход к вещественным полям производится по схеме § 1, д: полагаем $U_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_k + iW_k)$, где V_k и W_k вещественны. Теория с единственным вещественным вектором в координатном пространстве получается отождествлением U_k и U_k^*, а в импульсном пространстве — отождествлением $\mathbf{U}_+(k)$ и $\mathbf{U}_-(k)$. Вместо $N_+(k)$ и $N_-(k)$ в выражении для энергии и импульса получается лишь одно число

$$N(k) = k_0 (\mathbf{U}^*(k) \cdot \mathbf{U}(k)) - \frac{1}{k_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}^*(k)) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(k)).$$

Вектор тока и заряд обращаются в нуль. Эта возможность была недавно использована для описания нейтральных мезонов [19].

Важным и в некотором смысле особенным является случай нулевой массы покоя, $\varkappa = 0$. Как известно, этот случай включает квантовую электродинамику. Функция Лагранжа и тензор энергии зависят лишь от U_{ik}. Уравнения, получающиеся из принципа наименьшего действия:

$$U_{ik} = \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right), \tag{40''}$$

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_i} = 0, \tag{41''}$$

вместе с величинами U_{ik} остаются инвариантными при добавлении к U_k произвольного градиента или, иными словами, при градиентном преобразовании второго рода

$$U_k \to U_k + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right). \tag{72}$$

Это преобразование, по-видимому, приводит к фундаментальному качественному различию случаев $\varkappa = 0$ и $\varkappa \neq 0$. Поэтому предположение, что фотоны имеют очень малую, но конечную массу покоя, является, по-видимому, физически неудовлетворительным. Поскольку градиентное преобра-

[19] *N. Kemmer.* Proc. Cambridge Philos. Soc., 1938, 34, 354, Part III.

зование первого рода не может быть применено к фотонному полю при $\varkappa = 0$, то градиентное преобразование второго рода с фазовым вектором, произвольно зависящим от пространства и времени, $\exp[i\alpha(x, x_0)]$, становится невозможным для электронного и протонного полей.

Упомянем здесь о возможности комплексного поля при $\varkappa = 0$; вектор тока s_k при этом определяется равенством (49). Инвариантным относительно подстановки (72) будет не вектор тока, а полный (проинтегрированный по объему) заряд. [В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться уравнением (49').] Случаи с $\varkappa = 0$ и целым спином, требующие для своего описания комплексного поля (или *двух* вещественных полей), неизвестны. Поэтому мы будем считать поле (U_i, U_{ik}) вещественным и отождествлять его с фотонным полем (φ_i, f_{ik}).

В c-числовой теории сингулярность случая $\varkappa = 0$ проявляется в том, что в этом случае уравнение (39) и волновое уравнение второго порядка (38) для U_i уже не являются следствиями уравнений (40'') и (41''). В q-числовой теории перестановочные соотношения (61) становятся сингулярными. Существуют два способа формулировки теории при $\varkappa = 0$. Первый состоит в том, что для величин, не инвариантных относительно подстановки (72), вообще не вводят перестановочных соотношений, но сохраняют перестановочные соотношения для напряженностей поля (63), не налагая при этом никаких ограничений на группу градиентных преобразований. Другой метод, развитый Ферми [20], имеет некоторые преимущества при вычислении взаимодействия света и заряженных частиц. В этой теории уже упомянутое выше (§ 2,в) дополнительное ограничение

$$\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}\right) \Psi = 0 \qquad (39')$$

для рассматриваемого состояния и волновое уравнение

$$\Box\, \varphi_k = 0 \qquad (38')$$

для векторного потенциала вводятся как соотношения между q-числами. Последние уравнения ограничивают действие группы градиентных преобразований теми функциями f, которые удовлетворяют волновому уравнению

$$\Box\, f = 0.$$

Однако это ограничение позволяет потребовать выполнения для φ_i следующего простого перестановочного соотношения:

$$i\,[\varphi_i(x, x_0),\ \varphi_k(x', x_0')] = \delta_{ik} D\,(x - x',\ x_0 - x_0'). \qquad (61a)$$

Следует заметить, что в приведенных в § 2,б разложениях по собственным

---

[20] *E. Fermi*. Rev. Mod. Phys., 1932, 4, 125; *P. A. M. Dirac*. Quantum Mechanics. Oxford, 1935. (Русск. пер.: *П. А. М. Дирак*. Принципы квантовой механики. М.— Л., 1937.— *Ред.*).

колебаниям необходимо теперь положить $k_0 = |k|$ и

$$N(k) = |k|(U(k))^2 - \frac{1}{|k|}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}(k))^2 = |k|(U_\perp(k))^2,$$

где

$$U_\perp(k) = \mathbf{U}(k) - \frac{\mathbf{k}}{|k|}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}(k))$$

— компонента U, перпендикулярная **k**. В выражении для энергии при этом возникают лишь два поперечных колебания с $r = 1,2$ и для данного **k** имеются лишь два физически различных состояния.

Как упоминалось в ч. I, спин фотона проявляется в том, что нижнее собственное значение квадрата полного момента количества движения $j(j+1)$ для состояния одного фотона определяется значением $j = 1$, а не $j = 0$ [21].

§ 3. Дираковская теория позитронов (спин $^1/_2$)

а) *с-числовая теория.* В волновое уравнение Дирака для электрона

$$\gamma_k\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \varkappa u = 0 \tag{73}$$

входят известные четырехрядные матрицы γ_k ($k = 1, \ldots, 4$), удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{1}{2}(\gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i) = \delta_{ik}. \tag{74}$$

Как известно, функция u, определяемая (73), удовлетворяет волновому уравнению

$$\Box u - \varkappa^2 u = 0. \tag{73a}$$

Введем дополнительно эрмитово-сопряженные функции $u^\dagger$, удовлетворяющие уравнению

$$\left(\frac{\partial u^\dagger}{\partial x_k}\right)\gamma_k - \varkappa u^\dagger = 0. \tag{73†}$$

Функция u имеет четыре компоненты u_ρ ($\rho = 1, \ldots, 4$). Обозначим $\sum_\sigma \gamma_{k,\rho\sigma}u_\sigma$ и $\sum_\rho u_\rho^\dagger\gamma_{k,\rho\sigma}$ соответственно через $(\gamma_k u)_\rho$ и $(u^\dagger\gamma_k)_\sigma$. Лоренц-инвариантность системы уравнений (73) при данных γ_k приводит к требованию, чтобы для ортогональной подстановки

$$x_i' = \sum_k a_{ik}x_k$$

---

[21] *W. Pauli.* Handbuch der Physik, Bd. 24/1, 1933, S. 259. (Русск. пер.: *В. Паули.* Общие принципы волновой механики. М.— Л., Гостехиздат, 1947, ч. II, § 2.— *Ред.*).

существовало преобразование подобия матриц γ, обладающее свойством

$$\Lambda^{-1}\gamma_i\Lambda = \sum_k a_{ik}\gamma_k. \tag{75}$$

Функции u_ρ и $u_\rho^\dagger$ преобразуются при этом согласно равенствам:

$$u' = \Lambda u, \tag{76}$$

$$u^{\dagger\prime} = \pm\, u^\dagger\Delta^{-1}. \tag{76†}$$

Мы не будем доказывать существования Λ для преобразований Лоренца[22]. Заметим, что (75) определяет матрицу лишь с точностью до постоянного множителя. Введя дополнительное требование

$$\operatorname{Det}\Lambda = 1, \tag{75а}$$

ограничим этот множитель четырьмя корнями из единицы: ± 1, $\pm i$. Из соображений непрерывности и соотношений (75) и (75а) следует, что для собственной (непрерывной) группы Лоренца следует взять в (76†) знак $+$. Для отражений пространственных координат или времени множитель ± 1 или $\pm i$ и знак в (76†) остаются неопределенными. Как будет видно из дальнейшего, Λ удобно выбрать в следующем виде:

$$\Lambda = i\gamma_4 \quad \text{при} \quad x' = -x, \quad x_4' = x_4, \tag{77а}$$

$$\Lambda = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad \text{при} \quad x' = x, \quad x_4' = -x_4, \tag{77б}$$

$$\Lambda = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \quad \text{при} \quad x' = -x, \quad x_4' = -x_4. \tag{77в}$$

Этот вид Λ, предложенный Рака́[23], согласуется с (75). Волновое уравнение в форме (73) удобно для исследования лоренц-инвариантности. Но свойства соотношений вещественности становятся яснее, если уравнение представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \alpha\cdot\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} + i\varkappa\beta u = 0, \tag{78}$$

где

$$\alpha_k = i\gamma_4\gamma_k \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3 \quad \text{и} \quad \beta = \gamma_4. \tag{79}$$

Из соотношений (74) видно, что γ_k, а следовательно, α и β можно считать эрмитовыми матрицами; мы будем всюду предполагать это в дальнейшем. Таким образом, уравнение, комплексно-сопряженное уравнению (78), имеет вид

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_0} + \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{x}}\cdot\alpha - i\varkappa u^*\beta = 0. \tag{78*}$$

[22] Доказательство см. *P. A. M. Dirac.* Quantum Mechanics. 2nd ed. Oxford, 1935. (Русск. пер.: *П. А. М. Дирак.* Принципы квантовой механики. М.— Л., 1937.— *Ред.*). *W. Pauli.* Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 109.

[23] *G. Racah.* Nuovo cimento, 1937, 14, 322.

Сравнение с ($73^\dagger$) показывает, что можно положить [24]

$$u^\dagger = u^*\gamma_4. \tag{80}$$

Из соотношений $u^{\dagger\prime} = u^{*\prime}\gamma_4$ и (76) следует, что

$$u^{\dagger\prime} = u^\dagger(\gamma_4\Lambda^\dagger\gamma_4),$$

где под $\Lambda^\dagger$ мы понимаем матрицу, эрмитово-сопряженную Λ. Сравнивая это с ($76^\dagger$) и (77), можно уточнить знак в ($76^\dagger$): если (76) и (80) сохраняют знак $+$, то

$$u^{\dagger\prime} = +u^\dagger\Lambda^{-1} \tag{72'}$$

для заданного направления времени и

$$u^{\dagger\prime} = -u^\dagger\Lambda^{-1} \tag{72†}$$

для обращенного направления времени.

Волновые уравнения (73) и (78) можно вывести из функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\left(u^\dagger\gamma_k\frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u^\dagger}{\partial x_k}\gamma_k u\right) + \varkappa u^\dagger u =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\left(u^*\frac{\partial u}{\partial x_0} - \frac{\partial u^*}{\partial x_0}u\right) + \left(u^*\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\alpha}u\right)\right] + \varkappa u^*\beta u. \tag{81}$$

Кстати заметим, что если волновые уравнения удовлетворяются, то L обращается в нуль. Из уравнения (19) ч. I для вектора тока получается выражение

$$s_k = \varepsilon i u^\dagger\gamma_k u, \tag{82}$$

или

$$s_0 = \varepsilon u^* u, \qquad \mathbf{s} = \varepsilon u^\dagger\boldsymbol{\alpha}u. \tag{82a}$$

Для канонического тензора энергии, учитывая, что $L = 0$, находим

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\left(u^\dagger\gamma_k\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u^\dagger}{\partial x_i}\gamma_k u\right). \tag{83}$$

Этот тензор несимметричен, но с помощью хорошо известного преобразования [25], содержащегося как частный случай в равенствах (13б) и (14) ч. I, получим

$$\vartheta_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}).$$

Тензор ϑ_{ik} удовлетворяет уравнению непрерывности и при интегрировании по объему приводит к тому же полному импульсу, что и канонический тензор.

---

[24] Обычно в (80) вводят справа множитель i. Мы предпочитаем не делать этого, чтобы i появлялось в выражении для вектора тока.

[25] *W. Pauli*. Handbuch der Physik, Bd. 24/1, 1933, S. 245. (Русск. пер.: *В. Паули*. Общие принципы волновой механики. М.— Л., 1947, ч. II, § 2.— *Ред.*).

Из (83) и (80) для плотности энергии и импульса следуют выражения

$$W = -T_{44} = \frac{1}{2i}\left(-u^* \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial u^*}{\partial x_0} u\right), \tag{83а}$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2i}\left(u^* \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{x}} u\right). \tag{83б}$$

Существенно отметить, что плотность заряда положительно-определенна, тогда как энергия может быть как положительной, так и отрицательной.

Из вида матрицы Λ [равенства (77)] следует, что вектор тока при пространственных отражениях ведет себя как обычный вектор. Но при перемене знака временной координаты компонента s_4 сохраняет свой знак, тогда как знаки пространственных компонент s_k меняются. Следовательно, при перемене знака у всех координат величины s_k остаются без изменения. С другой стороны, тензор энергии меняет знак при перемене знака всех координат, как видно, например, из (76†).

Рассмотрим теперь u_ρ, являющиеся плоскими волнами с определенным волновым вектором $(\mathbf{k}, k_0)$. Из (73а) снова следует, что $k_0^2 = k^2 + \varkappa^2$. Для данного $\mathbf{k}$ и данного знака k_0 имеются, очевидно, два решения волновых уравнений (73) или (78), которые в покоящейся системе $\mathbf{k} = 0$ переходят друг в друга путем пространственных вращений. Таким образом, частицы, связанные с этими волнами, имеют спин $^1/_2$.

Исследуем теперь подробнее связь решений

$$u_\rho = a_\rho^r(k) \exp(i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0]) \quad \text{при} \quad r = 1, 2 \tag{84а}$$

и

$$u_\rho = b_\rho^r(k) \exp(i[-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0]) \quad \text{при} \quad r = 1, 2, \tag{84б}$$

где под k_0 мы понимаем, как и в § 1 и 2, положительную величину

$$k_0 = +(k^2 + \varkappa^2)^{1/2}.$$

При соответствующей нормировке a_ρ^r

$$\sum_\rho a_\rho^{*r} a_\rho^s = \delta_{rs}, \qquad \sum_\rho b_\rho^{*r} b_\rho^s = \delta_{rs}. \tag{85}$$

С помощью метода операторов аннигиляции, используя волновое уравнение, мы приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1,2} a_\rho^r a_\sigma^{*r} &= \frac{1}{2k_0}(k_0 + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k}) + \varkappa\beta), \\ \sum_{r=1,2} b_\rho^r b_\sigma^{*r} &= \frac{1}{2k_0}(k_0 + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k}) - \varkappa\beta). \end{aligned} \tag{86}$$

Кроме того, между решениями с положительными и отрицательными частотами существует лоренц-инвариантное соответствие [26]. Для доказатель-

[26] См. *W. Pauli*. Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 130.

ства заметим, что u_- удовлетворяет тому же волновому уравнению, что и u_+, где

$$u_-^* = Cu_+, \qquad u_+ = C^{-1}u_-^*, \tag{87}$$

если

$$\beta^* = -C\beta C^{-1}, \quad \alpha^* = C\alpha C^{-1}. \tag{88}$$

Матрицы α^*, β^*, комплексно-сопряженные с матрицами α, β, определяются соотношениями:

$$(\alpha^*)_{\rho\sigma} = (\alpha_{\rho\sigma})^* = \alpha_{\sigma\rho}, \quad (\beta^*)_{\rho\sigma} = (\beta_{\rho\sigma})^* = \beta_{\sigma\rho}.$$

Матрица C действительно существует, так как $-\beta^*$, α^* удовлетворяют тем же соотношениям (74), что и β, α и γ_k. Из соотношений (87) ясно, что C^*C коммутирует со всеми γ_k и, следовательно, является постоянной. Заметим без доказательства, что если матрицы γ_k эрмитовы, то матрица C симметрична [27]:

$$C_{\sigma\rho} = C_{\rho\sigma} \tag{88а}$$

Отсюда следует, что постоянная матрица C^*C положительна. Поэтому надлежащим выбором множителя у C можно добиться, чтобы

$$C^*C = 1. \tag{88б}$$

Имеется специальное представление γ_k, для которого α и $i\beta$ вещественны. В этом случае C является единичной матрицей.

Инвариантность соответствия, даваемого формулой (87), относительно преобразования Лоренца существует в том случае, если мы с помощью соотношения (76) можем перейти от (87) к соответствующему соотношению для штрихованных функций, т. е. если

$$\Lambda^*C = C\Lambda \text{ или } \Lambda^* = C\Lambda C^{-1}. \tag{89}$$

Доказательство справедливости этого соотношения для собственных преобразований Лоренца дано в статье, указанной в прим. 27. Как видно из (77), Λ определено для всех отражений, так что (89) остается справедливым. Следовательно, соответствия, определяемые соотношениями (87), остаются инвариантными при всех отражениях.

Можно, очевидно, выбрать a_ρ^r так, что

$$b_\rho^{*r}(k) = \sum_\sigma C_{\rho\sigma} a_\sigma^r(k), \qquad a_\rho^{*r}(k) = \sum_\sigma C_{\rho\sigma} b_\sigma^r(k). \tag{90}$$

Следуя Крамерсу [28], мы можем говорить о двух решениях, связанных соотношениями (87), как о зарядово-сопряженных решениях. Эта терминология оправдывается рассмотрением влияния внешнего электромагнитного поля. Его можно провести согласно § 2, г ч. I с помощью подстановки

[27] *W. Pauli*. Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 109, 121, 130.
[28] *H. A. Kramers*. Proc. Amst. Acad. Sci., 1937, 40, 814. Понятие о зарядово-сопряженных решениях может быть обобщено для более высоких произвольных значений спина. Однако мы не можем здесь останавливаться на этом вопросе.

$\partial/\partial x_k \to D_k$ в волновом уравнении (73) или (78). Если u_+ удовлетворяет волновому уравнению с зарядом $+e$, то u_- удовлетворяет уравнению с зарядом $-e$. Но оказывается, что вектор тока (82) сохраняет свой знак в зарядово-сопряженных состояниях. Однако, как мы увидим, этот недостаток устраняется в q-числовой теории.

В связи с этим по аналогии с § 2, г интересно ввести в функцию Лагранжа дополнительные члены вида

$$L' - L = l\frac{1}{2}u^\dagger\gamma_i\gamma_k u f_{ik}, \tag{90'}$$

где f_{ik} — напряженности внешнего поля в естественной системе единиц (см. § 1 ч. I), а l имеет размерность длины. Как известно, если не вводить дополнительных членов, то для магнитного момента получается значение $l/2\varkappa$. Тогда во внешнем поле мы находим видоизмененное волновое уравнение

$$\gamma_k D_k u + \varkappa u + \frac{1}{2}ilf_{ik}\gamma_i\gamma_k u = 0. \tag{91}$$

При малой скорости частиц мы приходим к дополнительному члену в магнитном моменте вида — $l\,(\hbar c)^{1/2}$. Из уравнения (27) ч. I видно, что дополнительный член в волновом уравнении приводит к новому члену в выражении для тока. Новое выражение для тока принимает вид

$$s_k' = \varepsilon i u^\dagger\gamma_k u + l\frac{\partial}{\partial x_l}(u^\dagger i\gamma_k\gamma_l u). \tag{92}$$

Следует отметить, что для электрона магнитный момент равен $^1/_2\,(l/\varkappa)$, так что дополнительный член не является необходимым. Но для протона или нейтрона положение иное. Для последнего магнитный момент должен быть получен только из нового члена, ибо здесь $\varepsilon = 0$, так что подстановка D_k вместо $\partial/\partial x_k$ не нужна. Важно также, что при переходе к зарядово-сопряженному решению вместе со знаком ε должен меняться знак l. Таким образом, эти решения сопряжены и по магнитному моменту частицы (см. § 2 ч. I). Заметим, что дополнительный член вводит в теорию новую константу с размерностью длины. Обсуждение результатов включения дополнительных членов в функцию Лагранжа и соответствующих членов в выражение для тока для случая спина, равного 1, см. § 2, г.

б) *Квантование согласно принципу запрета.* Мы видели, что для спина $^1/_2$ в c-числовой теории энергия не является положительно-определенной: имеется одинаковое число положительных и отрицательных собственных значений энергии. Положение не изменится, если ввести квантование согласно статистике Бозе — Эйнштейна. Дирак указал, что трудности с отрицательными уровнями энергии могут быть устранены путем изменения определения вакуума, если ввести квантование согласно принципу запрета. Вакуум определяется как состояние с наименьшей энергией среди тех состояний, для которых число частиц в каждом состоянии удовлетворяет принципу запрета. Это ограничивает число частиц, находящихся

в каждом невырожденном состоянии, значениями 0 и 1. Таким образом, вакуум определяется как такое общее состояние, при котором все уровни отрицательной энергии заняты. Тогда незаполненный отрицательный уровень, так называемая дырка, ведет себя по отношению к определенному так вакууму как частица с положительной энергией и зарядом, обратным первоначальному.

Эта формулировка теории дырок Дирака не вполне симметрична по отношению к двум частицам противоположного заряда. В дальнейшем мы будем следовать формализму, предложенному Гейзенбергом [29], выражающему то же физическое содержание в более симметричной форме.

С этой целью начнем с определения перестановочных соотношений для волновых функций. При применении принципа запрета следует рассматривать, согласно Иордану и Вигнеру, скобку $[u_\rho(x, x_0), \overset{*}{u_\sigma}(x', x'_0)]_+ \equiv u_\rho(x, x_0)\overset{*}{u_\sigma}(x', x'_0) + \overset{*}{u_\sigma}(x', x'_0)\, u_\rho(x, x_0)$. Надо заметить, что правая часть этого выражения должна удовлетворять не только волновому уравнению второго порядка (73а), но и волновому уравнению первого порядка (73) или (78). Это выполняется, если

$$[u_\rho(x, x_0), \overset{*}{u_\sigma}(x', x'_0)]_+ = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} I - \boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - i\varkappa\beta\right)_{\rho\sigma} D(x - x', x_0 - x'_0), \quad (93)$$

где D — функция, относящаяся к волновому уравнению второго порядка с массой покоя $\varkappa$, определенной равенствами (24), (25). С помощью волновой функции $u^\dagger$ и матриц γ_k можно, используя (79) и (80), представить соотношение (93) в виде

$$i\,[u_\rho(x, x_0), u^\dagger_\sigma(x', x'_0)]_+ = \left(-\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k} + \varkappa I\right)_{\rho\sigma} D(x - x', x_0 - x'_0). \quad (94)$$

Волновое уравнение первого порядка выполняется вследствие того, что, подействовав оператором $\frac{\partial}{\partial x_0} I + \boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + i\varkappa\beta$ на (93) или оператором $\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k} + \varkappa I$ на (94), мы получим оператор $-\Box + \varkappa^2$, который уничтожает функцию D. Релятивистская инвариантность установленного выражения видна из (94), но анализ соотношения легче производить с помощью (93).

Совместимость соотношения (93) и скобок со знаком $+$ основана существенным образом на том, что в правую часть входят первые производные функции D (в общем случае возможны производные нечетного порядка). Вследствие этого правая часть становится четной функцией от $x - x'$, $x_0 - x'_0$, и для $x = x'$ и $x_0 = x'_0$ алгебраическое требование положительности левой части выполняется. Действительно, при $x_0 = x'_0$ согласно (22″)

$$[u_\rho(x, x_0), \overset{*}{u_\sigma}(x', x'_0)]_+ = \delta_{\rho\sigma}\delta(x - x'). \quad (93a)$$

---

[29] *W. Heisenberg*. Z. Phys., 1934, 90, 209; 92, 692.

Введем теперь разложение $u_\rho(x)$ по собственным колебаниям:

$$u_\rho(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \sum_{r=1,2} \{u_+^r(k)\, a_\rho^r(k) \exp(i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0]) + \\ + u_-^*(k)\, b_\rho^r(k) \exp(i[-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0])\},$$

$$u_\rho^*(x, x_0) = (V)^{-1/2} \sum_k \sum_{r=1,2} \{u_+^{*r}(k)\, a_\rho^{*r}(k) \exp(i[-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0]) + \\ + u_-^r(k)\, b_\rho^{*r}(k) \exp(i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0])\},$$

где $u_+^r(k)$ и $u_-^r(k)$ и комплексно-сопряженные им выражения являются q-числами, а c-числа $a_\rho^r(k)$ и $b_\rho^r(k)$ определены и нормированы соотношениями (84) и (85). Из (85) и определения (22) функции D следует эквивалентность (93а) и соотношения для скобок

$$[u_+^r(k), u_+^{*s}(k)]_+ = [u_-^r(k), u_-^{*s}(k)]_+ = \delta_{rs}. \tag{95}$$

Остальные скобки со знаком + обращаются в нуль.

Развивая идеи дираковской теории дырок, введем следующее правило Гейзенберга о порядке множителей, которым мы будем пользоваться при переходе от c-числовой теории к q-числовой. Пусть F — любой эрмитовский оператор c-числовой теории. Тогда

$$u_\rho^* F_{\rho\sigma} u_\sigma = u^* F u$$

следует заменить на

$$\frac{1}{2}(u_\rho^* F_{\rho\sigma} u_\sigma - u_\sigma F_{\rho\sigma} u_\rho^*) = \frac{1}{2}(u^* F u - u F^* u^*). \tag{96}$$

Последнее выражение правильно, в смысле операторного исчисления, также и тогда, когда F содержит эрмитовский дифференциальный оператор. В этом случае к оператору следует добавить члены, в которых дифференциальный оператор действует на первый член и которые при интегрировании по объему дают то же самое, что и члены, входящие в выражение (96). Применение этого правила к выражениям (82), (83а), (83д) для энергии, импульса и заряда дает:

$$E = \sum_k k_0 \sum_{r=1,2} \left[\frac{1}{2}(u_+^{*r} u_+^r - u_+^r u_+^{*r}) + \frac{1}{2}(-u_-^r u_-^{*r} + u_-^{*r} u_-^r)\right],$$

$$\mathbf{G} = \sum_k \mathbf{k} \sum_{r=1,2} \left[\frac{1}{2}(u_+^{*r} u_+^r - u_+^r u_+^{*r}) + \frac{1}{2}(-u_-^r u_-^{*r} + u_-^{*r} u_-^r)\right],$$

$$e = \varepsilon \sum_k \sum_{r=1,2} \left[\frac{1}{2}(u_+^{*r} u_+^r - u_+^r u_+^{*r}) + \frac{1}{2}(-u_-^r u_-^{*r} - u_-^{*r} u_-^r)\right].$$

Если ввести

$$\begin{aligned} N_r^+(k) &= u_+^{*r}(k)\, u_+^r(k), \\ N_r^-(k) &= u_-^{*r}(k)\, u_-^r(k), \end{aligned} \tag{97}$$

то согласно (95)

$$E = \sum_k k_0 \sum_{r=1,2} [N_r^+(k) + N_r^-(k) - 1],$$
$$\mathbf{G} = \sum_k \mathbf{k} \sum_{r=1,2} [N_r^+(k) + N_r^-(k) - 1], \qquad (98а)$$
$$e = \varepsilon \sum_k \sum_{r=1,2} [N_r^+(k) - N_r^-(k)]. \qquad (98б)$$

Далее легко заметить, что в силу правила Гейзенберга соотношение (16) с обычными скобками выполняется для всех величин, не содержащих явно времени.

В связи с определением (97) нужно отметить, что при квантовании со скобками со знаком + в (95) как для $\overset{*}{u}_r u_r$, так и для $u_r \overset{*}{u}_r$ получаются собственные значения 0 и 1, так что оба выражения могут определять число частиц. Выбор (97) произведен таким образом, что энергия минимальна при обращении всех N в нуль; это соответствует случаю вакуума. Мы получаем, следовательно, нулевую энергию вакуума, равную половине кванта на собственное колебание [30].

в) *Разложение по зарядово-сопряженным функциям. Случай незаряженной частицы со спином* $^1/_2$ [31]. Произведем сначала разложение нашего спинорного поля, в точности соответствующее разложению (33) скалярного поля U, на его вещественную и мнимую части. Получим

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + iw), \qquad u^* = \frac{1}{\sqrt{2}} C (v - iw), \qquad (99)$$

где по аналогии с (87) v и w удовлетворяют лоренц-инвариантным соотношениям вещественности

$$v^* = Cv, \qquad w^* = Cw \qquad (100)$$

и тем же волновым уравнениям, что и u. Формулы, обратные (99), имеют вид:

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + C^* u^*), \qquad (99а)$$
$$w = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{i}(u - C^* u^*).$$

[30] Понятие плотности энергии в этой теории, по-видимому, более проблематично, чем понятие проинтегрированной по объему полной энергии. Плотность энергии в теории дырок уже не является положительно-определенной в отличие от теорий, рассмотренных в § 1 и 2. Это показано и в c-числовой теории; если даже ограничиться волновыми пакетами, составляющие которых имеют в фазе $i\,[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0]$ частоту одного и того же знака, плотность энергии не может быть сделана положительно-определенной.

[31] Эта теория развита впервые Майорана (*E. Majorana*. Nuovo cimento, 1937, **14**, 171), использовавшим упомянутое выше специальное представление матриц Дирака с вещественной матрицей α и $C = I$. Общий случай см. в работах Рака́ (прим. 23) и Крамерса (прим. 28).

Скобки $[\ ]_+$ для v и w обращаются в нуль, а

$$[v_\rho(x, x_0), v_\sigma(x', x_0')]_+ = [w_\rho(x, x_0), w_\sigma(x', x_0')]_+ = C^*_{\sigma\tau}[u_\rho(x, x_0), \overset{*}{u}_\tau(x', x_0')]. \tag{101}$$

В правую часть можно ввести выражение (93). [В силу свойств (88а), (88б) величины C правая часть действительно имметрична по отношению к замене x, x_0 на x', x_0' и ρ на σ.] В частности при $x_0 = x_0'$

$$[v_\rho(x, x_0), v_\sigma(x', x_0')]_+ = [w_\rho(x, x_0), w_\sigma(x', x_0')]_+ = C^*_{\sigma\rho}\delta(x - x'). \tag{101a}$$

Согласно правилу Гейзенберга, $\overset{*}{u}_\rho F_{\rho\sigma} u_\sigma$ с эрмитовым F в c-числовой теории заменяется на

$$\frac{1}{4} v(CF - F^*C)v + \frac{1}{4} w(CF - F^*C)w + \frac{i}{4} v(CF + F^*C)w - \\ - \frac{i}{4} w(F^*C + CF)w. \tag{102}$$

Применяя это выражение к вектору тока, т. е. полагая, что F есть I, α, мы находим, что вследствие (88) члены с (v, v) и (w, w) обращаются в нуль. Таким образом,

$$s_0 = \frac{1}{2}(vCw - wCv), \qquad s = \frac{i}{2}(vC\alpha w - w\alpha Cv).$$

Для плотности энергии и импульса F равно соответственно $-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_0}$ и $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$. В этих случаях обращаются в нуль смешанные члены, откуда

$$W = \frac{1}{i}\frac{1}{4}\left[\left(vC\frac{\partial v}{\partial x_0} - \frac{\partial v}{\partial x_0}Cv\right) + \left(wC\frac{\partial w}{\partial x_0} - \frac{\partial w}{\partial x_0}Cw\right)\right], \tag{103}$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{i}\frac{1}{4}\left[\left(vC\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}Cv\right) + \left(wC\frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}}Cw\right)\right]. \tag{104}$$

Переход к зарядово-сопряженному состоянию осуществляется заменой

$$v \to v, \qquad w \to -w. \tag{105}$$

При этом преобразовании вектор тока меняет знак, в то время как энергия и импульс остаются прежними. В c-числовой теории дело обстояло бы как раз наоборот, так как там вектор тока содержал бы члены (v, v) и (w, w), а энергия и импульс — члены (v, w).

Разложение по собственным состояниям легко осуществить, если потребовать выполнения условия (99) для a^{*r}_ρ, b^{*r}_ρ и разложить величины $u^r_-(k)$ и $u^r_+(k)$ согласно равенствам:

$$\begin{aligned} u^r_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v^r + iw^r), & u^r_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v^r - iw^r), \\ u^{*r}_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v^{*r} - iw^{*r}), & u^{*r}_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v^{*r} + iw^{*r}); \end{aligned} \tag{106}$$

при этом

$$[v^r, v^{*s}]_+ = [w^r, w^{*s}]_+ = \delta_{rs},$$
$$[v^r, w^{*s}]_+ = [w^r, v^{*s}]_+ = 0. \tag{107}$$

Тогда

$$v_\rho = (V)^{-1/2} \sum_k \sum_{r=1,2} \{v^r(k)\, a_\rho^r(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)] + $$
$$+ v^{*r}(k)\, b_\rho^r(k) \exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)]\},$$
$$w_\rho = (V)^{-1/2} \sum_k \sum_{r=1,2} \{w^r(k)\, a_\rho^r(k) \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)] + \tag{108}$$
$$+ w^{*r}(k)\, b_\rho^r(k) \exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)]\}.$$

Энергия, импульс и заряд принимают вид:

$$E = \sum_k \sum_{r=1,2} k_0 (v^{*r} v^r + w^{*r} w^r - 1), \tag{109а}$$

$$\mathbf{G} = \sum_k \sum_{r=1,2} \mathbf{k} (v^{*r} v^r + w^{*r} w^r - 1), \tag{109б}$$

$$e = \varepsilon \sum_k \sum_{r=1,2} i (v^r w^{*r} - w^r v^{*r}). \tag{109в}$$

«Упрощенную» майорановскую форму теории, возникающую при отождествлении зарядово-сопряженных состояний, можно получить, зачеркнув $w(x)$ и скобки, содержащие $w(x)$, и оставив, следовательно, лишь первую половину соотношений (100), (101а). Таким образом,

$$W = \frac{1}{4i}\left(vC \frac{\partial v}{\partial x_0} - \frac{\partial v}{\partial x_0} Cv\right), \tag{103'}$$

$$E = \sum_k \sum_{r=1,2} k_0 \left(v^{*r}(k)\, v^r(k) - \frac{1}{2}\right). \tag{109'}$$

Вектор тока и магнитный момент тождественно обращаются в нуль, т. е. частица вообще не может быть источником электромагнитного поля. Эта возможность существует, очевидно, лишь в q-числовой теории с квантованием согласно принципу запрета. Пока еще неизвестно, какой теорией описывается нейтрино, играющее роль в теории β-распада: «упрощенной» или «неупрощенной».

При спине $^1/_2$ случай $\varkappa = 0$ не допускает градиентных преобразований второго рода, как и при спине 0. При спине 1 и выше и $\varkappa = 0$ эти преобразования допустимы.

§ 4. Пример синтеза теорий для спина 1 и спина 0

Напишем уравнения (1) для волнового поля бесспиновой частицы в форме, аналогичной (73):

$$\beta_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \varkappa u = 0. \tag{110}$$

В этих уравнениях β_k — пятирядные матрицы: четыре ряда действуют на вектор U_k, пятый — на скаляр U. Компоненты поля $(\varkappa)^{1/2}U_k$, $(\varkappa)^{-1/2}U_{ik}$ мы будем обозначать U_ρ ($\rho = 1, 2, \ldots, 5$), а вместо $\Sigma\beta_{k,\rho\sigma}u_\sigma$ будем сокращенно писать $\beta_k u$. Множители $(\varkappa)^{-1/2}$ перед U_k и $(\varkappa)^{1/2}$ перед U введены для того, чтобы сделать уравнения более симметричными. В этих обозначениях u^*u, как и в теории Дирака, имеет размерность, обратную объему.

Уравнения (41), (42) для поля в случае спина 1 можно также представить в виде (110). При этом β_k должны быть десятирядными матрицами, четыре строки которых действуют на вектор U_k, а шесть — на антисимметричный тензор U_{ik}. Компоненты поля $(\varkappa)^{1/2}U_k$, $(\varkappa)^{-1/2}U_{ik}$ обозначаются u_ρ ($\rho = 1, 2, \ldots, 10$).

Даффин [32] отметил интересный факт, что как пяти-, так и десятирядные матрицы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\beta_i\beta_k\beta_l + \beta_l\beta_k\beta_i = \delta_{ik}\beta_l + \delta_{kl}\beta_i. \qquad (111)$$

Основанная на этих соотношениях алгебра может быть изучена независимо от специального представления гиперкомплексных чисел β, так же как и в случае алгебры, основанной на матрицах γ_i Дирака.

Четыре матрицы β_k, единичная матрица I и все степени и произведения β_k дают 126 линейно-независимых величин. [Число независимых степеней и произведений ограничено соотношением (111).] Пяти- и десятирядные представления этой алгебры уже были определены выше. Кроме них имеется тривиальное одномерное представление, в котором $\beta_k = 0$, а $I = 1$. Эти представления неприводимы в алгебраическом смысле; других неприводимых представлений нет [33].

Следовательно, если опустить тривиальное одномерное представление (к которому мы вернемся впоследствии в связи со специальным вопросом), то уравнение (111) не содержит ничего, кроме данных в § 1 и 2 формулировок теорий для частиц со спином 0 и 1. Однако мы исследуем, согласно Кеммеру [34], несколько подробнее этот формализм, так как, по-видимому, его можно расширить, чтобы включить высшие значения спина.

Взяв часть (111), антисимметричную по k и l, и положив

$$s_{kl} = -s_{lk} = \beta_k\beta_l - \beta_l\beta_k, \qquad (112)$$

получим

$$\beta_i s_{kl} - s_{kl}\beta_i = \delta_{ik}\beta_l - \delta_{il}\beta_k. \qquad (113)$$

С помощью этого соотношения можно показать, что уравнения (110) ло-

---

[33] *R. J. Duffin.* Phys. Rev., 1938, 54, 114.
Система гиперкомплексных чисел β_k, I и степеней и произведений β_k известна в алгебре как полупростая. Согласно общей теореме о размерности представлений и порядке системы имеем $126 = 1^2 + 5^2 + 10^2$.

[34] *H. Kemmer.* Proc. Roy. Soc. London, 1939, **A173**, 91; *F. Booth, A. H. Wilson.* Proc. Roy. Soc. London, 1940, **A175**, 483; *A. H. Wilson.* Proc. Cambridge Philos. Soc., 1940, **36**, 363.

ренц-инвариантны. Если ортогональное преобразование

$$x_i' = \sum_k a_{ik} x_k$$

для заданных β_k соответствует преобразованию

$$u' = \Lambda u,$$

то Λ должно удовлетворять соотношению

$$\Lambda^{-1}\beta_i\Lambda = \sum_k a_{ik}\beta_k,$$

аналогичному (75). При инфинитезимальных преобразованиях

$$x_k' = x_k + \sum_l \varepsilon_{kl} x_l, \quad \Lambda = I + \frac{1}{2}\sum_k\sum_l \varepsilon_{kl} s_{kl}$$

(ε_{kl} — численные коэффициенты, $s_{kl} = - s_{lk}$ — матрицы) мы получим соотношения (113) [35]. Мы видим, что определенные выше величины s_{kl} обусловливают поведение u_ρ при инфинитезимальных преобразованиях.

Для вычисления β_k важно отметить, что эти матрицы не имеют обратных. Из соотношений (111), в частности, следует

$$\beta_i\beta_k\beta_l = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k. \tag{111а}$$

С другой стороны,

$$\beta_k^3 = \beta_k. \tag{111б}$$

Матрицы

$$\eta_k = 2\beta_k^2 - 1 \tag{114}$$

обладают простыми свойствами:

$$\eta_k^2 = I \quad \eta_i\eta_k = \eta_k\eta_i; \tag{115}$$

$$\beta_i\eta_k = -\eta_k\beta_i \quad \text{при} \quad i \neq k; \quad \beta_i\eta_i = \eta_i\beta_i. \tag{116}$$

Если предположить, что β_k, а следовательно, и η_k — эрмитовы (по аналогии с матрицами Дирака) — а это предположение совместимо с (111),— то можно с помощью η_4 [в теории Дирака для этой цели служит γ_4 (80)] определить функции $u^\dagger$:

$$u^\dagger = u^*\eta_4, \tag{117}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial u^\dagger}{\partial x_k}\beta_k - \varkappa u^\dagger = 0 \tag{110†}$$

и преобразующиеся при собственных преобразованиях Лоренца по закону

$$u^{\dagger\prime} = u^\dagger\Lambda^{-1},$$

---

[35] В связи с этим см., например, *W. Pauli.* Handbuch der Physik, Bd. 24/1, 1933, S. 222, Gl. (A′). (Русск. пер.: *В. Паули.* Общие принципы волновой механики. М.— Л., 1947, ч. II, § 2, формула (A′).— *Ред.*).

так что $(u^\dagger u)$ является инвариантом относительно этих преобразований. Для пространственных отражений [см. (77а)] $x' = -x$; $x_4' = x_4$ имеются две возможности: $u' = \eta_4 u$ или $u' = -\eta_4 u$. Последняя относится к теориям, упомянутым в § 1, 2 [уравнения (9), (38)].

С помощью $u^\dagger$ легко построить функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\left(u^\dagger\beta_k \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u^\dagger}{\partial x_k}\beta_k u\right) + \varkappa u^\dagger u, \tag{118}$$

вектор тока

$$s_k = iu^\dagger\beta_k u \tag{119}$$

и канонический тензор энергии

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\left(u^\dagger\beta_k \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u^\dagger}{\partial x_i}\beta_k u\right), \tag{120}$$

причем s_k и T_{ik} удовлетворяют уравнению непрерывности.

Для перехода от (110) к волновому уравнению второго порядка необходимо проделать некоторые выкладки. Умножив (110) на $\beta_l\beta_i\dfrac{\partial}{\partial x_l}$, получим

$$\frac{1}{2}(\beta_l\beta_i\beta_k + \beta_k\beta_i\beta_l)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_l} + \varkappa\beta_l\beta_i\frac{\partial u}{\partial x_l} = 0,$$

или в силу (111)

$$\beta_k\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_i} + \varkappa\beta_l\beta_i\frac{\partial u}{\partial x_l} = 0.$$

Используя опять (110), мы приходим к равенству

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \beta_l\beta_i\frac{\partial u}{\partial x_l}. \tag{121}$$

Дифференцирование по x_i и суммирование по i дают

$$\Box u - \varkappa^2 u = 0. \tag{122}$$

С другой стороны, из (110) и (121) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + s_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \varkappa\beta_i u = 0. \tag{123}$$

Мы хотим здесь обратить внимание на возможность другой формулировки теории, которая получается, если исходить из (123), а не из (110). Умножив на $1 - \beta_i^2$, получим (121) и далее

$$\beta_i\left[\beta_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + \varkappa u\right] = 0. \tag{110'}$$

Это более слабое соотношение, чем (110), так как матрицы β_i не имеют обратных матриц. Кстати, для однорядного представления, в котором $\beta_i = 0$, $I = 1$, из (110') и (121) получается решение $u = \text{const}$.

Возвращаясь к первоначальной теории, в которой в силу (122) постоянные решения исключены, заметим, что с помощью некоторых преобразований (см. § 2 ч. I) можно, следуя Кеммеру, получить симметричный тензор энергии

$$\theta_{ik} = \varkappa\, [u^{\dagger} (\beta_i\beta_k + \beta_k\beta_i)u - \delta_{ik}u^{\dagger}u], \tag{124}$$

также удовлетворяющий уравнению непрерывности. Согласно (114), (117) соответствующая плотность энергии положительно-определенна:

$$W = -\theta_{44} = \varkappa u^* u.$$

Перестановочные соотношения имеют вид

$$i\,[u_\rho(x, x_0), u_\sigma^{\dagger}(x', x_0')] = \left[\beta_k \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{1}{2\varkappa}(\beta_k\beta_l + \beta_l\beta_k)\frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_l}\right]_{\rho\sigma} [D\,(x - x', x_0 - x_0')]. \tag{125}$$

Легко убедиться, что они согласуются с волновым уравнением (110).

Как заметил Даффин, можно получить специальное приводимое представление с помощью соотношения

$$\beta_k = \frac{1}{2}(\gamma_k I' + \gamma_k' I). \tag{126}$$

Здесь γ_k и γ_k' — матрицы Дирака, действующие на различные группы из четырех индексов; I — единичная матрица первой системы индексов, I' — второй системы. Следовательно, β_k имеют 16 строк и 16 столбцов, а соответствующие волновые функции имеют 16 компонент [36].

Естественно, однако, разложить 16-рядное представление (126) матриц β_k на неприводимые компоненты. Этими неприводимыми компонентами как раз и являются пяти-, десяти- и однорядное представления [37].

---

[36] Употребление специального представления (126) в волновых уравнениях (110) приводит к уравнениям «Теории фотонов» де Бройля. Употребление этого представления с (123) вместо (110) приводит к другой формулировке теории де Бройля, допускающей постоянные решения — так называемые «solutions d'annihilation» де Бройля. Однако, согласно интерпретации настоящей статьи, теория де Бройля вообще не описывает фотонов, а является скорее объединенным описанием двух частиц с отличной от нуля массой покоя и спином, равным 0 и 1.

В связи с этим сошлемся на приведенные в § 2, д аргументы относительно градиентных преобразований второго рода, противоречащие допущению об отличной от нуля массе покоя фотонов.

[37] Это разложение было подробно произведено Жэньо (*J. Geheniau*. L'électron et photon. Paris, 1938). Кроме того, оно возникает, конечно, при рассмотрении двух взаимодействующих частиц со спином $1/2$. Например, для дейтрона, состоящего из протона и нейтрона (различием их масс покоя можно пренебречь), 5-рядное представление связано с синглетным состоянием, 10-рядное — с триплетным. Ср. также более старую работу: *H. Kemmer*. Helv. phys. acta, 1937, **10**, 47, в которой рассматривается относительное движение нейтрона и протона на основе различных предположений о характере взаимодействия между ними. В общем случае различные представления относятся к состояниям с различной энергией (вырождение снимается взаимодействием). Однорядное представление относится к комбинации протона с положительной массой покоя и нейтрона с отрицательной массой покоя, что не имеет непосредственного значения в теории с c-числами.

Этому приведению соответствует разложение величин $u_{\rho\rho'}$, имеющих 16 компонент. Если для пространственно-подобного отражения ввести правило Рака́, то симметричная часть $u_{\rho\rho'}$ (для которой $u_{\rho\rho'} = u_{\rho'\rho}$), принадлежащая десятирядному представлению, состоит из антисимметричного тензора и обычного вектора, а антисимметричная часть делится на скаляр, связанный с однорядным представлением, и на псевдовектор и псевдоскаляр для пятирядного представления [38,39].

§ 5. Приложения теории

В заключение настоящей статьи приведем несколько простых приложений теории взаимодействия частиц со спином 0, 1 и $1/2$ с электромагнитным полем, которые обсуждались в § 2, г и 3, а ч. II. В случаях ненулевого спина будем называть магнитный момент, равный $e\hbar/2Mc$ (M — масса покоя частицы), нормальным магнитным моментом. Допущение о том, что магнитный момент может принимать более общее значение $\gamma e\hbar/2Mc$, требует введения в лагранжиан или гамильтониан дополнительных членов, пропорциональных $\gamma - 1$. Для спина 1 эти члены выражены равенством (66′), где $\gamma = 1 + k$, а для спина $1/2$ — равенством (90′), где $\gamma = 1 - \frac{2Mc}{\hbar}\frac{(\hbar c)^{1/2}}{el}$. Мы рассмотрим приложения нашей теории к столкновению (без излучения) двух заряженных частиц, к комптон-эффекту, тормозному излучению и образованию пар. Ввиду того что сечения для этих процессов можно использовать, чтобы понять природу проникающей компоненты космических лучей, мы будем для удобства называть «мезотроном» частицу с зарядом e и различными значениями спина и магнитного момента.

а) *Столкновение мезотронов с электронами без излучения.* В табл. 1 даны сечения рассеяния мезотронов кулоновским полем неподвижного центра, а в табл. 2 — для электромагнитного взаимодействия мезотрона с электроном в системе координат, в которой электрон первоначально покоится. Эти сечения вычислены известным методом Мёллера путем введения матричных элементов взаимодействия электрона с электромагнитным полем, создаваемым мезотроном, согласно различным теориям. В обоих процессах и в процессе тормозного излучения, рассмотренном в § 5, в, нас особенно интересует тот случай, когда начальная энергия E_0 мезо-

[38] В связи с этим см. формулу (31) в цитированной статье автора в Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 109, особенно с. 129. Как отметил Рака́, поведение величин, определенных в приведенной работе, меняется на обратное, если применять его правило отражений. Таким образом, величины, обозначенные Ω_1, s_k, Ω_2, которые принадлежат антисимметричной части $u_{\rho'\rho}$, становятся соответственно псевдоскаляром, псевдовектором и обычным скаляром, а величина $s_{[\lambda\mu\nu]}$, принадлежащая симметричной части $u_{\rho\rho'}$, становится обычным вектором.

[39] См. работы: *F. J. Belinfante.* Nature, 1939, 143, 201; Physica, 1939, 6, 870. Белинфанте предлагает описание мезонного поля с помощью симметричного «ундора» $u_{\rho'\rho} = u_{\rho\rho'}$.

Таблица 1

Рассеяние мезотронов кулоновским полем

E_0 — начальная энергия мезотрона; M — масса мезотрона; ϑ — угол рассеяния; $\eta = E_0/Mc^2$

Тип мезотрона			Сечение рассеяния
	Спин, $\hbar$	Магнитный момент, $e\hbar/2Mc$	
I	0	0	$\frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \frac{\eta^2}{(\eta^2-1)^2} \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$
II	$^1/_2$	0	$\frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \left[\frac{\eta^2}{(\eta^2-1)^2} - \frac{1}{(\eta^2-1)}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right] \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$
III*	$^1/_2$	$\gamma \neq 1$	$\frac{(\gamma-1)^2}{4}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$
IV	1	1	$\frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \left[\frac{\eta^2}{(\eta^2-1)^2} + \frac{1}{6}\sin\vartheta\right] \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$
V*	1	$\gamma \neq 1$	$\frac{(\gamma-1)^2}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \eta^2 d\Omega$

* Формулы III и V верны лишь при $\eta \gg 1$.

Ссылки на литературу: I, III, V: *H. Corben, J. Schwinger*. Phys. Rev., 1940, **58**, 953; II: *Ch. Møller*. Z. Phys., 1931; **70**, 786; Ann. Phys. (5), 1932, **14**, 531; IV: *O. Laporte*. Phys. Rev., 1938, **54**, 905; *H. Massey, H. Corben*. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1939, **35**, 463.

трона велика по сравнению с Mc^2. Данные табл. 2 и формул III и V табл. 1 верны лишь в этом случае, так как дают только главные члены разложения по $\eta = E_0/Mc^2$. В обеих таблицах формулы III и V на один порядок по η выше формул I и II, а формула V — еще на порядок выше. Как в этих, так и в разбираемых далее процессах сечения при заданном значении спина (кроме 0) являются наименьшими, когда магнитный момент принимает свое нормальное значение $e\hbar/2Mc$ [40].

б) *Рассеяние кванта света* (*комптон-эффект*). При расчете сечения этого эффекта и рассматриваемого ниже процесса излучения кванта света необязательно использовать квантование электромагнитного поля. Как

[40] Отметим, что в задаче о собственных значениях для мезотрона в статическом кулоновском поле для случаев III, IV, V (в отличие от I и II) не существует полной системы ортогональных функций, так как в волновых уравнениях второго порядка появляется в этом случае при $r = 0$ слишком сильная особенность. См. *И. Е. Тамм*. Докл. АН СССР, 1940, **29**, 551; Phys. Rev., 1940, **58**, 952; *H. C. Corben, J. Schwinger*. Phys. Rev., 1940, **58**, 953.

Таблица 2

Сечения упругого рассеяния быстрых мезотронов на электронах в системе координат, в которой электрон первоначально покоится

Члены порядка $(M/m)(Mc^2/\varepsilon E_0)$ и выше опущены; M — масса мезотрона; m — масса электрона; E_0 — начальная энергия мезотрона ($E_0 \gg Mc^2$); εE_0 — энергия, переданная электрону

Тип мезотрона			Сечение (на одно соударение)
	Спин	Магнитный момент	
I	0	0	$2\pi\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \frac{M}{m}\frac{Mc^2}{E_0}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}(1-\varepsilon)$
II	1/2	0	$2\pi\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \frac{M}{m}\frac{Mc^2}{E_0}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}\left(1-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)$
III	1/2	$\gamma \neq 1$	$\pi(\gamma-1)^2\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}(1-\varepsilon)$
IV	1	1	$\frac{2\pi}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\left(1-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)$
V	1	$\gamma \neq 1$	$\frac{2\pi}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)\frac{M}{m}\frac{E_0}{Mc^2}\,d\varepsilon(1-\varepsilon)$

Ссылки на литературу: I, III, V: *H. Corben, J. Schwinger.* Phys. Rev., 1940, 58, 953; II: *Ch. Møller.* Ann. Phys. (5), 1932, 14, 531; *H. Bhabha.* Proc. Roy. Soc. London, 1938, A164, 257; IV: *H. Massey, H. Corben.* Proc. Cambridge Philos. Soc., 1939, 35, 463; *J. Oppenheimer, H. Snyder, R. Serber.* Phys. Rev., 1940, 57, 75.

известно [41], конечный результат можно вывести из обычной волновой механики с помощью некоторых формальных постулатов согласно общему соответствию с классической теорией.

Результаты теории возмущений, приведенные в табл. 3, справедливы при всех энергиях. Полные сечения рассеяния, приведенные в табл. 3А, верны лишь, когда энергия падающего кванта k_0 велика по сравнению с Mc^2, так как даны только главные члены разложения по k_0/Mc^2. Относительно дифференциального сечения рассеяния следует помнить, что сохранение энергии и импульса приводит к соотношению

$$k = k_0\left[1 + \frac{k_0}{Mc^2}(1-\cos\vartheta)\right]^{-1}.$$

Так же как и в таблицах сечений соударений без излучения, формулы III и IV более высокого порядка, чем формулы I и II.

[41] Соотношение между обоими методами подробно рассмотрено В. Паули [*W. Pauli.* Handbuch der Physik, Bd. 24/2. (Русск. пер.: *В. Паули.* Общие принципы волновой механики. М.— Л., 1947, § 15.— *Ред.*)].

Таблица 3

Сечения комптоновского рассеяния

k_0 — начальная энергия кванта; k — конечная энергия кванта; рассеивающая частица массы M первоначально покоится; ϑ — угол рассеяния

	Тип рассеивающей частицы		Сечения рассеяния на угол ϑ для всех энергий (кроме случая III)
	Спин	Магнитный момент	
I	0	0	$d\Omega\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{1}{2}\frac{k^2}{k_0^2}\cos\vartheta$
II	$^1/_2$	1	$d\Omega\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{1}{2}\frac{k^2}{k_0^2}\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}-\sin^2\vartheta\right)$
III	$^1/_2$	$\gamma\neq 1$	$d\Omega\,(\gamma-1)^4\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{1}{4}\frac{k}{k_0}\left(\frac{k}{Mc^2}\right)^2+\ldots$
IV	1	1	$d\Omega\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{1}{2}\frac{k^2}{k_0^2}\Big[1+\cos^2\vartheta+\frac{1}{48\,(Mc^2)^2}\,[kk_0(28-64\cos\vartheta+12\cos^2\vartheta)+(k^2+k_0^2)\,(29-16\cos\vartheta+\cos^2\vartheta)]\Big]$

См. прим. к табл. 3А.

Таблица 3А

Сечения комптоновского рассеяния

Обозначения те же, что и в табл. 3

	Тип рассеивающей частицы		Полное эффективное сечение рассеяния
	Спин	Магнитный момент	
IA	0	0	$\pi\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{Mc^2}{k_0}$
IIA	$^1/_2$	1	$\pi\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{Mc^2}{k_0}\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{2k_0}{Mc^2}\right)$
IIIA	$^1/_2$	$\gamma\neq 1$	$\frac{\pi}{4}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2(\gamma-1)^4\frac{k_0}{Mc^2}+\ldots$
IVA *	1	1	$\frac{5\pi}{36}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{k_0}{Mc^2}$

* Коэффициент $5\pi/36$ в формуле IVA ошибочен. Правильный коэффициент $5\pi/18$ получен в работе Я. А. Смородинского (ЖЭТФ, 1940, 10, 840).— *Прим. ред.*

Ссылки на литературу: I, IA, IV: *F. Booth, A. Wilson.* Proc. Roy. Soc. London, 1940 **A175**, 483; II, IIA: *O. Klein, Y. Nishina.* Z. Phys., 1929, **52**, 853; *Y. Nishina.* Z. Phys., 1929, **52**, 869; *И. Е. Тамм.* Z. Phys., 1930, **62**, 545; III, IIIA, IVA: *H. Corben* (не опубликовано); III: *S. Batdorf, R. Thomas.* Phys. Rev., 1941, **59**, 621.

в) *Излучение светового кванта мезотроном в поле ядра* (*тормозное излучение*) *и образование пар.* В приложениях этих процессов к космическому излучению ядро нельзя рассматривать как точечный заряд. Скорее следует считать, что заряд ядра Ze распределен по сфере радиуса d. Этот радиус полагают согласно статистической модели ядра равным

$$d = \frac{5}{6Z^{1/3}} \frac{\hbar}{Mc}.$$

В табл. 4 приведены результаты различных теорий для случая $E_0 \gg Mc^2$. В случаях III и IV сечение опять более высокого порядка, чем в случаях I и II. Вероятности переходов для комптон-эффекта и процесса тормозного излучения кванта не являются независимыми друг от друга, так как последнюю можно также вычислить методом виртуальных квантов [42] (хотя в случае IV этот метод следует проверить прямым методом). Метод виртуальных квантов состоит в том, что рассматривается система координат, в которой мезотрон покоится, и берется разложение Фурье поля быстро движущегося ядра. Тогда рассеяние светового кванта в поле, для которого сечение можно найти по формулам для комптон-эффекта, соответствует излучению кванта в системе координат, в которой покоится ядро.

С излучением светового кванта весьма тесно связан процесс образования пар. Действительно, согласно теории дырок, этот процесс того же рода, что и излучение кванта, и отличается лишь тем, что при образовании пары световой квант существует в начальном состоянии, а затем поглощается, и что электрон в начальном состоянии имеет отрицательную энергию. Порядок величины сечений образования пар (см. табл. 4А) тот же, что и для соответствующих процессов тормозного излучения.

Если даже основы различных рассмотренных теорий верны, справедливость полученных результатов ограничивается тем, что сечения, вычисленные методом теории возмущений, представляют собой лишь первые приближения. Это особенно существенно для спина $1/2$ с аномальным магнитным моментом и спина 1, при котором сечения растут с ростом энергии. Применимость первого приближения теории возмущений в этих случаях исследовалась Оппенгеймером [43] и Ландау [44]. У первого автора критерием является условие малости энергии взаимодействия мезотрона и кванта по сравнению с невозмущенной энергией каждого из них в системе координат, в которой импульсы мезотрона и кванта равны и противоположно направлены; у второго автора — условие малости вероятностей перехода для всех других процессов, возможных при том же начальном состоянии (например, излучение нескольких пар световых квантов), по сравнению

---

[42] *C. Weizsäcker.* Z. Phys., 1934, 88, 612.

[43] *J. R. Oppenheimer.* Phys. Rev., 1941, 59, 462. См. также *J. R. Oppenheimer, H. Snyder, R. Serber.* Phys. Rev., 1940, 57, 75.

[44] *Л. Д. Ландау.* ЖЭТФ, 1940, 10, 418. (Ср. также *Л. Д. Ландау, Я. А. Смородинский.* ЖЭТФ, 1941, 11, 55.— *Ред.*).

Таблица 4

Сечения тормозного излучения

E_0 — начальная энергия мезотрона ($E \gg Mc^2$); M — масса мезотрона; εE_0 — энергия испускаемого γ-излучения; Z — атомный номер вещества, в котором движется мезотрон; $A = \frac{12(1-\varepsilon)}{5Mc^2 Z^{1/3}\varepsilon} E_0$

	Тип мезотрона		Сечение
	Спин	Магнитный момент	
I	0	0	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 d\varepsilon \frac{16}{3}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(\ln A - \frac{1}{2}\right)$
II	1/2	1	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 d\varepsilon \frac{16}{3}\left(\frac{3\varepsilon}{4} + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(\ln A - \frac{1}{2}\right)$
III	1/2	$\gamma \neq 1$	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 (\gamma - 1)^4 d\varepsilon \left[\frac{(1-\varepsilon)E_0}{Mc^2 Z^{1/3}} + \frac{\varepsilon}{2}\ln^2 A - \frac{3\varepsilon}{2}\ln A + \ldots\right]$
IV	1	1	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 d\varepsilon \left[\frac{E_0}{Mc^2 Z^{1/3}}\frac{\pi}{60}(2 - 2\varepsilon + 7\varepsilon^2) + \frac{\varepsilon}{12}\left(17 + \frac{7\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon)}\right)\ln^2 A + \left(\frac{16(1-\varepsilon)}{3\varepsilon} + \frac{13\varepsilon}{12} - \frac{5\varepsilon^3}{24(1-\varepsilon)}\right)\ln A + \ldots\right]$

См. прим. к табл. 4А.

Таблица 4А

Сечения образования пар

E_0 — начальная энергия γ-излучения; εE_0 — энергия созданного положительного мезотрона; M — масса мезотрона; Z — атомный номер вещества; $B = \frac{12\varepsilon(1-\varepsilon)}{5Mc^2 Z^{1/3}} E_0$

	Тип мезотрона		Сечение
	Спин	Магнитный момент	
I	0	0	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 d\varepsilon \frac{16}{3}\varepsilon(1-\varepsilon)\left(\ln B - \frac{1}{2}\right)$
II	1/2	1	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 d\varepsilon \frac{16}{3}\left[\frac{3}{4} - \varepsilon(1-\varepsilon)\right]\left(\ln B - \frac{1}{2}\right)$
III	1/2	$\gamma \neq 1$	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 (\gamma - 1)^4 d\varepsilon \left[\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{Mc^2 Z^{1/3}} E_0 + \ldots\right] + \ldots$
IV	1	1	$\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 d\varepsilon \left[\frac{E_0}{Mc^2 Z^{1/3}}\frac{\pi}{40}(7 - 2\varepsilon + \varepsilon^2) + \ldots\right]$

Ссылки на литературу: I, IV: *H. Christy, S. Kusaka.* Phys. Rev., 1941, 59, 414; II: *W. Heitler.* The Quantum Theory of Radiation, Oxford, 1936 (русск. пер.: *В. Гайтлер.* Квантовая теория излучения. М.— Л., 1940.— *Ред.*) (во всех случаях формулы соответственно изменены с учетом конечных размеров ядра); III. *S. Batdorf, R. Thomas.* Phys. Rev., 1941, 59, 621. Автор признателен м-ру Томасу за сообщение ему этих результатов.

с вероятностью рассматриваемого процесса [45]. Для тормозного излучения, образования пар и комптон-эффекта оба эти критерия дают одно и то же условие: $E_0 < \frac{\hbar c}{e^2} Mc^2$, или $h\nu < \frac{\hbar c}{e^2} Mc^2$. Но для спина 0 и спина $^1/_2$ с нормальным магнитным моментом эти условия выполнены для всех энергий, если $Ze^2/\hbar c \leqslant 1$ [46].

Хотя очевидно, что эти критерии являются необходимыми условиями применимости первого приближения теории возмущений, было бы желательно подробное исследование достаточности этих условий (особенно для спина 0). В таком исследовании потребуется рассматривать высшие приближения теории возмущений. Поскольку это приводит к появлению бесконечностей, которые следует исключить, произведя соответствующим образом обрывание, то эта задача не является чисто математической и затрагивает физическую проблему области применимости основ настоящей теории.

Поступила 8 мая 1941 г.

Цюрих,
Физический институт Высшей технической школы
Принстон,
Институт перспективных исследований

---

[45] Согласно Ландау, число рассеянных частиц с заданным значением момента количества движения l, вычисленное по формуле теории возмущений, должно быть меньше, чем их число в падающем потоке.— *Прим. ред.*

[46] Для применимости значения сечения рассеяния без излучения мезотронов со спином 1 и нормальным магнитным моментом на первоначально покоившемся электроне (табл. 2, случай IV) Оппенгеймер, Снайдер и Сербер (Phys. Rev., 1940, **57**, 75) дают критерий $E_0 < \frac{M}{m} \frac{\hbar c}{e^2} Mc^2$.

1942

ПСЕВДОСКАЛЯРНОЕ МЕЗОННОЕ ПОЛЕ С СИЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ *

(Совместно с С. Данковым)

В этой статье рассматривается симметричная и заряженная псевдоскалярные теории мезонного поля в приближении сильной связи для случая одного-единственного источника. Методами волновой механики вычисляются уровни энергии возбужденных состояний тяжелых частиц и сечение рассеяния свободных мезонов. Получено также выражение для магнитного момента протона или нейтрона. В то время как сечение рассеяния, при разумных допущениях, можно привести в согласие с экспериментом, результаты для магнитного момента не согласуются с известными значениями качественно, именно для протона и нейтрона предсказываются равные и противоположные моменты.

1. Введение

Рассмотрение связи мезонного поля с тяжелой частицей по методу теории возмущений, основанной на предположении о том, что эта связь слабая, сталкивается с рядом фундаментальных трудностей. Расходимости, возникающие вследствие того, что тяжелая частица трактуется как бесконечно тяжелая материальная точка, в некоторых случаях могут быть произвольно устранены методами обрезания; однако можно показать, что эти методы нельзя последовательно сформулировать таким образом, чтобы выполнялся критерий слабой связи [1]. Кроме того, значения сечения рассеяния мезонов, получаемые в этой теории, оказываются вообще намного выше значений, наблюдаемых для мезонов в космических лучах. Результаты до известной степени зависят от принятого в теории частного вида мезонного поля. В предположении, что спин мезона равен нулю [2] (заряженные или симметричные псевдоскалярные мезоны), теория возмущений дает следующий результат [3] для рассеяния мезона нуклоном [4]:

$$dq = g^4\varkappa^{-2}\,(p/\varkappa)^2(1+\cos\theta)d\Omega \qquad \text{при} \qquad \hbar p \gg Mc,$$

$$dq = g^4\varkappa^{-2}(p^2/\varkappa E)^2 d\Omega \qquad \text{при} \qquad \hbar p \ll Mc, \ M \to \infty.$$

Здесь g — безразмерная постоянная, выражающая силу связи; $\varkappa = \mu c/\hbar$,

* *The pseudoscalar meson field with strong coupling.* (With S. M. Dancoff).— Phys. Rev., 1942, 62, 85—108.

[1] Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующей статье, посвященной проблеме двух источников. Мы обязаны проф. Р. Серберу за ценные дискуссии по этому вопросу, а также по некоторым другим, затронутым в данной статье.

[2] Это одна из двух возможностей, остающаяся открытой при учете процессов электромагнитного излучения мезона. См. *R. F. Christy*, *S. Kusaka*. Phys. Rev., 1941, 59, 405, 414. Другое возможное значение спина (1/2) обсуждается в статье: *J. R. Oppenheimer*, *E. Nelson*. Phys. Rev., 1942, 61, 202.

[3] *H. Yukawa*, *Y. Tanikawa*. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 1941, 23, 445.

[4] Термин «нуклон» эквивалентен «протону — нейтрону».

где μ — масса покоящегося мезона; p — импульс налетающего мезона, деленный на $\hbar$; E — полная энергия, деленная на $\hbar c$; M — масса покоя нуклона; θ — угол рассеяния. Эти сечения относятся к процессам, в которых мезон рассеивается с первоначальным зарядом. В случае симметричной теории возможны также процессы рассеяния, в которых мезон изменяет заряд на противоположный. Если отрицательный (положительный) мезон сталкивается с протоном (нейтроном), он может превратиться в нейтральный мезон, а нуклон перейдет при этом в протон (нейтрон). Согласно еще не опубликованным вычислениям Ф. Адлера, соответствующие сечения выражаются формулами:

$$dq = g^4\varkappa^{-2}\,(p/\varkappa)^2(1-\cos\theta/2)^2 d\Omega \qquad \text{при} \qquad \hbar p \gg Mc,$$

$$dq = g^4\varkappa^{-2}\,(p^2/\varkappa E)^2\, 2\sin^2\theta d\Omega \qquad \text{при} \qquad \hbar p \ll Mc,\ \ M \to \infty.$$

Численная оценка полного сечения зависит от величины g. Обычно она определяется из сравнения предсказаний теории ядерных сил со свойствами дейтрона. При этом приходится вводить обрезание или видоизменять радиальную зависимость сил взаимодействия другим способом. Как указывалось выше, подобную процедуру не удается провести так, чтобы она не противоречила гипотезе слабой связи. Тем не менее получаемое таким образом значение g ($g^2 \sim 0{,}1$) используется далее для того, чтобы оценить по порядку величины сечение рассеяния. Мы получаем полное сечение $\sim 2\cdot10^{-26}$ *см*^{2}, тогда как из экспериментов с космическими лучами следует, что верхний предел этого сечения равен [5] $5\cdot10^{-28}$ *см*^{2}.

Для объяснения малости сечения рассеяния мезонов были предложены две, казалось бы, различные теории. Гейзенберг указал на то, что собственное поле нуклона — и, в частности, взаимодействие, пропорциональное $1/a$[6], которое можно рассматривать как инерцию спина, — оказывает значительное влияние на движение спина нуклона. В качестве примера он вычислил классическими методами сечение рассеяния по нейтральной теории, в которой мезоны обладают спином 1; он нашел, что сечение рассеяния пропорционально $a^2\,(p/E)^4$ при условии $g^2 \gg \varkappa a$ [7].

Вторая теория, предложенная Гайтлером [8] и Баба́ [9], основывается на предположении о существовании возбужденных состояний нуклона (изо-

[5] См., например, *R. P. Schutt.* Phys. Rev., 1942, 61, 6. Имеется обзор более старой литературы.

[6] Величина a измеряет радиус нуклона. Точное определение дается формулой (4).

[7] *W. Heisenberg.* Z. Phys., 1939, **113**, 61. Проблема взаимодействия диполя со своим собственным электромагнитным или мезонным полем подробно рассмотрена в работах: *H. J. Bhabha, H. C. Corben.* Proc. Roy. Soc. London, 1941, **A178**, 273; *H. J. Bhabha.* Proc. Roy. Soc. London, 1941, **A178**, 314. Применялся классический, но релятивистски-инвариантный метод. Члены в гамильтониане, пропорциональные $1/a$, заменялись членами, содержащими неопределенные постоянные. Такая процедура может оказаться более точной, чем используемая в этой статье, но она не приспособлена для квантовомеханического рассмотрения проблемы.

[8] См. обстоятельную работу Гайтлера и Ма (*W. Heitler, S. T. Ma.* Proc. Roy. Soc. London, 1940, **A176**, 368).

[9] *H. J. Bhabha.* Phys. Rev., 1941, 59, 100. В этой работе обсуждается влияние кулоновых сил на вероятность рождения протона с удвоенным зарядом.

баров) с более высокими значениями заряда (Баба́) и спина (Гайтлер). В этой теории разность энергий ΔE между последовательными изобарными состояниями не вычисляется, а предполагается заранее известной. Для сечения рассеяния мезона на покоящемся нуклоне (бесконечно большой массы) на основе таких предположений получается значительно уменьшенное значение

$$q_1 = q_0(\Delta E/E)^2.$$

Здесь E — энергия мезона и q_0 — полное сечение (приведенное выше) рассеяния, вычисленное по теории возмущений.

Оппенгеймер и Швингер [10] показали, что оба эти объяснения в действительности эквивалентны. В самом деле, следствием предположений Гейзенберга оказывается существование возбужденных состояний нуклона, соответствующих степени свободы, отвечающей реакции нуклонного спина. Легко видеть, что, полагая эту энергию возбуждения пропорциональной величине

$$\Delta E \sim \varkappa^2 a/g^2$$

и комбинируя ее с результатом Гейзенберга

$$q_1 = a^2\,(p/E)^4,$$

мы получаем формулу Гайтлера и Баба для q_1/q_0. Приведенная здесь формула для ΔE, предположительно верная для векторных мезонов, идентична соответствующей формуле, которая ниже будет строго выведена для псевдоскалярного случая.

2. Результаты и выводы

Мы приведем здесь главные результаты нашего исследования, включая возбуждение изобарных состояний, сечение рассеяния мезонов и результирующий магнитный момент протона и нейтрона. В качестве условия справедливости приближения сильной связи мы получаем $g \gg \varkappa a$ в случае источника малых размеров ($\varkappa a \ll 1$). Для энергии возбуждения изобаров мы нашли

$$\frac{\Delta E}{\mu c^2} = \frac{3}{2}\frac{\varkappa a}{g^2}\left[j(j+1) - \frac{3}{4}\right] \text{ в симметричной теории,}$$

$$\frac{\Delta E}{\mu c^2} = \frac{3}{2}\frac{\varkappa a}{g^2}\left[2j(j+1) - n^2 - \frac{5}{4}\right] \text{ в теории с заряженными мезонами.}$$

Здесь полуцелое число j означает полный момент импульса, а полуцелое квантовое число n — электрический заряд (в единицах e) минус половина. В обоих случаях величина n ограничена условием $-j \leqslant n \leqslant j$; с другой стороны, энергия изобаров в первом случае не зависит от n. Радиус нуклона a определяется формулой (4). Протон и нейтрон идентифицируются с двумя низшими состояниями этой системы, соответствующими значениям $j = {}^1/_2$, $n = \pm\,{}^1/_2$. Высшие состояния будут стабильными по от-

---

[10] *J. R. Oppenheimer, J. Schwinger*. Phys. Rev., 1941, 60, 150.

ношению к «мезонному распаду» в эти основные состояния только при условии $\Delta E \ll \mu c^2$ или $g^2/\varkappa a \gg 1$.

Для полного сечения рассеяния (упругое плюс неупругое рассеяние как с изменением, так и с сохранением заряда) при условиях $g \gg \varkappa a$, $\varkappa a \ll 1$, $pa \ll 1$ мы нашли:

$$dq = \frac{3}{4}(p/E)^4 a^2 (1 + \cos^2\theta) d\Omega,$$

$$q = 4\pi (p/E)^4 a^2 \text{ в симметричной теории;}$$

$$dq = \frac{3}{4}(p/E)^4 a^2 (1 + 3\cos^2\theta) d\Omega,$$

$$q = 6\pi (p/E)^4 a^2 \text{ в заряженной теории.}$$

Как уже было показано Оппенгеймером и Швингером, согласие с экспериментальным сечением рассеяния мезонов получается, если предположить, например, в симметричной теории $a \sim \hbar/Mc = 2\cdot 10^{-14}$ *см*, что означает $\varkappa a \sim 0{,}1$. Возвращаясь к условию сильной связи $g \gg \varkappa a$, видим, что ему удовлетворяют значения $g^2 \gg 0{,}01$.

Магнитный момент системы «нуклон + мезонное поле» оказывается равным (в протонных магнетонах)

$$\pm\left[\frac{10}{36}\frac{g^2}{\varkappa a} + \frac{1}{6}\right],$$

причем знаки $\pm$ относятся соответственно к протону и нейтрону. По порядку величины это примерно совпадает с известными значениями. Наблюдаемый магнитный момент нейтрона, равный 1,93 протонных магнетона, можно получить, полагая $g^2/\varkappa a = 6{,}3$; при $\varkappa a = 0{,}1$ находим $g^2 = 0{,}63$, что соответствует области сильной связи. Однако предсказание, что нейтрон и протон обладают равными и противоположными по знаку моментами, противоречит опыту. Второй член в приведенном выше выражении отвечает вкладу самого нуклона. Этот вклад не вполне определен, так как фундаментальные свойства «голого» протона или нейтрона нам неизвестны. Следовательно, расхождение нельзя считать бесспорным опровержением гипотезы сильной связи. Однако надежда, что аномальные моменты будут получены теорией просто, не оправдалась.

Следует заметить, что полученные выше результаты количественно отличаются от результатов, полученных полуклассическими методами Оппенгеймером и Швингером и детально описанных Швингером [11]. В этом методе спин σ и изотопический спин τ трактуются как классические единичные векторы. В заряженной скалярной и нейтральной псевдоскалярной теориях полуклассический метод дает количественное согласие с квантовомеханическими результатами в предельном случае сильной связи. Однако в нашем случае это не так; в частности, ограничение $-j \ll n \ll j$ не возникает. Расхождение это неудивительно, если вспомнить,

[11] *J. Schwinger*. Phys. Rev., 1942, **61**, 387.

что полуклассический метод не учитывает перестановочных соотношений между различными компонентами векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\sigma}$. При квантовомеханическом рассмотрении, как нетрудно видеть, перестановочные соотношения играют существенную роль в определении наименьшего собственного значения энергии взаимодействия (см. разд. 4). Но после того, как эта часть проблемы разрешена, разница между двумя методами исчезает.

Остальные разделы этой работы посвящены выводу изложенных выше результатов. В разд. 3—6 мы вводим для симметричного псевдоскалярного поля такие новые переменные, чтобы энергия выражалась через свободные и связанные с нуклоном мезоны. В разд. 6 мы находим зависимость энергии от заряда и момента импульса облака связанных мезонов и детально обсуждаем условия справедливости различных видов приближения сильной связи. В разд. 7 мы вычисляем сечения рассеяния. Разд. 8 содержит приложение этих вычислений к случаю заряженных псевдоскалярных мезонов. В разд. 9 излагаются вычисления магнитного момента, а в приложении описывается альтернативный метод разложения полевых величин с использованием углов Эйлера.

3. Расщепление поля на нулевое состояние и возбужденные состояния

В симметричной псевдоскалярной теории поле удобно описывать тремя *вещественными* величинами $\varphi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, 3$. Гамильтониан H представляется в виде суммы гамильтониана свободных частиц H_0 и энергии взаимодействия H_1. Первая из этих частей имеет вид [12]

$$H_0 = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2} \int [\pi_\alpha^2 + (\nabla\varphi_\alpha)^2 + \varkappa^2\varphi_\alpha^2]\, dV = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2} \int [\pi_\alpha^2 + \varphi_\alpha(-\Delta + \varkappa^2)\varphi_\alpha]\, dV, \tag{1}$$

где π_α — обобщенные импульсы, сопряженные φ_α и удовлетворяющие, для фиксированного момента времени, перестановочным соотношениям

$$i\,[\pi_\alpha(\mathbf{x}),\ \varphi_\beta(\mathbf{x}')] = \delta_{\alpha\beta}\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{2}$$

Относительно энергии взаимодействия мы предполагаем, что тяжелая частица, которую мы будем называть нуклоном, покоится и характеризуется функцией сферически-симметричного источника $K(\mathbf{x}) = K(|\mathbf{x}|)$, которая имеет следующую нормировку:

$$\int K(x)\, dV = 1, \tag{3}$$

[12] Здесь мы всюду применяем естественные единицы, в которых $\hbar = c = 1$, или, другими словами, энергии поделены на $\hbar c$, импульсы на $\hbar$, моменты импульса на $\hbar$, электрические заряды на $(\hbar c)^{1/2}$; $\varkappa$ означает массу покоя свободного мезона μ, деленную на $\hbar c$.

и определяет радиус нуклона a:

$$a^{-1} = \iint K(x)\,(1/r)\,K(x')\,dV dV'. \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем r означает

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \tag{5}$$

Кроме того, нуклон может существовать в двух состояниях, соответствующих протону и нейтрону, и еще в двух состояниях, соответствующих различным направлениям спина. Первая степень свободы описывается матрицами изотопического спина τ_1, τ_2, τ_3, или τ_α при $\alpha = 1,2,3$; вторая степень свободы — матрицами спина σ_x, σ_y, σ_z, или σ. Матрицы этих двух типов удовлетворяют аналогичным соотношениям:

$$\tau_1\tau_2 = i\tau_3, \ \ldots, \ \tau_1^2 = 1, \ \ldots, \tag{6}$$

$$\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z, \ \ldots, \ \sigma_x^2 = 1, \ \ldots \tag{7}$$

Здесь ... означают аналогичные соотношения, получаемые циклической перестановкой. Энергия взаимодействия имеет вид

$$H = -(g/\varkappa)(4\pi)^{1/2}/\sqrt{2}\sum_\alpha \int K(x)\,\tau_\alpha(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\,\varphi_\alpha dV = \\ = (g/\varkappa)(4\pi)^{1/2}/\sqrt{2}\sum_\alpha \int \nabla K\tau_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi_\alpha dV. \tag{8}$$

Множитель $(4\pi)^{1/2}$ введен для того, чтобы g выражалась не в единицах Хевисайда, а в обычных единицах; множитель $1/\sqrt{2}$ введен для того, чтобы согласовать с обозначениями в теориях, вводящих только заряженные частицы; множитель $1/\varkappa$ делает константу g безразмерной [13]. Полный заряд системы «мезонное поле + нуклон», измеряемый в единицах e (заряд электрона), выражается формулой

$$\varepsilon = \int (\varphi_1\pi_2 - \varphi_2\pi_1)\,dV + \frac{1}{2}(1 + \tau_3). \tag{9}$$

Симметричные теории характеризуются тем, что заряд в них является только одной компонентой изотопического спина $T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$ ($\alpha, \beta = 1,2,3$), который представляет собой более общий интеграл движения и определяется формулой

$$T_{\alpha\beta} = \int (\varphi_\alpha\pi_\beta - \varphi_\beta\pi_\alpha)\,dV + \frac{1}{2}\tau_{\alpha\beta}, \tag{10}$$

где $\tau_{12} = -\tau_{21} = \tau_3$, ... В этом случае заряд выражается через «12»-компоненту изотопического спина: $\varepsilon = T_{12} + 1/2$.

---

[13] Наша константа g связана с константой g_Y, введенной Юкавой, равенством $g = g_Y(\hbar c)^{-1/2}$.

Выражение для энергии взаимодействия (8) позволяет ввести определение [14]

$$\varphi^0_{\alpha k} = -(4\pi)^{1/2}\int K(x)\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_k}dV = (4\pi)^{1/2}\int\frac{\partial K}{\partial x_k}\varphi_\alpha dV, \quad (11)$$

которое дает

$$H_1 = \frac{g}{\varkappa\sqrt{2}}\sum_{\alpha,k}\tau_\alpha\sigma_k\varphi^0_{\alpha k}. \quad (8')$$

Кроме того, мы расщепим поле $\varphi_\alpha(x)$ на две части, из которых одна, $\varphi'_\alpha(x)$, ортогональна градиенту функции источника

$$\int\varphi'_\alpha\nabla K\,dV = 0, \quad (12)$$

а вторая пропорциональна градиенту потенциала $X(x)$, создаваемого функцией источника в соответствии с уравнением

$$(-\Delta+\varkappa^2)X = 4\pi K, \qquad X(x) = \int K(x')\frac{e^{-\varkappa r}}{r}dV'. \quad (13)$$

Если мы введем определения

$$\delta_{ik}I = \int\frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial K}{\partial x_k}dV = \iint\frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\frac{\partial K}{\partial x_k}\,dVdV', \quad (14)$$

$$\xi(x) = \frac{X(x)}{I}, \qquad \delta_{ik} = \int\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\frac{\partial K}{\partial x_k}dV, \quad (15)$$

то из (11) и (12) следует, что

$$\varphi_\alpha(x) = 1/(4\pi)^{1/2}\sum_k\varphi^0_{\alpha k}\frac{\partial\xi}{\partial x_k} + \varphi'_\alpha(x), \quad (16)$$

откуда

$$\varphi'_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x) - \nabla\xi\cdot\int\nabla K\varphi_\alpha dV. \quad (17)$$

Вследствие того, что мы выбрали первую часть поля в виде линейной функции градиента $\partial X/\partial x_k$ (а не $\partial K/\partial x_k$), в выражение для потенциальной энергии H_0 в силу (12) не входят перекрестные произведения $\varphi^0_{\alpha k}$ и $\varphi'_\alpha(x)$. Действительно, используя (13) и (15), имеем

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha\int\varphi_\alpha(-\Delta+\varkappa^2)\varphi_\alpha dV = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,k}\frac{(\varphi^0_{\alpha k})^2}{I} + \frac{1}{2}\sum_\alpha\int\varphi'_\alpha(-\Delta+\varkappa^2)\varphi'_\alpha dV. \quad (18)$$

---

[14] Малые латинские индексы $i, k, \ldots$ пробегают значения от 1 до 3 и обозначают компоненты векторов в обычном пространстве.

Расщепление импульса $\pi(x)$, сопряженного $\varphi(x)$, описывается формулами:

$$\pi_\alpha(x) = (4\pi)^{1/2} \sum_k \pi^0_{\alpha k} \frac{\partial K}{\partial x_k} + \pi'_\alpha(x), \tag{16'}$$

$$\int \pi'_\alpha \nabla\xi dV = 0, \tag{12'}$$

$$\pi^0_{\alpha k} = 1/(4\pi)^{1/2} \int (\partial\xi/\partial x_k)\, \pi_\alpha dV, \tag{11'}$$

$$\pi'_\alpha = \pi_\alpha(x) - \nabla K \int \nabla\xi \pi_\alpha dV. \tag{17'}$$

В соответствии с (2) из этих формул следуют перестановочные соотношения:

$$i\,[\pi^0_{\alpha i}, \varphi^0_{\beta k}] = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}, \tag{19}$$

$$[\pi^0_{\alpha k}, \varphi'_\beta(x)] = [\pi'_\alpha(x), \varphi^0_{\beta k}] = 0, \tag{20}$$

$$i\,[\pi'_\alpha(\mathbf{x}_1), \varphi'_\beta(\mathbf{x}_2)] = \delta_{\alpha\beta}\{\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \nabla_1 K \cdot \nabla_2 \xi\}. \tag{21}$$

Последнее соотношение, таким образом, находится в прямом согласии с условиями ортогональности (12), (12').

Изотопический спин (10) расщепляется просто:

$$T_{\alpha\beta} = \int (\varphi'_\alpha \pi'_\beta - \varphi'_\beta \pi'_\alpha)\, dV + \sum_k (\varphi^0_{\alpha k}\pi^0_{\beta k} - \varphi^0_{\beta k}\pi^0_{\alpha k}) + \frac{1}{2}\tau_{\alpha\beta}. \tag{22}$$

Однако в выражении для кинетической энергии получаются перекрестные члены, содержащие $\pi^0_{\alpha i}$ и $\pi'_\alpha(x)$; используя сокращенное обозначение

$$\delta_{ik} N = 4\pi \int \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial x_k} dV, \tag{23}$$

или

$$N = \frac{4\pi}{3} \int (\nabla K)^2\, dV,$$

мы можем написать для нее выражение

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha \int \pi^2_\alpha dV = \frac{1}{2} N \sum_{\alpha,k} (\pi^0_{\alpha k})^2 + (4\pi)^{1/2} \sum_{\alpha,k} \pi^0_{\alpha k} \int \frac{\partial K}{\partial x_k} \pi'_\alpha(x)\, dV + \frac{1}{2}\sum_\alpha \int (\pi'_\alpha)^2\, dV. \tag{24}$$

Полный гамильтониан получаем, объединяя (24), (18) и (8'):

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{2} N \sum_{\alpha,k} (\pi^0_{\alpha k})^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,k} (\varphi^0_{\alpha k})^2/I + g/\varkappa \sqrt{2} \sum_{\alpha,k} \tau_\alpha \sigma_k \varphi^0_{\alpha k} + \\ & + (4\pi)^{1/2} \sum_{\alpha,i} \pi^0_{\alpha i} \int (\partial K/\partial x_i)\, \pi'_\alpha(x)\, dV + \frac{1}{2}\sum_\alpha \int (\pi'_\alpha)^2 dV + \\ & + \frac{1}{2}\sum_\alpha \int \varphi'_\alpha(-\Delta + \varkappa^2)\, \varphi'_\alpha dV. \end{aligned} \tag{I}$$

Совершенно так же, как в случае изотопического спина, следствием сферической симметрии функции источника $K(x)$ является существование интеграла момента импульса $L_{ik} = -L_{ki}$, определяемого формулой

$$L_{ik} = -\sum_{\alpha}\int \pi_{\alpha}\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\varphi_{\alpha} dV + \frac{1}{2}\sigma_{ik}. \qquad (10')$$

Этот интеграл расщепляется следующим образом:

$$L_{ik} = \frac{1}{2}\sigma_{ik} + \sum_{\alpha}(\varphi^0_{\alpha i}\pi^0_{\alpha k} - \varphi^0_{\alpha k}\pi^0_{\alpha i}) - (4\pi)^{1/2}\sum_{\alpha, l}\pi^0_{\alpha l}\int \frac{\partial K}{\partial x_l}\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\varphi'_{\alpha} dV - 1/(4\pi)^{1/2}\sum_{\alpha, l}\varphi^0_{\alpha l}\int \pi'_{\alpha}\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x_l} dV - \sum_{\alpha}\int \pi'_{\alpha}\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\varphi'_{\alpha} dV. \qquad (22')$$

Условия ортогональности (12), (12′) в этом случае не ведут к уничтожению перекрестных членов. Мы все же обращаем внимание на то, что в случае нулевого поля выражение для момента импульса принимает простой вид первой суммы в формуле (22′).

4. Собственные значения энергии взаимодействия. Новые переменные для нулевого состояния

В то время как обычно энергия взаимодействия H_1 считается малым возмущением (слабая связь), мы в этой статье рассматриваем противоположный предельный случай — сильную связь. В этом случае следует сначала изучить собственные значения энергии взаимодействия H_1, выражаемой формулой (8′), а затем взять только самое низшее из них в предположении, которое будет далее исследовано, что следующий возбужденный уровень не вносит заметного возмущения в систему, находящуюся в этом низшем состоянии.

Для того чтобы определить четыре собственных значения формы

$$\sum_{\alpha, k}\tau_{\alpha}\sigma_k\varphi^0_{\alpha k},$$

в которой девять коэффициентов $\varphi^0_{\alpha k}$ вещественны, мы должны иметь в виду, что τ и σ можно подвергнуть независимым вещественным ортогональным преобразованиям

$$\tau_{\alpha} = \sum_{r=1}^{3}\tau'_r B_{r\alpha}, \qquad \sigma_k = \sum_{s=1}^{3} A_{ks}\sigma'_s, \qquad (25)$$

где B и A удовлетворяют условиям ортогональности, которые мы напишем в матричном обозначении:

$$A\bar{A} = \bar{A}A = 1, \quad B\bar{B} = \bar{B}B = 1, \qquad (26)$$

причем $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — транспонированные матрицы ($\bar{A}_{sk} = A_{ks}$, $\bar{B}_{\alpha r} = B_{r\alpha}$). Собственные значения нашей формы поэтому совпадают с собственными значениями другой формы:

$$\sum_{r,\,s} \tau'_r (B\varphi^0 A)_{rs} \sigma'_s. \qquad (27)$$

Докажем теперь, что ортогональные матрицы A, B можно выбрать так, чтобы новая матрица $B\varphi^0 A$ стала диагональной:

$$(B\varphi^0 A)_{rs} = Q_r \delta_{rs}, \qquad (28)$$

или в соответствии с (26)

$$\varphi^0_{\alpha k} = (\bar{B} Q \bar{A})_{\alpha k} = \sum_r B_{r\alpha} Q_r A_{kr}. \qquad (29)$$

Для этого рассмотрим две симметричные формы:

$$C = \bar{\varphi}\varphi, \quad \text{или} \quad C_{ik} = C_{ki} = \sum_\alpha \varphi^0_{\alpha i} \varphi^0_{\alpha k} \qquad (30)$$

и

$$C' = \varphi\bar{\varphi}, \quad \text{или} \quad C'_{\alpha\beta} = C'_{\beta\alpha} = \sum_k \varphi^0_{\alpha k} \varphi^0_{\beta k}. \qquad (30')$$

Выберем A в виде ортогональной матрицы, преобразующей C к главным осям (что всегда возможно в силу симметричности C), и обозначим собственные значения C через $(Q_r)^2$. Эти значения заведомо неотрицательны, так как форма

$$\sum_{i,\,k} C_{ik} x_i x_k = \sum_\alpha \left(\sum_k \varphi^0_{\alpha k} x_k \right)^2$$

дефинитна. Это означает, что мы имеем

$$CA = AQ^2, \quad \text{или} \quad \bar{A}CA = Q^2. \qquad (31)$$

Заметим, что матрица A единственна с точностью до знака и за исключением случая, когда некоторые Q_r обращаются в нуль или несколько Q_r равны друг другу. Определим теперь матрицу B соотношением

$$\varphi A = \bar{B} Q, \qquad (32)$$

причем Q_r определяется как корень квадратный из собственного значения Q_r^2 матрицы C со знаком, который будет выбран позже. Умножая на $\bar{\varphi}$ слева и учитывая (30) и (31), получаем

$$AQ^2 = \bar{\varphi}\bar{B}Q,$$

или

$$AQ = \bar{\varphi}\bar{B}, \quad \bar{A}AQ = Q = \bar{A}\bar{\varphi}\bar{B}.$$

Транспонируя матрицы и учитывая, что Q — диагональная матрица, находим

$$B\varphi A = Q,$$

что доказывает равенство (28). Теперь, умножая (32) на B слева, получаем

$$B\varphi A = Q = B\bar{B}Q.$$

Поэтому $B\bar{B} = 1$, что доказывает ортогональность матрицы B. (Для случая кратного собственного значения Q_r отсюда ортогональность $B\bar{B} = 1$ не следует, но легко может быть достигнута.) Умножая равенство $AQ = \bar{\varphi}\bar{B}$ на $B\varphi$ слева, имеем:

$$B\varphi AQ = Q^2 = B\varphi\bar{\varphi}\bar{B} = BC'\bar{B},$$
$$BC' = Q^2B, \text{ или } BC'\bar{B} = Q^2. \tag{33}$$

Эти равенства аналогичны (31) и показывают, что собственные значения матриц C' и C совпадают.

Если собственное значение Q_r равно нулю, то элементы $B_{r\alpha}$ матрицы B не определяются формулой (32), и предыдущее доказательство неполно. Допустим сначала, что существует простое собственное значение $Q_3 = 0$, $Q_1 \neq 0$, $Q_2 \neq 0$. Из уравнения (31) при $r = 3$ имеем

$$\sum_k \varphi^0_{\alpha k} A_{k3} = 0.$$

Уравнение $AQ = \bar{\varphi}\bar{B}$ в этом случае не является следствием доказанного уравнения $AQ^2 = \bar{\varphi}\bar{B}Q$ и для $r = 3$ может служить определением третьего столбца матрицы B, а именно:

$$\sum_\alpha \varphi^0_{\alpha k} B_{3\alpha} = 0.$$

Это может быть сделано всегда, так как в этом случае определитель матрицы $\varphi^0_{\alpha k}$ равен нулю. В столбце $B_{3\alpha}$ остается еще неопределенный произвольный множитель, не зависящий от α. Этот множитель можно выбрать так, чтобы выполнялось уравнение $Q = B\bar{B}Q$, и вместе с тем так, чтобы он удовлетворял уравнению

$$\sum_\alpha B^2_{3\alpha} = 1,$$

непосредственно не вытекающему из приведенного выше. Комбинируя равенства $Q = B\bar{B}Q$ и $\sum_\alpha B^2_{3\alpha} = 1$, мы получаем опять $B\bar{B} = 1$.

В разд. 8 рассмотрим частный случай:

$$Q_3 = 0, \quad Q_1 \neq 0, \; Q_2 \neq 0, \; \varphi^0_{3k} = 0.$$

В этом случае $B_{3\alpha} = 0$ при $\alpha = 1,2$, что вытекает из уравнения

$$\sum_\alpha \varphi^0_{\alpha k} B_{3\alpha} = 0.$$

Кроме того, следствием уравнения (32) является равенство $B_{\alpha 3} = 0$ при $\alpha = 1,2$. Наконец, элемент B_{33} задается условием $B\bar{B} = 1$ и оказывается равным единице. Последнее условие выражает также ортогональность двухрядной квадратной матрицы $B_{r\alpha}$ ($r = 1,2$; $\alpha = 1,2$).

Случай кратных собственных нулевых значений матриц C и C' можно исследовать аналогично, рассматривая все уравнения в предыдущем доказательстве, которые не могут быть выведены непосредственно, как возможные дополнительные определяющие постулаты.

Чтобы сделать определители обеих матриц A и B равными $+1$, что существенно для выполнения правильных алгебраических соотношений для τ'_r и σ'_s, рассмотрим получаемое из (32) условие

$$\det \varphi = Q_1 Q_2 Q_3. \tag{34}$$

Знаки величин Q_r, за исключением этого условия, не ограничиваются и могут быть заданы по определению. Это значит, что для каждой комбинации знаков Q_r, удовлетворяющей условию (34), для данных $\overset{0}{\varphi}_{\alpha k}$ существуют матрицы A и B, ортогональные в обычном смысле и удовлетворяющие (28). Мы можем, например, приписать всем Q_r положительный (отрицательный) знак, если определитель φ положительный (отрицательный).

Теперь, подставляя (28) в (27), получаем

$$\sum_{\alpha, k} \tau_\alpha \sigma_k \overset{0}{\varphi}_{\alpha k} = \sum_r Q_r \tau'_r \sigma'_r. \tag{35}$$

Собственные значения каждой из матриц τ'_r, σ'_r равны ± 1, но произведение трех матриц $\tau'_r \sigma'_r$ всегда равно -1. Поэтому для собственных значений H_1 для данного поля $\overset{0}{\varphi}_{\alpha k}$ мы имеем

$$(g/\varkappa\sqrt{2}) \sum_r Q_r \varepsilon_r, \text{ причем } \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1, \tag{36}$$

или

$$\begin{aligned} E_1 &= -(g/\varkappa\sqrt{2})(Q_1 + Q_2 + Q_3), \\ E_2 &= (g/\varkappa\sqrt{2})(-Q_1 + Q_2 + Q_3), \\ E_3 &= (g/\varkappa\sqrt{2})(Q_1 - Q_2 + Q_3), \\ E_4 &= (g/\varkappa\sqrt{2})(Q_1 + Q_2 - Q_3). \end{aligned} \tag{36'}$$

Сумма всех четырех значений E равна нулю; но если E есть собственное значение, то $-E$ в общем случае не будет собственным значением, пока хотя бы одна из трех величин Q_r не будет равна нулю. Мы повторяем, что каждая из величин Q_r равна квадратному корню из соответствующего собственного значения симметричной матрицы C (или C'). Из равенства (31) мы сразу получаем след

$$\sum_{r=1}^{3} Q_r^2 = \sum_k C_{kk} = \sum_{\alpha, k} (\overset{0}{\varphi}_{\alpha k})^2. \tag{37}$$

Однако для суммы самих величин Q_r нельзя найти выражение, рациональное относительно поля $\overset{0}{\varphi}_{\alpha k}$.

Теперь введем в кинетическую энергию нулевого поля переменные, соответствующие Q_r, A_{kr}, $B_{r\alpha}$. Вместо того, чтобы эти переменные выражать через углы Эйлера и сопряженные им обобщенные импульсы, мы

можем также использовать компоненты момента импульса

$$L^0_{ik} = \sum_\alpha (\varphi^0_{\alpha i}\pi^0_{\alpha k} - \varphi^0_{\alpha k}\pi^0_{\alpha i}) \qquad (22_0)$$

и изотопического спина

$$T^0_{\alpha\beta} = \sum_k (\varphi^0_{\alpha k}\pi^0_{\beta k} - \varphi^0_{\beta k}\pi^0_{\alpha k}). \qquad (22'_0)$$

Как операторы, они соответствуют бесконечно малым вращениям обычного пространства и пространства изотопического спина и удовлетворяют перестановочным соотношениям относительно A_{kr} и $B_{r\alpha}$, которые аналогичны правилам коммутации для $\varphi^0_{k\alpha}$, а именно:

$$i\,[L^0_{ik}, A_{lr}] = \delta_{kl}A_{ir} - \delta_{il}A_{kr}, \qquad [L^0_{ik}, B_{r\alpha}] = 0, \qquad (38)$$

$$i\,[T^0_{\alpha\beta}, B_{\gamma r}] = \delta_{\beta\gamma}B_{\alpha r} - \delta_{\alpha\gamma}B_{\beta r}, \quad [T^0_{\alpha\beta}, A_{kr}] = 0. \qquad (38')$$

Сами же компоненты L^0_{ik} или $T^0_{\alpha\beta}$ удовлетворяют хорошо известным перестановочным соотношениям

$$i\,[L^0_{ik}, L^0_{lm}] = \delta_{kl}L^0_{im} + \delta_{im}L^0_{kl} - \delta_{il}L^0_{km} - \delta_{km}L^0_{il}, \qquad (39)$$

или, если ввести для L^0_{23}, L^0_{31}, L^0_{12} векторные обозначения L^0_1, L^0_2, L^0_3,

$$i\,[L^0_1, L^0_2] = -L^0_3, \ \ldots \qquad (39')$$

Скаляры Q_r коммутируют как с L^0_{ik}, так и с $T^0_{\alpha\beta}$:

$$[L^0_{ik}, Q_r] = [T^0_{\alpha\beta}, Q_r] = 0. \qquad (40)$$

Точно таким же способом получаем

$$i\,[T^0_{\alpha\beta}, T^0_{\gamma\delta}] = \delta_{\beta\gamma}T^0_{\alpha\delta} + \delta_{\alpha\delta}T^0_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}T^0_{\beta\delta} - \delta_{\beta\delta}T^0_{\alpha\gamma}. \qquad (39'')$$

Матрицы $T^0_{\alpha\beta}$ и L^0_{ik} коммутируют между собой.

Полезно ввести составляющие (L^0), (T^0) на оси, определенные величинами (A_{kr}), $(B_{r\alpha})$, по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} L^{rs}_0 &= \sum_{i,\,k} A_{ir}A_{ks}L^0_{ik} = \sum_{i,\,k} L^0_{ik}A_{ir}A_{ks},\\ T^{rs}_0 &= \sum_{\alpha,\,\beta} B_{r\alpha}B_{s\beta}T^0_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\,\beta} T^0_{\alpha\beta}B_{r\alpha}B_{s\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Заметим, что, несмотря на некоммутативность L^0_{ik} с A_{lr} и $T^0_{\alpha\beta}$ с $B_{r\gamma}$, операторы L^{rs}_0 и T^{rs}_0 вследствие равенств (41), вытекающих из (38) и (38′), эрмитовы, подобно операторам L^0_{ik} и $T^0_{\alpha\beta}$. Полные квадраты L_0 и T_0 даются равенствами:

$$L^2_0 \equiv \sum_{i<k} (L^0_{ik})^2 = \sum_{r<s} (L^{rs}_0)^2, \qquad (42)$$

$$T^2_0 \equiv \sum_{\alpha<\beta} (T^0_{\alpha\beta})^2 = \sum_{r<s} (T^{rs}_0)^2. \qquad (42')$$

Перестановочные соотношения операторов L_0^{rs} и A_{kr}, а также T_0^{rs} и $B_{r\alpha}$ имеют следующий вид:

$$i\,[L_0^{rs}, A_{kt}] = \delta_{rt}A_{ks} - \delta_{st}A_{kr}, \tag{43}$$

$$i\,[T_0^{rs}, B_{t\alpha}] = \delta_{rt}B_{s\alpha} - \delta_{st}B_{r\alpha}. \tag{43'}$$

Компоненты L_0^{rs} или T_0^{rs} удовлетворяют соотношениям:

$$i\,[L_0^{rs}, L_0^{tu}] = \delta_{rt}L_0^{su} + \delta_{su}L_0^{rt} - \delta_{st}L_0^{ru} - \delta_{ru}L_0^{st}, \tag{44}$$

$$i\,[T_0^{rs}, T_0^{tu}] = \delta_{rt}T_0^{su} + \delta_{su}T_0^{rt} - \delta_{st}T_0^{ru} - \delta_{ru}T_0^{st}. \tag{44'}$$

Знаки в соотношениях (43), (44) или (43′), (44′) прямо противоположны знакам в соотношениях (38), (39) или (38′), (39′).

Подставляя (29), (22_0) и ($22_0'$) в (41), получаем:

$$L_0^{rs} = \sum_{k,\,\alpha} (Q_r A_{ks} B_{r\alpha} \pi_{\alpha k}^0 - Q_s A_{kr} B_{s\alpha} \pi_{\alpha k}^0), \tag{45}$$

$$T_0^{rs} = \sum_{k,\,\alpha} (Q_r A_{kr} B_{s\alpha} \pi_{\alpha k}^0 - Q_s A_{ks} B_{r\alpha} \pi_{\alpha k}^0). \tag{45'}$$

Отсюда мы находим важное соотношение

$$\sum_{k,\,\alpha} A_{kr} B_{s\alpha} \pi_{\alpha k}^0 = \frac{1}{2}\left\{\frac{L_0^{rs} + T_0^{rs}}{Q_r - Q_s} - \frac{L_0^{rs} - T_0^{rs}}{Q_r + Q_s}\right\} \quad \text{при } r \neq s. \tag{46}$$

Наконец, мы получаем канонически-сопряженную с Q_r переменную P_r, полагая для $r = s$

$$\sum_{k,\,\alpha} A_{kr} B_{r\alpha} \pi_{\alpha k}^0 = P_r. \tag{47}$$

Следовательно, окончательно имеем

$$\pi_{\alpha k}^0 = \sum_{r,\,s} A_{kr} B_{s\alpha} \left\{P_r \delta_{rs} + \frac{1}{2}\,\frac{L_0^{rs} + T_0^{rs}}{Q_r - Q_s} - \frac{1}{2}\,\frac{L_0^{rs} - T_0^{rs}}{Q_r + Q_s}\right\}, \tag{48}$$

где второй член берется только для $r \neq s$. Полагая

$$[P_r, A_{ks}] = [P_r, B_{s\alpha}] = [P_r, L_0^{st}] = [P_r, T_0^{st}] = 0,$$
$$i\,[P_r, Q_s] = \delta_{rs}, \tag{49}$$

можно проверить канонические соотношения коммутации (19) для $\pi_{\alpha l}^0$ и $\varphi_{\beta k}^0$ с помощью соотношений (43), (44), (43′), (44′). Можно заметить, что оператор P_r, определенный соотношением (47), неэрмитов и что P_r в (48) надо заменить на $P_r^\dagger$, если множитель $A_{kr}B_{s\alpha}$ поставлен справа от скобок. Для кинетической энергии нулевого поля (отвлекаясь от множителя $N/2$) с учетом антисимметричности выражения $(L_0^{rs} - T_0^{rs})/(Q_r + Q_s)$ и симметричности выражения $(L_0^{rs} + T_0^{rs})/(Q_r - Q_s)$ относительно r и s

получаем из (48)

$$\sum_{\alpha, k} (\pi^0_{\alpha k})^2 = \sum_r P_r^\dagger P_r + \frac{1}{4}\sum_{r\neq s} \frac{(L_0^{rs} + T_0^{rs})^2}{(Q_r - Q_s)^2} + \frac{1}{4}\sum_{r, s} \frac{(L_0^{rs} - T_0^{rs})^2}{(Q_r + Q_s)^2}. \qquad (50)$$

Мы заключаем из (46), что если $Q_r = Q_s$, то также должно выполняться равенство $L_0^{rs} = -T_0^{rs}$. Ввиду важного значения, которое имеет этот случай, иногда удобно применять другие координаты. Действительно, если все три Q_r одинаковы, что с хорошим приближением можно считать верным для случая сильной связи, то согласно формуле (29) поле $\varphi^0_{\alpha k}$ определяет единственным образом не сами матрицы A_{kr} и $B_{r\alpha}$, а только ортогональную матрицу

$$e_{\alpha k} = \sum_r A_{kr} B_{r\alpha}, \qquad (51)$$

удовлетворяющую условиям:

$$\sum_\alpha e_{\alpha i} e_{\alpha k} = \delta_{ik}, \qquad \sum_k e_{\alpha k} e_{\beta k} = \delta_{\alpha\beta}. \qquad (51a)$$

Поэтому можно ввести кроме трех независимых переменных $e_{\alpha k}$ еще шесть симметричных величин

$$q^0_{\alpha\beta} = \sum_k \varphi^0_{\alpha k} e_{\beta k} = \sum_r B_{r\alpha} B_{r\beta} Q_r = q^0_{\beta\alpha}, \qquad (52)$$

описывающих поле

$$\varphi^0_{\alpha k} = \sum_\beta e_{\beta k} q^0_{\alpha\beta}. \qquad (53)$$

Компоненты

$$L_0^{\alpha\beta} = \sum_{r, s} B_{r\alpha} B_{s\beta} L_0^{rs} = \sum_{i, k} e_{\alpha i} e_{\beta k} L^0_{ik} \qquad (54)$$

коммутируют с $q^0_{\gamma\delta}$ и подчиняются таким же соотношениям коммутации друг с другом и с $e_{\alpha i}$, каким удовлетворяют L_0^{rs} между собой и с A_{kl}:

$$i\,[L_0^{\alpha\beta}, e_{\gamma k}] = \delta_{\alpha\gamma} e_{\beta k} - \delta_{\beta\gamma} e_{\alpha k}, \qquad (55)$$

$$i\,[L_0^{\alpha\beta}, L_0^{\gamma\delta}] = \delta_{\alpha\gamma} L_0^{\beta\delta} + \delta_{\beta\delta} L_0^{\alpha\gamma} - \delta_{\beta\gamma} L_0^{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\delta} L_0^{\beta\gamma}. \qquad (56)$$

Наконец, рассмотрим симметричные величины $p^0_{\alpha\beta} = p^0_{\beta\alpha}$, сопряженные величинам $q^0_{\alpha\beta}$ в том смысле, что они удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$i\,[p^0_{\alpha\beta}, q^0_{\gamma\delta}] = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}). \qquad (57)$$

(Это значит, например, что $i\,[p^0_{11}, q^0_{11}] = 1$, $i\,[p^0_{12}, q^0_{12}] = {}^1/_2$; последнюю скобку удобнее приравнять половине, а не единице). Это будет справедливо в том случае, если, используя первые два члена в скобках уравнения (48), положить

$$p^0_{\alpha\beta} = \sum_r B_{r\alpha} B_{r\beta} P_r + \sum_{r \neq s}{}' B_{r\alpha} B_{s\beta} \frac{1}{2} \frac{L_0^{rs} + T_0^{rs}}{Q_r - Q_s}. \tag{58}$$

Таким образом, из (48) находим

$$p^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_k (e_{\alpha k} \pi^0_{\beta k} + e_{\beta k} \pi^0_{\alpha k}). \tag{59}$$

Замечание о неэрмитовости величин P_r в (47) справедливо и по отношению к величинам $p^0_{\alpha\beta}$, определенным здесь. Формулу (57) можно доказать с помощью соотношений (54), (43), (43′) и, кроме того,

$$[p^0_{\alpha\beta}, L_0^{\gamma\delta}] = 0. \tag{60}$$

Таким образом, для нулевого поля мы имеем три типа переменных:

1) $\varphi^0_{\alpha k}, \pi^0_{\alpha k}$,

2) $Q_r, A_{kr}, B_{r\alpha}; P_r, L_0^{rs}, T_0^{rs}$,

3) $q^0_{\alpha\beta} = q^0_{\beta\alpha}, e_{\alpha k}; p^0_{\alpha\beta} = p^0_{\beta\alpha}, L_0^{\alpha\beta}$.

В то время как мы можем выразить кинетическую энергию в явном виде через переменные (2), это невозможно сделать строго для переменных (3). Из (48), (50) мы получаем только

$$\sum_{\alpha, k} (\pi^0_{\alpha k})^2 = \sum_{\alpha, \beta} p^{0\dagger}_{\alpha\beta} p^0_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \sum_{r, s} \frac{(L_0^{rs} - T_0^{rs})^2}{(Q_r + Q_s)^2}. \tag{61}$$

В следующем разделе мы увидим, однако, что в случае малых отклонений Q_r от большой общей величины $Q_r^0 = D$ возможны дальнейшие упрощения, и переменные (3) оказываются при этом наиболее удобными.

5. Минимум потенциальной энергии. Приближение сильной связи

Определим сначала минимум полной потенциальной энергии нулевого поля, в соответствии с (18), (36), (37) равной

$$E^0_{\text{пот}} = \frac{1}{2I} \sum_{r=1}^{3} Q_r^2 + \frac{g}{\varkappa \sqrt{2}} \sum_r Q_r \varepsilon_r \quad (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1). \tag{62}$$

Минимуму соответствуют значения:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1, \quad Q_1 = Q_2 = Q_3 = D = \frac{g}{\varkappa \sqrt{2}} I, \qquad E^0_{\text{мин}} = -\frac{3}{4} \frac{g^2}{\varkappa^2} I. \tag{63}$$

Согласно (53) соответствующее поле задается формулой

$$\varphi_{\alpha k}^{0} = De_{\alpha k}, \tag{64}$$

или в векторном обозначении

$$\varphi_{\alpha}^{0} = D\mathbf{e}_{\alpha}. \tag{64a}$$

Это поле соответствует наименьшему собственному значению энергии взаимодействия, определенному формулами (36), и в отсутствие свободных мезонов (мы пренебрегаем φ')[15] оно все еще содержит q-числа $\mathbf{e}_{\alpha}$. Более того, оно соответствует состоянию τ и σ, где

$$\sum_{\alpha,\, k} \tau_{\alpha}\sigma_{k}e_{\alpha k} = -3.$$

Подбирая S-преобразование гамильтониана (см. приложение), этому равенству можно придать вид

$$S\left(\sum_{\alpha,\, k} \tau_{\alpha}\sigma_{k}e_{\alpha k}\right)S^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{3} \tau_{\alpha}\sigma_{\alpha}. \tag{65}$$

Преобразование S определяется не единственным образом, как и матрицы A и B; например, в этом случае достаточно подвергнуть преобразованию только одну систему матриц: τ_{α} или же σ_{k}. Имея в виду приложение к псевдоскалярной теории с заряженными мезонами, обсуждаемой в разд. 6, мы оставим τ_{α} неизменными и преобразуем σ_{k}:

$$S\tau_{\alpha}S^{-1} = \tau_{\alpha}, \qquad S\left(\sum_{k} e_{\alpha k}\sigma_{k}\right)S^{-1} = \sigma_{\alpha}. \tag{65a}$$

Это эквивалентно преобразованию

$$\sigma_{k}' = S\sigma_{k}S^{-1} = \sum_{\alpha} e_{\alpha k}\sigma_{\alpha}. \tag{65б}$$

Рассматриваемое состояние можно назвать синглетным, поскольку произведение τ_{α} и σ_{α} аналогично произведению двух спинов равной величины. В соответствии с (36′) это состояние не вырождено, тогда как остальные три собственных значения энергии взаимодействия одинаковы:

$$E_1 = -(g/\varkappa\sqrt{2})\, 3D, \quad E_2 = E_3 = E_4 = (g/\varkappa\sqrt{2})\, D. \tag{66}$$

В дальнейшем мы предполагаем, что законно ограничиться рассмотрением только низшего, или синглетного состояния. Это накладывает ограничение на величину членов в гамильтониане, выражающих связь низшего состояния с тремя следующими уровнями энергии взаимодействия.

Для собственного значения E_1 следующие выражения диагональны:

$$\tau_1\sigma_1 = \tau_2\sigma_2 = \tau_3\sigma_3 = -1, \qquad \tau_1\sigma_2 + \tau_2\sigma_1 = 0, \ \ldots \tag{67}$$

С другой стороны, матрицы τ_r, σ_r и $\tau_1\sigma_2 - \tau_2\sigma_1$, ... недиагональны. Мы будем просто пренебрегать теми членами в энергии, в которые эти матри-

[15] В разд. 7 будет показано, что поле φ' описывает свободные мезоны.

цы входят в виде множителя. В разд. 6 мы обсудим область применимости такого приближения.

Как показано в приложении, S-преобразование изменяет угловой момент $\mathbf{L}$ следующим образом:

$$\mathbf{L}' = S\mathbf{L}S^{-1} = \mathbf{L} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{L} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sigma_{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}. \tag{68}$$

Как следствие этого и равенства (54) мы имеем соотношение

$$SL_0^{\alpha\beta}S^{-1} = L_0^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}. \tag{69}$$

Прямое вычисление с использованием (55) показывает, что $\mathbf{L}'$ коммутирует с $\boldsymbol{\sigma}'$, если коммутируют $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\sigma}$. Так как в нашем приближении сильной связи матрицами σ'_{α}, если они не умножаются на τ_{α}, можно пренебрегать, то матрица $\mathbf{L}'$ имеет в этом приближении такие же собственные значения, как и матрица $\mathbf{L}$, тогда как собственные значения полной суммы L'^2 [см. (42)] на $1/4$ больше собственных значений L^2. Кроме того, собственная функция $\Psi' = S\Psi$ двузначна по входящим в S углам, по отношению к которым Ψ однозначна. Поэтому собственные значения $(L')^2$ равны $1/4 + j(j+1)$ с полуцелыми j.

Теперь мы произведем расщепление определенных в (52) переменных $q^0_{\alpha\beta}$ на две части в соответствии с (64):

$$q^0_{\alpha\beta} = D\delta_{\alpha\beta} + q^{(1)}_{\alpha\beta}, \tag{70}$$

причем вторую часть мы будем считать малой. Подставляя D из формулы (63), имеем

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2I}\sum_{\alpha,k}(\varphi^0_{\alpha k})^2 + \frac{g}{\varkappa\sqrt{2}}\sum_{\alpha,k}\tau_{\alpha}\sigma_k\varphi^0_{\alpha k}.$$

Совершая S-преобразование (65), которое сохраняет $\varphi^0_{\alpha k}$, но изменяет $\pi^0_{\alpha k}$, получаем отсюда

$$E'_{\text{пот}} = SE_{\text{пот}}S^{-1} = \frac{1}{2I}\sum_{\alpha,\beta}(q^0_{\alpha\beta})^2 + \frac{g}{\varkappa\sqrt{2}}\sum_{\alpha,\beta}q^0_{\alpha\beta}\frac{1}{2}(\tau_{\alpha}\sigma_{\beta} + \sigma_{\beta}\tau_{\alpha}).$$

Используя (67), имеем

$$E'_{\text{пот}} = \frac{1}{2I}\sum_{\alpha,\beta}(q^0_{\alpha\beta})^2 + \frac{g}{\varkappa\sqrt{2}}\sum_{\alpha,\beta}q^0_{\alpha\beta},$$

что сводится просто к

$$E'_{\text{пот}} = -\frac{3}{4}\frac{g^2}{\varkappa^2}I + \frac{1}{2I}\sum_{\alpha,\beta}(q^{(1)}_{\alpha\beta})^2. \tag{71}$$

Теперь мы подставим (64) в (22_0) и, пренебрегая $q^{(1)}_{\alpha\beta}$, получим

$$L^0_{ik} = D\sum_{\alpha}(e_{\alpha i}\pi^0_{\alpha k} - e_{\alpha k}\pi^0_{\alpha i}),$$

а из (54)

$$-L_0^{\alpha\beta} = D\sum_k (e_{\alpha k}\pi_{\beta k}^0 - e_{\beta k}\pi_{\alpha k}^0).$$

Таким образом, из (59) следует, что

$$\pi_{\alpha k}^0 = \sum_\beta e_{\beta k}\left(p_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{2D}L_0^{\alpha\beta}\right) = \sum_\beta\left(p_{\alpha\beta}^{0\dagger} + \frac{1}{2D}L_0^{\alpha\beta}\right)e_{\beta k}. \quad (72)$$

Подставляя $\varphi_{\alpha k}^0 = De_{\alpha k}$, получаем конечный результат

$$T_0^{\alpha\beta} = -L_0^{\alpha\beta}. \quad (73)$$

Отношение отброшенных членов к сохраненному главному члену здесь по порядку величины составляет D^{-2}. Это согласуется с результатом предыдущего раздела. Вводя $T_0^{rs} = -L_0^{rs}$ и $Q_r + Q_s = 2D$ в последний член равенства (48), мы получаем формулу (72) непосредственно. Важным следствием соотношения (73) является то обстоятельство, что полный квадрат изотопического спина равен полному квадрату момента импульса; после S-преобразования обоим квадратам соответствуют полуцелые квантовые числа. Поэтому абсолютная величина квантового числа n, равного зарядовому числу минус половина [см. формулы (9), (10)], для нулевого поля (т. е. в отсутствие свободных мезонов) всегда меньше, чем квантовое число полного момента j:

$$-j \leqslant n \leqslant j. \quad (74)$$

Это, разумеется, обусловлено тем, что τ_α и σ_α находятся в «синглетном состоянии», определенном формулами (67); это же позволяет нам, как уже говорилось, пренебрегать членами, линейными по τ и σ.

Вводя величину $\langle p_{\alpha\beta}^0\rangle_H = {}^1/_2\,(p_{\alpha\beta}^0 + p_{\alpha\beta}^{0\dagger})$, где скобки $\langle\ \rangle_H$ обозначают операцию эрмитизации, находим

$$\pi_{\alpha k}^0 = \sum_\beta e_{\beta k}\langle p_{\alpha\beta}^0\rangle_H + \frac{1}{2D}\langle L_0^{\alpha\beta}e_{\beta k}\rangle_H. \quad (72')$$

Отсюда для кинетической энергии нулевого поля (пренебрегая аддитивной постоянной в члене, пропорциональном D^{-2}) мы получаем следующее выражение:

$$\frac{N}{2}\sum_{\alpha,k}(\pi_{\alpha k}^0)^2 = \frac{N}{2}\left\{\sum_{\alpha,\beta}\langle p_{\alpha\beta}^0\rangle_H^2 + \frac{1}{2D^2}L_0^2\right\}, \quad (72a)$$

где квадрат полного момента дается формулой (42). Идентичный (72а) результат получается из (61), если подставить в последний член $Q_r + Q_s = 2D$, $-T_0^{rs} = L_0^{rs}$. Поскольку для наших целей константой ${}^1/_4$, прибавляемой к L_0^2, можно пренебречь, то единственное следствие S-преобразования заключается в том, что значения j становятся полуцелыми.

Подставляя (71), (72), (72а) в гамильтониан (I), находим «приведенный» гамильтониан в приближении сильной связи

$$H = -\frac{3}{4}\frac{g^2}{\varkappa^2} I + \frac{1}{2} N \left\{ \sum_{\alpha,\beta} \langle p^0_{\alpha\beta} \rangle^2_H + \frac{1}{2D^2} L_0^2 \right\} + \frac{1}{2I} \sum_{\alpha,\beta} (q^{(1)}_{\alpha\beta})^2 + \\ + (4\pi)^{1/2} \sum_{\alpha,\beta,k} e_{\beta k} \langle p^0_{\alpha\beta} \rangle_H \int \frac{\partial K}{\partial x_k} \pi'_\alpha (x)\, dV + \frac{1}{2} \sum_\alpha \int \pi'^2_\alpha dV + \\ + \frac{1}{2} \sum_\alpha \int \varphi'_\alpha (-\Delta + \varkappa^2) \varphi'_\alpha dV + (4\pi)^{1/2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{1}{2D} \langle e_{\beta\gamma} L_0^{\alpha\beta} \rangle_H \int \frac{\partial K}{\partial x_k} \pi'_\alpha (x)\, dV. \tag{II}$$

Исследование приближений, содержащихся в формуле (72), показывает, что в H опущены члены следующих типов: члены порядка D^{-2}, не зависящие от L^0_{ik}; члены порядка D^{-2}, линейные по L^0_{ik} и $q^{(1)}_{ik}$; члены более высокого, чем D^{-2}, порядка. В следующих двух разделах мы увидим, что для вопросов, рассматриваемых в этой статье, такие члены не имеют значения. Однако последний член в гамильтониане (II) оказывается существенным.

6. Возбужденные состояния нуклона (изобары)

Теперь мы рассмотрим две различные проблемы. Первая из них — исследование состояний нуклона в отсутствие свободных мезонов, вторая — изучение рассеяния свободных мезонов нуклоном и его собственным полем. В следующем разделе будет показано, что поле, описываемое переменными $p^0_{\alpha\beta}$, $\pi'_\alpha (x)$; $q^{(1)}_{\alpha\beta}$, $\varphi'_\alpha (x)$, изображает свободные мезоны, представленные частично невозмущенными плоскими волнами, частично рассеянными волнами. С другой стороны, задача о поле, описываемом величинами $e_{\alpha k}$, $L^0_{\alpha\beta}$, относится к вопросу о возможных состояниях свободного нуклона в отсутствие свободных мезонов. Для этой проблемы необходимо сохранять члены вплоть до порядка D^{-2}, но можно опускать члены порядка D^{-2}, не зависящие от L^0_{ik} или линейные по L^0_{ik} и в то же время линейные по $q^{(1)}_{ik}$ либо билинейные по $\pi'_\alpha (x_1)$ и $\varphi'_\beta (x_2)$. Среднее значение последних членов в состоянии, в котором не возбуждены соответствующие волны, не содержит величин порядка D^{-2}, а члены, не зависящие от L^0_{ik}, не влияют на разность энергий возбужденного и основного состояний нуклона (изобарное расщепление). Однако эти более сложные члены дают поправку высшего порядка к рассеянию свободных мезонов, о чем в этой статье мы говорить не будем. В следующем разделе мы будем рассматривать рассеяние мезонов, сохраняя только члены порядка D^0 и пренебрегая всеми членами более высоких порядков, а в этом разделе обсудим проблему нуклона в отсутствие свободных мезонов вплоть до порядка D^{-2}.

Для исключения последних членов в гамильтониане (II) сдвинем начало отсчета $\pi'_\alpha (x)$, но так, чтобы не было нарушено условие ортогональности (12′), а именно $\int \pi'_\alpha (\partial\xi/\partial x_k) dV = 0$. Соответствующая подстановка,

удовлетворяющая в силу (15) условию ортогональности (12′), имеет вид [16]

$$\pi'_\alpha(x) = \pi''_\alpha(x) - \frac{(4\pi)^{1/2}}{2D} \sum_{k,\beta} \langle e_{\beta k} L_0^{\alpha\beta} \rangle_H \left\{ \frac{\partial K}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi/\partial x_k}{\int (\partial \xi/\partial x_k)^2 dV} \right\}. \tag{75}$$

Действительно, используя опять (12′), имеем

$$\sum_\alpha \frac{1}{2} \int (\pi''_\alpha)^2 dV = \sum_\alpha \frac{1}{2} \int (\pi'_\alpha)^2 dV + \frac{(4\pi)^{1/2}}{2D} \sum_{\alpha,\beta,k} \langle e_{\beta k} L_0^{\alpha\beta} \rangle_H \int \frac{\partial K}{\partial x_k} \pi'_\alpha(x)\, dV + \frac{4\pi}{2D^2} L_0^2 \cdot \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial \xi/\partial x}{\int (\partial \xi/\partial x)^2 dV} \right\}^2 dV.$$

Принимая во внимание (15) и определение N (23), находим

$$4\pi \int \left\{ \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial \xi/\partial x}{\int (\partial \xi/\partial x)^2 dV} \right\}^2 dV = N - \frac{4\pi}{\int (\partial \xi/\partial x)^2 dV}.$$

Член с N дает как раз второй член в гамильтониане (II); поэтому, подставляя $\xi(x) = X(x)/I$ и значение D по формуле (63), получаем окончательно

$$H = \frac{\varkappa^2}{2g^2} \frac{4\pi}{\int (\partial X/\partial x)^2 dV} L_0^2 - \frac{3}{4} \frac{g^2}{\varkappa^2} I + H_1, \tag{76}$$

$$H_1 = \frac{1}{2} N \sum_{\alpha,\beta} \langle p^0_{\alpha\beta} \rangle_H^2 + \frac{1}{2I} \sum_{\alpha,\beta} (q^{(1)}_{\alpha\beta})^2 + (4\pi)^{1/2} \sum_{\alpha,\beta,k} \langle p^0_{\alpha\beta} \rangle_H e_{\beta k} \int \frac{\partial K}{\partial x_k} \pi''_\alpha(x) dV + \frac{1}{2} \sum_\alpha \int (\pi''_\alpha)^2 dV + \frac{1}{2} \sum_\alpha \int \varphi'_\alpha (-\Delta + \varkappa^2) \varphi'_\alpha dV. \tag{77}$$

Сдвиг $\pi'_\alpha(x)$ не изменяет третьего члена, поскольку

$$\sum_{\alpha,\beta} L_0^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0,$$

причем матрица $L_0^{\alpha\beta}$ антисимметрична, а матрица $p_{\alpha\beta}$ симметрична по α и β.

Прежде чем идти дальше, мы должны завершить обсуждение вопроса о сдвиге $\pi'_\alpha(x)$ по формуле (75). Поскольку этот сдвиг зависит от $L_0^{\alpha\beta}$ и $e_{\beta k}$, он является q-числом, и в сами матрицы $L_0^{\alpha\beta}$ и $e_{\beta k}$ необходимо внести поправки для того, чтобы эти матрицы коммутировали с новыми $\pi''_\alpha(x)$ и в то же время удовлетворяли обычным перестановочным соотношениям. Эта цель достигается каноническим преобразованием

$$F = e^{iU} F' e^{-iU} = F' + i[U, F'] + \frac{i^2}{2!} [U, [U, F']] + \dots \tag{78}$$

Для F мы можем взять старые переменные $\pi'_\alpha(x)$, $L_0^{\alpha\beta}$, $e_{\beta k}$, для F' —

[16] Мы опускаем индекс у переменной x, если интеграл имеет одинаковую величину для всех трех значений этого индекса.

новые переменные $\pi''_\alpha(x)$, $L_0^{\alpha\beta'}$, $e'_{\beta k}$, если выберем U в виде

$$U = \frac{(4\pi)^{1/2}}{2D} \sum_{\alpha,\beta,k} \langle e'_{\beta k} L_0^{\alpha\beta'} \rangle_H \int \frac{\partial \xi}{\partial x_k} \varphi'_\alpha(x)\, dV \left[\int \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dV\right]^{-1}, \qquad (79)$$

что вследствие соотношения (21) снова дает сдвиг (75) для поправки первого порядка к $\pi'_\alpha(x)$.

К счастью, явные выражения для поправок к $L_0^{\alpha\beta'}$, $e'_{\alpha k}$ и для поправок второго порядка к $\pi'_\alpha(x)$ нам не потребуются, поскольку дополнительные члены порядка D^{-2} в гамильтониане не зависят от $L_0^{\alpha\beta}$ или линейны по $L_0^{\alpha\beta}$ и в то же время линейны по $\varphi'_\alpha(x)$ или билинейны по $\pi'_\alpha(x)$, $\varphi'_\beta(x)$. Для стационарных состояний гамильтониана (76), (77) среднее значение членов, линейных по $L_0^{\alpha\beta}$, обращается в нуль. Можно заметить, что матрица L_{ik}^0 — это только приближенный интеграл движения; но если мы подставим в (76) вместо нее точный интеграл полного момента (22′), то дополнительные члены в гамильтониане будут иметь опять такой же вид, как отброшенные здесь.

Поскольку после преобразования (54) собственные значения L_0^2 оказываются равными $j(j+1)$ с полуцелым j, мы получаем непосредственно из (76) для энергии возбуждения уровней нуклона относительно основного состояния выражение

$$\Delta E = \frac{3}{2} \frac{\varkappa^2}{g^2} \frac{4\pi}{\int (\nabla X)^2 dV} \left\{ j(j+1) - \frac{3}{4} \right\}. \qquad (80)$$

Зарядовое квантовое число n сюда не входит, но оно ограничено в силу неравенств (74) значениями, меньшими или равными j. *Симметричная* псевдоскалярная теория как раз и отличается тем, что система оказывается вырожденной, и все состояния с одинаковым квантовым числом j и разными зарядами обладают одинаковой энергией. Для основного состояния $j = 1/2$ число n принимает два возможных значения: $n = -1/2$ и $n = 1/2$, соответствующих нейтрону и протону.

Интеграл [см. (13)]

$$\frac{1}{4\pi} \int (\nabla X)^2 dV = -\frac{1}{4\pi} \int X \Delta X dV = \int XK dV - \frac{\varkappa^2}{4\pi} \int X^2 dV$$

можно вычислить в двух предельных случаях (малых размеров источника $\varkappa a \ll 1$ и больших размеров $\varkappa a \gg 1$) следующим образом. Рассмотрим выражение

$$\int XK dV = \iint K(x') \frac{e^{-\varkappa r}}{r} K(x)\, dV dV'.$$

В первом предельном случае вместо $e^{-\varkappa r}$ можно подставить 1 с относительной ошибкой порядка $\varkappa a$. В соответствии с (4) это означает, что мы полагаем $\int XK dV = a^{-1}$. В этом пределе вторым интегралом $(\varkappa^2/4\pi) \int X^2 dV$ можно пренебречь, поскольку при малых $\varkappa a$ он перестает зависеть от a.

Поэтому мы получаем:

$$\frac{1}{4\pi}\int(\nabla X)^2\,dV=\frac{1}{a},$$
$$\frac{\Delta E}{\mu c^2}=\frac{3}{2}\,\frac{\varkappa a}{g^2}\left[j(j+1)-\frac{3}{4}\right]\quad\text{при}\quad \varkappa a\ll 1. \qquad (80а)$$

Выражение $\Delta E/\mu c^2$, где μ — масса покоящегося мезона, записано в обычных единицах энергии; в наших же единицах оно равно $\Delta E/\varkappa$.

Для источников большого размера $\varkappa a\gg 1$ интеграл (13) можно вычислить с помощью следующего разложения в ряд:

$$X(x)=\frac{4\pi}{\varkappa^2}\left(1-\frac{1}{\varkappa^2}\Delta\right)^{-1}K(x)=\frac{4\pi}{\varkappa^2}\left(1+\frac{1}{\varkappa^2}\Delta+\frac{1}{\varkappa^4}\Delta\Delta+\ldots\right)K(x).$$

Это соответствует разложению результата интегрирования в ряд по степеням $(\varkappa a)^{-1}$. Главный член этого ряда дает [см. (23)]

$$\frac{1}{4\pi}\int(\nabla X)^2\,dV=\frac{4\pi}{\varkappa^4}\int(\nabla K)^2\,dV=\frac{3}{\varkappa^4}N.$$

Отсюда с помощью равенства $N=\alpha a^{-5}$ (с численным множителем α, зависящим от вида функции источника) получаем:

$$\frac{1}{4\pi}\int(\nabla X)^2\,dV=3\alpha(\varkappa a)^{-4}a^{-1},$$
$$\frac{\Delta E}{\mu c^2}=\frac{1}{\alpha}\,\frac{(\varkappa a)^5}{g^2}\left[j(j+1)-\frac{3}{4}\right]\quad\text{при}\quad \varkappa a\gg 1. \qquad (80б)$$

Рассмотрим теперь различные отброшенные члены и условия, налагаемые процедурой отбрасывания. Прежде всего мы пренебрегли в гамильтониане членами, содержащими в виде множителя τ_r, σ_r, так как они не образуют диагональных матричных элементов для выбранной системы состояний и только вводят связь между этими состояниями. По порядку величины эти члены равны

$$h\sim\frac{\varkappa^2}{g^2}\left[\int(\nabla X)^2\,dV\right]^{-1}.$$

Для источников малых размеров ($\varkappa a\ll 1$) получаем из (80а)

$$h\sim\varkappa^2 a/g^2.$$

Разность энергетических уровней (62) по порядку величины равна $g^2I/\varkappa^2$. Вычисление интеграла I, определенного формулой (14), показывает, что в пределе $\varkappa a\gg 1$ $I\sim 1/a^3$. Следовательно, требуя, чтобы величина h была мала по сравнению с разностью уровней, имеем

$$\varkappa a/g\ll 1. \qquad (81)$$

Второе приближение в формулах (70) и (72) получается, если $q^{(1)}_{\alpha\beta}$ считать малыми величинами по сравнению с D; здесь мы ограничимся рассмотрением малых осцилляций поля около положения равновесия. Это ограни-

чение не является обязательным элементом гипотезы сильной связи и вводится для математических упрощений. Если оно окажется нарушенным, то энергия изобара (80) будет зависеть от квантового числа момента импульса j более сложным образом. Оценим справедливость приближения, вычисляя $\langle (q_{\alpha\beta}^{(1)})^2 \rangle_H / D^2$; вычисление проведем для случая, когда свободных мезонов нет, так что единственный вклад в $\langle (q_{\alpha\beta}^{(1)})^2 \rangle_H$ дают нулевые осцилляции поля. Для малых источников находим

$$\langle (q_{\alpha\beta}^{(1)})^2 \rangle_H \sim a^{-4} \text{ при } \varkappa a \ll 1.$$

В том же предельном случае $D = gI/\varkappa \sim g/\varkappa a^3$. Итак, мы опять получаем критерий

$$\varkappa a/g \ll 1.$$

Наконец, рассмотрим унитарное преобразование (78). В первом порядке оно приводит просто к сдвигу $\pi_\alpha'(x)$ по формуле (75), позволяющему полностью разделить гамильтониан на связанную часть и часть (77), ассоциируемую со свободными мезонами. Однако члены высшего порядка в (78) нарушают это разделение; они приводят к зависимости энергии изобара от распределения мезонов, или, наоборот, к зависимости рассеяния мезонов от изобарного состояния. Они делают возможными такие процессы, как переход из одного изобарного состояния в другое с неупругим рассеянием мезонов. Если потребуем, чтобы отношение этих членов к разности энергий изобаров было мало́ (т. е. чтобы полуширина изобарных состояний была мала по сравнению с расстоянием между ними), то получим условие

$$\int \frac{\partial \xi}{\partial x_k} \varphi_\alpha'(x)\, dV \Big/ \int \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dV \ll 1. \qquad (82)$$

Подставим опять вместо φ_α' величины, соответствующие нулевым осцилляциям несвязанного мезонного поля. Вычисляя выражения в пределе малых источников, находим [17]

$$\frac{(\varkappa a)^2 \ln \varkappa a}{g^2} \ll 1. \qquad (83)$$

При $\varkappa a < 1$ это условие заведомо выполняется для значений g, достаточно больших для того, чтобы удовлетворялся критерий (81). Для сравнения приведем предыдущие выражения в предельном случае сильных источников ($\varkappa a \gg 1$):

$$h \sim \varkappa^6 a^5/g^2; \ I \sim 1/\varkappa^2 a^5, \quad D \sim g/\varkappa^3 a^5,$$
$$\langle (q_{\alpha\beta}^{(1)})^2 \rangle_H \sim 1/\varkappa a^5.$$

[17] Условие, из которого получается (82), ограничивает также значения j, для которых справедливо это приближение. Мы получили $j \ll g/\varkappa a$.

Условие (81) при первом и втором приближениях заменяется здесь следующим:

$$(\varkappa a)^5/g^2 \ll 1. \tag{81a}$$

Неравенство (81a) выражает также условие справедливости (82) для этого предельного случая.

7. Рассеяние свободных мезонов

Как уже было сказано, в этой статье мы рассматриваем рассеяние в пренебрежении всеми членами порядка D^{-2}, что означает: мы не делаем различия между упругим и неупругим рассеянием. Поэтому наше рассмотрение дает полное сечение рассеяния. Опуская несущественную константу собственной энергии, мы можем использовать гамильтониан (77) непосредственно, если можно пренебречь разницей между $\pi'_\alpha(x)$ и $\pi''_\alpha(x)$. Величины e_α или $e_{\alpha k}$ можно рассматривать здесь как c-числа, так как они коммутируют со всеми остальными наблюдаемыми в гамильтониане [18]. Здесь удобно вместо переменных в (77) снова ввести с помощью (16), (16′), (70), (72) функции:

$$p_\alpha(x) = (4\pi)^{1/2} \sum_{i,\beta} p^0_{\alpha\beta} e_{\beta i} \frac{\partial K}{\partial x_i} + \pi'_\alpha(x) = \pi_\alpha(x) - \frac{1}{2D} \sum_{\beta, k} e_{\beta k} L_0^{\alpha\beta} \frac{\partial K}{\partial x_k}, \tag{84}$$

$$q_\alpha(x) = 1/(4\pi)^{1/2} \sum_{i,\beta} q^{(1)}_{\alpha\beta} e_{\beta i} (\partial\xi/\partial x_i) + \varphi'_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x) - (4\pi)^{-1/2} \sum_k e_{\alpha k} (\partial\xi/\partial x_k). \tag{85}$$

Мы видим, что функции $p_\alpha(x)$, $q_\alpha(x)$ описывают поле свободных мезонов за вычетом собственного мезонного поля нуклона. Они удовлетворяют перестановочным соотношениям [см. (21), (55)]

$$i\,[p_\alpha(\mathbf{x}_1), q_\beta(\mathbf{x}_2)] = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \\ - \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial K}{\partial x_{1k}} \frac{\partial \xi}{\partial x_{2k}} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} e_{\alpha k} e_{\beta i} \frac{\partial K}{\partial x_{1i}} \frac{\partial \xi}{\partial x_{2k}}. \tag{86}$$

Эти соотношения соответствуют тому факту, что симметрия матриц $q^{(1)}_{\alpha\beta}$ и $p^0_{\alpha\beta}$ накладывает на поле $p_\alpha(x)$, $q_\alpha(x)$ дополнительные условия [ср. (12), (12′)]:

$$\sum_k \left\{ e_{\alpha k} \int \frac{\partial \xi}{\partial x_k} p_\beta dV - e_{\beta k} \int \frac{\partial \xi}{\partial x_k} p_\alpha dV \right\} = 0, \tag{87a}$$

$$\sum_k \left\{ e_{\alpha k} \int \frac{\partial K}{\partial x_k} q_\beta dV - e_{\beta k} \int \frac{\partial K}{\partial x_k} q_\alpha dV \right\} = 0. \tag{87б}$$

[18] Если, с другой стороны, мы воспользуемся матричным представлением, в котором T^0_{12}, L^0_{12} и L^2_0 диагональны, то $e_{\alpha k}$ оказываются матрицами, обобщающими матрицы ротатора, уже использованные Гайтлером и Ма (см. прим. 8).

С другой стороны, гамильтониан (77) формально переходит в гамильтониан для свободных плоских волн

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\int p_{\alpha}^{2}dV + \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\int q_{\alpha}(-\Delta + \varkappa^{2})q_{\alpha}dV. \qquad (88)$$

Отличие уравнений движения от волнового уравнения для свободных частиц целиком связано с условиями симметрии или с отличием соотношений коммутации (86) от обычных канонических [19].

Из (87а), (87б), (88), применяя метод неопределенных множителей Лагранжа, имеющих здесь вид антисимметричных постоянных $\lambda_{\alpha\beta} = -\lambda_{\beta\alpha}$ и $\lambda'_{\alpha\beta} = -\lambda'_{\beta\alpha}$, получаем уравнения движения:

$$\dot{q}_{\alpha} = p_{\alpha} - \sum_{\beta, k}\lambda_{\alpha\beta}e_{\beta k}\frac{\partial\xi}{\partial x_{k}},$$

$$-\dot{p}_{\alpha} = (-\Delta + \varkappa^{2})q_{\alpha} + \sum_{\beta, k}\lambda'_{\alpha\beta}e_{\beta k}\frac{\partial K}{\partial x_{k}}.$$

Подставляя в производные по времени от формул (87а) и (87б) выражения для $\dot{q}_{\alpha}$, $\dot{p}_{\alpha}$, находим

$$\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{k}\int(p_{\alpha}e_{\beta k} - p_{\beta}e_{\alpha k})\frac{\partial K}{\partial x_{k}}dV, \quad \lambda'_{\alpha\beta} = 0.$$

Следовательно, уравнения движения имеют вид:

$$\dot{q}_{\alpha} = p_{\alpha} - \frac{1}{2}\sum_{i, k, \beta}e_{\beta k}\frac{\partial\xi}{\partial x_{k}}\int(p_{\alpha}e_{\beta i} - p_{\beta}e_{\alpha i})\frac{\partial K}{\partial x_{i}}dV, \qquad (89а)$$

$$-\dot{p}_{\alpha} = (-\Delta + \varkappa^{2})q_{\alpha}. \qquad (89б)$$

Эти же уравнения получаются из (86) с использованием соотношения $\dot{f} = i[H, f]$ для $f = p_{\alpha}$ и $f = q_{\alpha}$.

Если мы сначала будем считать q_{α}, p_{α} классическими величинами, то сможем проинтегрировать (89а), (89б), полагая

$$p_{\alpha} = \dot{u}_{\alpha},\ q_{\alpha} = u_{\alpha} - \frac{1}{2}\sum_{i, k, \beta}e_{\beta k}\frac{\partial\xi}{\partial x_{k}}\int(u_{\alpha}e_{\beta i} - u_{\beta}e_{\alpha i})\frac{\partial K}{\partial x_{i}}dV, \qquad (90)$$

где функции u_{α} согласно (89б) удовлетворяют волновому уравнению

$$\left(-\Delta + k^{2} + \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right)u_{\alpha} = \frac{4\pi}{I}\sum_{i, k, \beta}e_{\beta k}\frac{\partial K}{\partial x_{k}}\int(u_{\alpha}e_{\beta i} - u_{\beta}e_{\alpha i})\frac{\partial K}{\partial x_{i}}dV \qquad (91)$$

и дополнительному условию

$$\sum_{k}\left\{e_{\beta k}\int\frac{\partial\xi}{\partial x_{k}}u_{\alpha}dV - e_{\alpha k}\int\frac{\partial\xi}{\partial x_{k}}u_{\beta}dV\right\} = 0. \qquad (91а)$$

[19] Аналогичный результат в заряженной скалярной теории впервые был получен Ю. Швингером.

Однако это условие нельзя считать независимым от волнового уравнения (91), поскольку вторая производная по времени от (91а) обращается в нуль как следствие уравнения (91). Это дополнительное условие исключает в сущности только статическое решение уравнения (91):

$$u_\alpha^0 = \sum_k e_{\alpha k} \frac{\partial \xi}{\partial x_k}.$$

Квантовотеоретическое рассмотрение дает аналогичный результат. Пусть $u_\alpha^{(n)}$ образуют набор ортонормированных функций (c-числовых), удовлетворяющих (с обычными граничными условиями в полости) уравнению

$$(-\Delta + k^2 - \omega_n^2)\, u_\alpha^{(n)} = \frac{4\pi}{I} \sum_{i,k,\beta} e_{\beta k} \frac{\partial K}{\partial x_k} \int (u_\alpha^{(n)} e_{\beta i} - u_\beta^{(n)} e_{\alpha i}) \frac{\partial K}{\partial x_i}\, dV \qquad (91б)$$

и дополнительному условию (91а). Положим:

$$p_\alpha = \sum_n A_n u_\alpha^{(n)} \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{1/2}, \qquad (92)$$

$$q_\alpha = \sum_n A_n (2\omega_n)^{-1/2} \left\{ u_\alpha^{(n)} - \frac{1}{2} \sum_{i,k,\beta} e_{\beta k} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} \int (u_\alpha^{(n)} e_{\beta i} - u_\beta^{(n)} e_{\alpha i}) \frac{\partial K}{\partial x_i}\, dV \right\},$$

$$A_{-n} = A_n^\dagger,\ u_\alpha^{(-n)} = u_\alpha^{(n)*}, \qquad \omega_{-n} = \omega_n > 0. \qquad (92а)$$

Если предположить, что

$$[A_n, A_m^\dagger] = [A_n, A_{-m}] = \delta_{nm}, \qquad (93)$$

мы получаем в точности перестановочное соотношение (86), причем система функций $u_\alpha^{(n)}$ неполная, так как вследствие (91а) статическое решение $u_\alpha^0 = \sum_k e_{\alpha k} (\partial \xi / \partial x_k)$ отсутствует. Теперь гамильтониан (77) принимает нормальную форму

$$H = \sum_n \omega_n \left(A_n^\dagger A_n + \frac{1}{2} \right). \qquad (94)$$

Таким образом, наша задача о рассеянии свелась к нахождению такого решения уравнения (91) [или, отвлекаясь от множителя $\exp(-i\omega t)$, уравнения (91б)], которое описывает плоскую волну, падающую в заданном направлении, и уходящую рассеянную волну. Соответственно трем псевдоскалярным полям u_α ($\alpha = 1,2,3$) мы получим для этой задачи три линейно-независимых решения $u_\alpha^{(\rho)}$ или $u_\alpha^{(1)}$, $u_\alpha^{(2)}$, $u_\alpha^{(3)}$, которые соответствуют налетающей частице с $\rho = 1$, $\rho = 2$ или $\rho = 3$.

Вместо этого можно использовать также решения

$$u_\alpha^+ = (1/\sqrt{2})\,(u_\alpha^{(1)} + i u_\alpha^{(2)}),$$

$$u_\alpha^- = (1/\sqrt{2})\,(u_\alpha^{(1)} - i u_\alpha^{(2)}),\ u_\alpha^{(3)},$$

которые соответствуют налетающей положительно или отрицательно заряженной или же нейтральной частице.

Решим теперь уравнение (91б) подстановкой

$$u_\alpha^{(\rho)}(x) = \delta_{\alpha\rho} \exp[ik(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})] + \\ + A\sum_{i,k}(\delta_{\alpha\rho}n_k - e_{\alpha i}e_{\rho k}n_i)\frac{\partial}{\partial x_k}\int K(x')\frac{e^{ikr}}{r}dV'. \quad (95)$$

Здесь индекс $\rho = 1,2,3$ нумерует три разных решения, $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления падающей волны, $k = (\omega^2 + \varkappa^2)^{1/2}$ и постоянная A подлежит определению. Первый член (плоская волна) удовлетворяет волновому уравнению для свободных частиц [уравнению (91), без правой части], тогда как рассеянная волна и потому все выражение (95) удовлетворяет уравнению

$$-(\Delta + k^2)u_\alpha^{(\rho)} = 4\pi A\sum_{i,k}(\delta_{\alpha\beta}n_k - e_{\alpha i}e_{\rho k}n_i)\frac{\partial K}{\partial x_k}. \quad (95')$$

Для проверки (91б) введем сокращенные обозначения:

$$\int K(x)\exp[ik(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})]\,dV = \int K(x)\frac{\sin kR}{kR}dV = F \quad (96)$$

(где $R = |\mathbf{x}|$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$),

$$\iint\frac{\partial K(x)}{\partial x_i}\frac{\cos kr}{r}\frac{\partial K(x')}{\partial x'_k}dVdV' = \delta_{ik}J. \quad (97)$$

Далее вычислим интеграл

$$\iint\frac{\partial K(x)}{\partial x_i}\frac{\sin kr}{r}\frac{\partial K(x')}{\partial x'_k}dVdV' = \frac{1}{3}\iint K(x)\left(-\Delta\frac{\sin kr}{r}\right)K(x')\,dVdV' = \\ = \frac{k^2}{3}\iint K(x)\frac{\sin kr}{r}K(x')\,dVdV'.$$

Но вследствие того, что функция $\sin kr/kr$ при $x = 0$ не имеет особенности, решением волнового уравнения $(\Delta + k^2)\,u = 0$ будет

$$\int(\sin kr/r)\,K(x')\,dV',$$

и потому

$$\int(\sin kr/r)\,K(x')\,dV' = (\sin kR/R)\,C.$$

Кроме того, $C = F$, так как для $R = 0$ левая часть уравнения равна kF, а правая часть — kC. Поэтому

$$\iint\frac{\partial K(x)}{\partial x_i}\frac{\sin kr}{r}\frac{\partial K(x')}{\partial x'_k}dVdV' = \delta_{ik}\frac{k^3}{3}F^2 \quad (98)$$

и окончательно

$$\iint \frac{\partial K(x)}{\partial x_i} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial K(x')}{\partial x_k} dV dV' = \delta_{ik}\left(J + i\frac{k^3}{3}F^2\right). \tag{99}$$

Подставляя (95), находим

$$\sum_k \int (e_{\beta k} u_\alpha^{(\rho)} - e_{\alpha k} u_\beta^{(\rho)}) \frac{\partial K}{\partial x_k} dV =$$

$$= \sum_k (\delta_{\rho\alpha} e_{\beta k} n_k - \delta_{\rho\beta} e_{\alpha k} n_k) \left\{- ikF + 2A\left(J + \frac{ik^3}{3}F^2\right)\right\}$$

Поэтому дифференцирование уравнения (89б) дает

$$-(\Delta + k^2) u_\alpha^{(\rho)} =$$

$$= \frac{4\pi}{2I}\left\{\sum_{i,k} (n_k \delta_{\alpha\rho} - e_{\rho k} e_{\alpha i} n_i) \frac{\partial K}{\partial x_k}\right\}\left\{- ikF + 2A\left(J + \frac{ik^3}{3}F^2\right)\right\}$$

и из сравнения с (95′) получается:

$$\begin{aligned} IA &= -\frac{ikF}{2} + A\left(J + \frac{ik^3}{3}F^2\right), \\ A &= \frac{ikF/2}{J - I + \frac{ik^3}{3}F^2}. \end{aligned} \tag{100}$$

Вводя

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\delta &= \frac{k^3}{3}F^2/(J - I), \\ \sin\delta &= \frac{k^3}{3}F^2/\left[(J - I)^2 + \left(\frac{k^3}{3}F^2\right)^2\right], \end{aligned} \tag{101}$$

имеем

$$A = (3i/2k^2F)\sin\delta e^{i\delta}. \tag{100′}$$

Асимптотическое поведение рассеянной волны для очень больших r в направлении этой волны $\mathbf{n}_s$ мы получаем, полагая

$$r = R - ik(\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{x}), \quad \nabla = -ik\mathbf{n}_s,$$

$$[u_\alpha^{(\rho)}(x)]_{\text{расс}} \sim ikFA\,[\delta_{\rho\alpha}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_s) - (\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}_\rho\cdot\mathbf{n}_s)]\,(e^{ikR}/R). \tag{102}$$

Теперь вычислим квадрат этой амплитуды для заданного $\mathbf{n}_s$ и просуммируем по α:

$$\sum_\alpha [u_\alpha^{(\rho)}(x)]^2_{\text{расс}} = k^2F^2A^2\,[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_s)^2 - 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_s)(\mathbf{e}_\rho\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}_\rho\cdot\mathbf{n}_s) + (\mathbf{e}_\rho\cdot\mathbf{n}_s)^2].$$

Далее произведем усреднение по всем направлениям системы осей $\mathbf{e}_\alpha$ и, положив $\cos\theta = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_s)$, где θ — угол рассеяния, получим для правой

части [20]

$$(kFA)^2 \frac{1}{3} (1 + \cos^2 \theta).$$

Это выражение представляет собой сечение dq для телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta$; подставляя (100), находим

$$dq = \frac{\sin^2 \delta}{k^2} \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta)\, d\Omega \tag{103}$$

и полное сечение

$$q = \frac{\sin^2 \delta}{k^2} 4\pi. \tag{104}$$

С другой стороны, интегрируя квадрат амплитуды по всем углам θ, что означает усреднение по $\mathbf{n}_s$ без суммирования по α, имеем

$$(kFA)^2 \frac{1}{3} [\delta_{\alpha\rho} - 2\delta_{\alpha\rho} (\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{n})^2].$$

Усреднение по ориентациям системы дает

$$(kFA)^2 \frac{1}{9} (\delta_{\alpha\rho} + 1),$$

что означает

$$q_\alpha = 4\pi (\sin^2 \delta / k^2) \frac{1}{4} (1 + \delta_{\alpha\rho}). \tag{105}$$

Другими словами, если налетающей частицей будет «частица 1», то числа рассеянных «частиц 1», «частиц 2» и «частиц 3» будут $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_4$. Это верно также, если в качестве частиц «1», «2», «3» расположить *в любом порядке нейтральную, положительно и отрицательно заряженные частицы*, как можно показать с помощью приведенных выше собственных функций

$$u_\alpha^+ = (1/\sqrt{2})\, (u_\alpha^{(1)} + i u_\alpha^{(2)}),$$
$$u_\alpha^- = (1/\sqrt{2})\, (u_\alpha^{(1)} - i u_\alpha^{(2)}),$$

а также с помощью $u_\alpha^{(3)}$.

Наконец, мы вычислим интегралы J, I и F для физически важного случая $ka \ll 1$, $\varkappa a \ll 1$. В этом случае можно прежде всего положить $F = 1$. Далее, в соответствии с (97) имеем

$$3J = \iint K(x)\, [(-\Delta)(\cos kr/r)]\, K(x')\, dV dV' = 4\pi \int K^2(x)\, dV + k^2 \iint K(x)\, (\cos kr/r)\, K(x')\, dV dV'.$$

[20] Это верно в приближении, в котором пренебрегается потерей энергии мезона при рассеянии; производится также усреднение всех направлений момента импульса L_{ik}^0 в начальном и конечном состояниях.

Таким же способом находим

$$3I = \iint K(x)\left[(-\Delta)\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right] K(x')\,dV dV' =$$
$$= 4\pi \int K^2(x)\,dV - \varkappa^2 \iint K(x)\frac{e^{-\varkappa r}}{r} K(x')\,dV dV'.$$

Поэтому

$$3(J-I) = \iint K(x)\,(k^2 \cos kr + \varkappa^2 e^{-\varkappa r})\frac{1}{r} K(x')\,dV dV' \tag{106}$$

Пока это еще точный результат, но для $ka \ll 1$, $\varkappa a \ll 1$ мы заменяем единицей $\cos kr$ и $e^{-\varkappa r}$ и получаем, полагая $\omega^2 = k^2 + \varkappa^2$:

$$3(J-I) = \omega^2/a \quad \text{для} \quad ka \ll 1,\ \varkappa a \ll 1. \tag{106'}$$

Отсюда

$$\sin\delta \sim \operatorname{tg}\delta \sim (k^3 a/\omega^2),$$

и для (103), (104), заменяя k/ω на $v/c = p/E$, имеем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} dq &= \left(\frac{p}{E}\right)^4 a^2 \frac{3}{4}(1+\cos^2\theta)\,d\Omega \\ q &= \left(\frac{p}{E}\right)^4 a^2 4\pi. \end{aligned}\right\} \quad ka \ll 1, \quad \varkappa a \ll 1, \tag{107}$$

Эти равенства приводились в разд. 2.

8. Заряженная псевдоскалярная теория

Хотя симметричная теория математически является более изящной, чем «заряженная псевдоскалярная теория», использующая только положительно и отрицательно заряженные мезоны без нейтральных мезонов, представляет также интерес получить соответствующие результаты и для последней теории, так как нейтральные мезоны не были обнаружены и так как в случае сильной связи заряженная теория также дает силы притяжения между двумя одинаковыми частицами.

Для комплексного псевдоскалярного поля φ гамильтониан в этой теории записывается в виде

$$H = \int dV\,\{\pi^*\pi + (\nabla\varphi^*)(\nabla\varphi) + \varkappa^2\varphi^*\varphi - \frac{g}{\varkappa}(4\pi)^{1/2} K(x)\,(\nabla\varphi\cdot\tau_+\sigma + \nabla\varphi^*\cdot\tau_-\sigma)\}, \tag{108}$$

где

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2), \qquad \tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2). \tag{109}$$

Чтобы облегчить сравнение с симметричной теорией, мы отделим мнимую и вещественную части переменных π и φ, нормированных следующим

образом:

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 + i\pi_2), \qquad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 - i\varphi_2),$$
$$\pi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 - i\pi_2), \qquad \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + i\varphi_2). \tag{110}$$

Мы получаем

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ \int [\pi_\alpha^2 + (\nabla\varphi_\alpha)^2 + \varkappa^2\varphi_\alpha^2]\, dV - \frac{g}{\varkappa\sqrt{2}} (4\pi)^{1/2} \int K(x)\tau_\alpha \sigma \cdot \nabla\varphi_\alpha dV \right\}. \tag{111}$$

Поэтому мы можем воспользоваться всеми формулами разд. 3, просто опуская компоненты поля π_3, φ_3 и придавая индексу суммирования α только два значения: 1, 2. Конечно, интегралом движения в этой теории служит только компонента T_{12} изотопического спина, что дает электрический заряд $-{}^1/_2$.

Определение собственных значений энергии взаимодействия

$$H_{\text{вз}} = \frac{g}{\varkappa\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{3} (\tau_1\sigma_k\varphi_{1k}^0 + \tau_2\sigma_k\varphi_{2k}^0)$$

здесь несколько проще, чем в случае симметричной теории. Вычисляя квадрат энергии взаимодействия, получаем

$$[\tau_1(\sigma\cdot\varphi_1^0) + \tau_2(\sigma\cdot\varphi_2^0)]^2 = (\varphi_1^0)^2 + (\varphi_2^0)^2 - 2\tau_3(\sigma\cdot[\varphi_1^0, \varphi_2^0]).$$

Поэтому четыре собственных значения энергии взаимодействия будут определяться выражением

$$E_{\text{вз}} = \pm \frac{g}{\varkappa\sqrt{2}} \{(\varphi_1^0)^2 + (\varphi_2^0)^2 \pm |[\varphi_1^0, \varphi_2^0]|\}^{1/2} =$$
$$= \pm \frac{g}{\varkappa\sqrt{2}} \{(\varphi_1^0)^2 + (\varphi_2^0)^2 \pm 2[(\varphi_1^0)^2(\varphi_2^0)^2 - (\varphi_1^0\cdot\varphi_2^0)^2]^{1/2}\}^{1/2} \tag{112}$$

со всеми возможными комбинациями знаков + и —.

Применяя формулы разд. 4, мы приходим здесь к случаю, когда одно из собственных значений Q матрицы C в соотношении (30) или C' в соотношении (30′) равно нулю в силу того, что $\varphi_{3i}^0 \equiv 0$. Поэтому матрица C' имеет только два столбца и две строки:

$$C' = \begin{pmatrix} (\varphi_1^0)^2 & (\varphi_1^0\cdot\varphi_2^0) \\ (\varphi_1^0\cdot\varphi_2^0) & (\varphi_2^0)^2 \end{pmatrix},$$

так что Q_1^2, Q_2^2 — корни уравнения

$$\{(\varphi_1^0)^2 - x\}\{(\varphi_2^0)^2 - x\} - (\varphi_1^0\cdot\varphi_2^0)^2 = 0,$$

из которого следует

$$Q_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\varphi_1^0)^2+(\varphi_2^0)^2\pm[((\varphi_1^0)^2+(\varphi_2^0)^2-4(\varphi_1^0)^2(\varphi_2^0)^2-(\varphi_1^0\cdot\varphi_2^0)^2]^{1/2}\}^{1/2}. \quad (113)$$

Выражение (36) для энергии взаимодействия

$$E_{\text{вз}}=\frac{g}{\varkappa\sqrt{2}}(\pm Q_1\pm Q_2) \quad (112')$$

согласуется с формулой (112). Ортогональная матрица $B_{r\alpha}$ имеет здесь только две строки и два столбца и может быть выбрана в виде

$$B_{r\alpha}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}. \quad (114)$$

Вводя для A_{kr} обозначение $\mathbf{n}^{(r)}$, получаем из нормальной формы (29) для $\varphi_{\alpha k}^0$:

$$\begin{aligned}\varphi_1^0&=Q_1\cos\theta\mathbf{n}^{(1)}-Q_2\sin\theta\mathbf{n}^{(2)},\\ \varphi_2^0&=Q_1\sin\theta\mathbf{n}^{(1)}+Q_2\cos\theta\mathbf{n}^{(2)}.\end{aligned} \quad (115)$$

Таким образом, $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$ имеют тот смысл, что вектор $\mathbf{n}^{(3)}$ ортогонален плоскости, проведенной через φ_1^0 и φ_2^0, а ориентация осей $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, которые мы временно будем называть осями ξ и η, определяется условием

$$\varphi_{1\xi}^0\varphi_{1\eta}^0+\varphi_{2\xi}^0\varphi_{2\eta}^0=0. \quad (116)$$

Это условие можно немедленно получить из (115). Оно означает, что матрица C, определенная формулой (30), при переходе к осям (ξ, η, ζ) принимает диагональный вид с диагональными элементами Q_1, Q_2, Q_3. В формулах (45), (45′) мы должны положить

$$\pi_{3k}^0\equiv 0,\qquad B_{3\alpha}\equiv 0,\qquad B_{r3}\equiv 0\quad\text{при}\quad \alpha,r=1,2;\quad P_3\equiv 0,$$

откуда

$$\sum_{\alpha=1,2}(\pi_\alpha^0)^2=\sum_{r=1,2}P_r^+P_r+\frac{(L_0^{12}+T_0^{12})^2}{2(Q_1-Q_2)^2}+\frac{(L_0^{12}-T_0^{12})^2}{2(Q_1+Q_2)^2}+\sum_{r=1,2}\frac{(L_0^{r3})^2}{Q_r^2}. \quad (50\text{в})^{21}$$

Симметричные величины $q_{\alpha\beta}^0$, $p_{\alpha\beta}^0$ следует определить только для $\alpha,\beta=1,2$; в соответствии с (51) получаем:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{(1)}&=\mathbf{n}^{(1)}\cos\theta-\mathbf{n}^{(2)}\sin\theta,\\ \mathbf{e}^{(2)}&=\mathbf{n}^{(1)}\sin\theta+\mathbf{n}^{(2)}\cos\theta,\\ \mathbf{e}^{(3)}&=\mathbf{n}^{(3)}\end{aligned} \quad (117)$$

[21] Мы обозначаем соответственные уравнения в симметричной и заряженной теориях одним номером, добавляя в последнем случае букву в.

и из соотношения (52)

$$q_{11}^0 = Q_1 \cos^2\theta + Q_2 \sin^2\theta,$$
$$q_{12}^0 = q_{21}^0 = (Q_1 - Q_2)\sin\theta\cos\theta, \qquad (118)$$
$$q_{22}^0 = Q_1 \sin^2\theta + Q_2 \cos^2\theta.$$

По поводу описания $\mathbf{n}^{(r)}$ и L_0^{rs} углами Эйлера и сопряженными им обобщенными импульсами см. приложение.

Для минимальной потенциальной энергии мы получаем из (52) прежнее значение (63) для $Q_1 = Q_2 = D$; но вследствие $Q_3 = 0$ имеем

$$E^0_{\text{мин}} = -\frac{D^2}{I} = -\frac{1}{2}\frac{g^2}{\varkappa^2} I. \qquad (63\text{в})$$

В приближении, в котором $q^{(1)}_{\alpha\beta}$ отбрасываются, теперь находим:

$$L_0^{12} = D\{(\mathbf{e}_\alpha \cdot \pi^0_\beta) - (\mathbf{e}_\beta \cdot \pi^0_\alpha)\},$$
$$L_0^{3\alpha} = -L_0^{\alpha 3} = D(\mathbf{e}_3 \cdot \pi^0_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2).$$

Поэтому

$$\pi^0_\alpha = \sum_{\beta=1,2}\left(\mathbf{e}_\beta p^0_{\alpha\beta} + \frac{1}{2D}\langle \mathbf{e}_\beta L_0^{\alpha\beta}\rangle_H\right) + \frac{1}{D}\mathbf{e}_3 L_0^{\alpha 3},$$

откуда

$$\sum_\alpha (\pi^0_\alpha)^2 = \sum_{\alpha,\beta}(p^0_{\alpha\beta})^2 + \frac{1}{2D^2}(L_0^{12})^2 + \frac{1}{D^2}\sum_{\alpha=1,2}(L_0^{\alpha 3})^2 =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta}(p^0_{\alpha\beta})^2 + \frac{1}{2D^2}[2L_0^2 - (L_0^{12})^2].$$

Это будет совпадать с (50в), если мы подставим в последние два члена $Q_1 = Q_2 = D$, $T_0{}^{12} = -L_0{}^{12}$. В гамильтониане (II) мы должны поэтому вместо $L_0{}^2$ подставить $2L_0{}^2 - (T_0^{12})^2$.

Точно таким же образом мы должны подставить в (75)

$$\frac{1}{2D}\left\{\sum_\beta e_{\beta i} L_0^{\alpha\beta} + 2e_{3i}L_0^{\alpha 3}\right\} \quad \text{вместо} \quad \frac{1}{2D}\sum_\beta e_{\beta i}L_0^{\alpha\beta},$$

после чего вместо (76) получим

$$H = \frac{\varkappa^2}{2g^2}\frac{4\pi}{\int (\partial X/\partial x)^2 dV}[2L_0^2 - (T_0^{12})^2] - \frac{1}{2}\frac{g^2}{\varkappa^2} + H_1, \qquad (76\text{в})$$

где H_1 снова дается формулой (77). Вместо (80), (80а), (80б) имеем:

$$\Delta E = \frac{3}{2}\frac{\varkappa^2}{g^2}\frac{4\pi}{\int (\nabla X)^2 dV}\left[2j(j+1) - n^2 - \frac{5}{4}\right], \qquad (80\text{в})$$

$$\frac{\Delta E}{\mu c^2} = \frac{3}{2}\frac{\varkappa a}{g^2}\left[2j(j+1) - n^2 - \frac{5}{4}\right] \quad \text{при} \quad \varkappa a \ll 1, \qquad (80\text{ав})$$

$$\frac{\Delta E}{\mu c^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{(\varkappa a)^5}{g^2}\left[2j(j+1) - n^2 - \frac{5}{4}\right] \quad \text{при} \quad \varkappa a \gg 1.$$

Ограничение (74) $-j \leqslant n \leqslant j$, конечно, остается в силе.

При вычислении рассеяния в формулы разд. 7 должны быть внесены следующие видоизменения. На функции $p_\alpha(x)$, $q_\beta(x)$ (в дальнейшем только $\alpha, \beta = 1, 2$) накладываются помимо (87а), (87б) еще условия

$$\mathbf{e}_3 \cdot \int \nabla K q_\alpha dV = 0, \qquad \mathbf{e}_3 \cdot \int \nabla \xi p_\alpha dV = 0. \tag{87в}$$

В перестановочных соотношениях (86) возникает соответственно дополнительный член

$$i\,[p_\alpha(\mathbf{x}_1), q_\beta(\mathbf{x}_2)] = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial K}{\partial x_{1k}} \frac{\partial \xi}{\partial x_{2k}} \delta_{\alpha\beta} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,k} e_{\alpha k} e_{\beta i} \frac{\partial K}{\partial x_{1i}} \frac{\partial \xi}{\partial x_{2k}} - \delta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\sum_{i,k} e_{3i} e_{3k} \frac{\partial K}{\partial x_{1i}} \frac{\partial \xi}{\partial x_{2k}}. \tag{86в}$$

Полагая

$$p_\alpha = \dot{u}_\alpha,$$

$$q_\alpha = u_\alpha - \frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} \int \Big(u_\alpha \delta_{ik} + u_\alpha e_{3i} e_{3k} - \sum_\beta u_\beta e_{\beta k} e_{\alpha i}\Big) \frac{\partial K}{\partial x_i} dV, \tag{90в}$$

мы получаем теперь:

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_\beta \cdot \int \nabla \xi u_\alpha dV - \mathbf{e}_\alpha \cdot \int \nabla \xi u_\beta dV = 0, \\ \mathbf{e}_3 \cdot \int \nabla \xi u_\alpha dV = 0, \end{gathered} \tag{91в}$$

$$(-\Delta + \varkappa^2 - \omega^2) u_\alpha = \frac{4\pi}{2I} \sum_{i,k,\beta} \frac{\partial K}{\partial x_k} \int \{u_\alpha(\delta_{ik} + e_{3i}e_{3k}) - u_\beta e_{\beta k} e_{\alpha i}\} \frac{\partial K}{\partial x_i} dV. \tag{91в$'$}$$

Решение будет

$$u_\alpha^{(\rho)}(x) = \delta_{\rho\alpha} \exp[ik(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})] + A\{\delta_{\rho\varkappa}[(\mathbf{n}\cdot\nabla) + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3\cdot\nabla)] - \\ - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\alpha)(\mathbf{e}_\rho\cdot\nabla)\} \int K(x') \frac{e^{ikr}}{r} dV', \tag{95в}$$

где A снова определяется формулами (100), (100′). Для больших R получаем асимптотическое выражение

$$[u_\alpha^{(\rho)}(x)]_{\text{расс}} \sim ikFA\ [\delta_{\rho\varkappa}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_s) + \delta_{\rho\alpha}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_3)(\mathbf{n}_s\cdot\mathbf{e}_3) - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\alpha)(\mathbf{n}_s\cdot\mathbf{e}_\rho)] \frac{e^{ikR}}{R},$$

$$\sum_{\alpha=1,2} |u_\alpha^{(\rho)}(x)|^2_{\text{расс}} = (kFA)^2\{[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_s) + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_3)(\mathbf{n}_s\cdot\mathbf{e}_3)]^2 - 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_s)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\rho)(\mathbf{n}_s\cdot\mathbf{e}_\rho) - \\ - 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_3)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\rho)(\mathbf{n}_s\cdot\mathbf{e}_3)(\mathbf{n}_s\cdot\mathbf{e}_\rho) + (\mathbf{n}_s\cdot\mathbf{e}_\rho)^2 - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_3)^2(\mathbf{n}_s\cdot\mathbf{e}_\rho)^2\}.$$

В результате усреднения по направлениям системы осей $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ находим (для любого значения ρ и для решений, соответствующих заряженной налетающей частице):

$$dq = (\sin^2\delta/k^2)\frac{3}{4}(1 + 3\cos^2\theta)\,d\Omega, \tag{103в}$$

$$q = (\sin^2\delta/k^2)\frac{3}{2}4\pi. \tag{104в}$$

В случае $ka \ll 1$, $\varkappa a \ll 1$ здесь вместо $\sin^2 \delta/k^2$ снова можно подставить

$$\left(\frac{v}{c}\right)^4 a^2 = \left(\frac{p}{E}\right)^4 a^2.$$

Если налетающая частица заряжена положительно, то для (проинтегрированного по всем углам рассеяния) полного сечения рассеяния с тем же (+) и с противоположным (—) зарядом мы находим соответственно:

$$\begin{aligned} q_+ &= (\sin^2 \delta/k^2)\, 4\pi \frac{5}{4}, \\ q_- &= (\sin^2 \delta/k^2)\, 4\pi \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{105в}$$

Сумма этих выражений совпадает с формулой (104в).

9. Магнитный момент нуклона

Мезонное поле, окружающее тяжелую частицу, создает магнитный момент, который для протона и нейтрона оказывается равным по величине, но противоположным по знаку, в точности как в теории слабой связи [22]. Результаты этого раздела одинаково справедливы и для симметричной, и для заряженной псевдоскалярной теории, поскольку нейтральные мезоны не дают вклада в магнитный момент.

Магнитный момент связан с плотностью тока S выражением

$$M = \frac{1}{2} e \int [\mathrm{x} \cdot \mathrm{S}]\, dV \tag{119}$$

или, в тензорной форме,

$$M_{ik} = -M_{ki} = \frac{1}{2} e \int [x_i S_k - x_k S_i]\, dV. \tag{119а}$$

Здесь e — абсолютная величина элементарного электрического заряда. Определение плотности заряда S_0 и тока S в теории, использующей «операторы конечного расстояния» вроде функции источника $K(x)$, становится далеко не бесспорным. Действительно, в такой теории всюду внутри источника невозможно удовлетворить уравнению непрерывности

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathrm{S} = 0. \tag{120}$$

Оно выполняется вне источника, а также (в среднем) в объеме V, размеры которого по порядку величины равны a и в который включается источник

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial S_0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathrm{S}\right) dV = 0. \tag{120а}$$

---

[22] *H. Fröhlich*, *W. Heitler*, *N. Kemmer*. Proc. Roy. Soc., 1938, A166, 154. Результат этих авторов, выраженный их формулой (63), по форме (отвлекаясь от численного множителя) согласуется с нашим результатом [формула (124)].

Выражения для S_0 и S, удовлетворяющие этому более слабому условию и согласующиеся с определением полного заряда (9), имеют вид:

$$S_0 = \varphi_1\pi_2 - \varphi_2\pi_1 + \frac{1}{2}(1+\tau_3)K(x),$$

$$\mathrm{S} = (\varphi_2\nabla\varphi_1 - \varphi_1\nabla\varphi_2) + \frac{g}{\varkappa}(2\pi)^{1/2}(\varphi_1\tau_2 - \varphi_2\tau_1)\,\sigma K(x). \qquad (121)$$

Для доказательства того, что эти выражения удовлетворяют законам сохранения, мы применим соотношения:

$$\left(-\Delta + \varkappa^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_\alpha + \frac{g}{\varkappa}(2\pi)^{1/2}\tau_\alpha(\sigma\cdot\nabla K) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_3}{\partial t} = -\frac{g}{\varkappa}(2\pi)^{1/2}\sigma\int(\tau_2\nabla\varphi_1 - \tau_1\nabla\varphi_2)K(x)\,dV.$$

Эти соотношения вытекают из общего уравнения $\frac{\partial f}{\partial t} = i[H, f]$ и перестановочных соотношений (2), (6), примененных к гамильтониану, заданному формулами (1), (8) при $f = \pi_\alpha(x)$, $\varphi_\alpha(x)$, τ_3. Мы получаем

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \operatorname{div}\mathrm{S} = -\sigma\cdot[\tau_2\nabla\varphi_1 - \tau_1\nabla\varphi_2]\,K(x) + K(x)\,\sigma\cdot\int dV\,(\tau_2\nabla\varphi_1 - \tau_1\nabla\varphi_2)\,K(x).$$

Таким образом, уравнение непрерывности выполняется для точек вне источника, где $K(x) = 0$, а также в среднем для источника, как указано равенством (120а). Вследствие того что уравнение непрерывности внутри источника не выполняется, принятое нами выражение для плотности тока можно применять для вычисления магнитного момента только в том случае, если этот момент создается в объеме, большом по сравнению с размерами источника; другими словами, мы должны ограничиться случаем малых размеров источника, $\varkappa a \ll 1$.

Вводя приближение сильной связи, применим S-преобразование (65а), (65б) ко второй части тока (121), а затем подставим для $\tau_r\sigma_s$ значения (68), а именно $\tau_r\sigma_s = -\delta_{rs}$. Тогда получим

$$\mathrm{S} = (\varphi_2\nabla\varphi_1 - \varphi_1\nabla\varphi_2) - \frac{g}{\varkappa}(2\pi)^{1/2}(\varphi_1\mathrm{e}^{(2)} - \varphi_2\mathrm{e}^{(1)})\,K(x). \qquad (122)$$

Подставим значение поля, соответствующее наименьшему собственному значению энергии взаимодействия (16), (64) в отсутствие свободных мезонов:

$$\varphi_\alpha(x) = (4\pi)^{-1/2}\,D\mathrm{e}^{(\alpha)}\cdot\nabla\xi \quad (\alpha = 1,2).$$

Если мы теперь воспользуемся тем, что

$$D = \frac{g}{\varkappa\sqrt{2}}\,I\;[\text{формула (63)}], \qquad \xi = \frac{1}{I}X\;[\text{формула (15)}],$$

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{(4\pi)^{1/2}}\frac{g}{\varkappa\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{(\alpha)}\cdot\nabla X,$$

то выражение для тока примет вид

$$S_k = \frac{g^2}{2\varkappa^2} \sum_{l,\, m=1}^{3} \left\{ \frac{1}{4\pi} (e_l^{(1)} e_m^{(2)} - e_l^{(2)} e_m^{(1)}) \frac{\partial^2 X}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial X}{\partial x_m} - (e_l^{(1)} e_k^{(2)} - e_l^{(2)} e_k^{(1)}) \frac{\partial X}{\partial x_l} K(x) \right\},$$

а магнитный момент будет

$$M_{ik} = \frac{e}{2} \frac{g^2}{2\varkappa^2} \sum_{l,\, m=1}^{3} \left\{ \int dV \frac{1}{4\pi} (e_l^{(1)} e_m^{(2)} - e_l^{(2)} e_m^{(1)}) \left(x_i \frac{\partial^2 X}{\partial x_k \partial x_l} - x_k \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_l} \right) \frac{\partial X}{\partial x_m} - \right.$$
$$\left. - \int dV \left[(e_l^{(1)} e_k^{(2)} - e_l^{(2)} e_k^{(1)}) x_i - (e_l^{(1)} e_i^{(2)} - e_l^{(2)} e_i^{(1)}) x_k \right] \frac{\partial X}{\partial x_l} K(x) \right\}. \qquad (123)$$

Первый объемный интеграл преобразуется интегрированием по частям относительно $\partial/\partial x_l$, причем половина членов при суммировании по l и m исчезает. Во втором интеграле, подставляя для $K(x)$ выражение $(4\pi)^{-1} \times \times (-\Delta + \varkappa^2) X$, взятое из (13), получаем

$$4\pi \int x_i \frac{\partial X}{\partial x_l} K(x)\, dV = \int x_i \frac{\partial X}{\partial x_l} (-\Delta + \varkappa^2) X dV = \frac{1}{2} \int dV x_i \frac{\partial}{\partial x_l} X (-\Delta + \varkappa^2) X +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_r \int dV x_i \frac{\partial}{\partial x_r} \left(X \frac{\partial^2 X}{\partial x_l \partial x_r} - \frac{\partial X}{\partial x_l} \frac{\partial X}{\partial x_r} \right) = \frac{1}{2} \delta_{il} \int X \Delta X dV -$$
$$- \frac{\varkappa^2}{2} \delta_{il} \int X^2 dV + \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial X}{\partial x_l} \frac{\partial X}{\partial x_i} - X \frac{\partial^2 X}{\partial x_l \partial x_i} \right) dV =$$
$$= -\frac{1}{2} \delta_{il} \int (\nabla X)^2 dV - \frac{\varkappa^2}{2} \delta_{il} \int X^2 dV + \int \frac{\partial X}{\partial x_l} \frac{\partial X}{\partial x_i} dV.$$

В силу сферической симметрии X имеем

$$\int \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial X}{\partial x_l} dV = \frac{1}{3} \delta_{il} \int (\nabla X)^2 dV.$$

Мы находим

$$M_{ik} = + \frac{e}{8\pi} \frac{g^2}{2\varkappa^2} (e_i^{(1)} e_k^{(2)} - e_i^{(2)} e_k^{(1)}) \left[-\frac{1}{3} \int (\nabla X)^2 dV + \varkappa^2 \int X^2 dV \right].$$

Как было показано в разд. 4, для $\varkappa a \leqslant 1$ вторым интегралом можно пренебречь, тогда как первый дает

$$\frac{1}{4\pi} \int (\nabla X)^2 dV = \frac{1}{a}.$$

Переходя к векторным обозначениям и используя равенство $[\mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)}] = \mathbf{e}^{(3)}$, получаем окончательный результат

$$\mathbf{M} = -\frac{e}{\varkappa} \frac{g^2}{\varkappa a} \frac{1}{12} \mathbf{e}^{(3)}. \qquad (124)$$

Вычислим теперь составляющую $\mathbf{M}$ для заданного направления, например для оси x_3. Введем для $e_k^{(\alpha)}$ матричное представление, в котором матрицы

$L_{12}^0 \equiv L_3^0$, $(L_0)^2$ и $T_0^{12} = -L_0^{(3)}$ [ср. соотношение (73)] диагональны с собственными значениями соответственно m, $j\,(j+1)$ и n при условиях $-j \leqslant m \leqslant j$ и $-j \leqslant n \leqslant j$. Из перестановочных соотношений (39), (55), (56) следует, что матрица $L^{(3)} \equiv L^{12}$ коммутирует со всеми L_k и поэтому диагональна по отношению к j, m и L_k.

Кроме того, матрица $e^{(3)}$ коммутирует с $L^{(3)}$ и поэтому диагональна относительно n. Однако относительно j матрица $e_3^{(3)}$ недиагональна, и необходимо вычислить диагональный матричный элемент $(j, n, m\,|\,e_3^{(3)}\,|\,j, n, m)$.

Имеем следующие соотношения:

$$(m\,|\,L_1 + iL_2\,|\,m-1) = [(j+m)(j-m+1)]^{1/2},$$
$$(m\,|\,L_1 + iL_2\,|\,m+1) = [(j+m-1)(j-m)]^{1/2}.$$

Чтобы удовлетворить перестановочным соотношениям [аналогичным (38)] матриц $e_l^{(3)}$ и L_{ik}^0, положим:

$$(j, m, n\,|\,e_3^{(3)}\,|\,j, m, n) = (j, n\,|\,C\,|\,j, n)\,m,$$
$$(j, m, n\,|\,e_1^{(3)} + ie_2^{(3)}\,|\,j, m-1, n) = (j, n\,|\,C\,|\,j, n)[(j+m)(j-m+1)]^{1/2},$$
$$(j, m, n\,|\,e_1^{(3)} - ie_2^{(3)}\,|\,j, m+1, n) = (j, n\,|\,C\,|\,j, n)[(j+m+1)(j-m)]^{1/2}.$$

Подставляя это в уравнение

$$-(\mathbf{L}\cdot\mathbf{e}^{(3)}) = -\mathbf{L}^{(3)} = \mathbf{T}^{(3)},$$

получаем

$$-(j, n,\,|\,C\,|\,j, n)\,j\,(j+1) = n$$

или

$$-(j, m, n\,|\,e_3^{(3)}\,|\,j, m, n) = \frac{nm}{j\,(j+1)}\,.$$

Отсюда для данного изобара находим главный член

$$M_3 = \frac{e}{\varkappa}\,\frac{g^2}{\varkappa a}\,\frac{1}{2}\,\frac{nm}{j\,(j+1)}\,. \tag{125}$$

Для протона $n = m = j = 1/2$, откуда

$$M_3 = \frac{e}{\varkappa}\,\frac{g^2}{\varkappa a}\,\frac{1}{36}\,. \tag{126}$$

Для нейтрона $n = -1/2$, и потому M_3 просто изменяет знак, как было сказано выше.

Если, для первой оценки, мы отождествим этот магнитный момент с полным эмпирическим магнитным моментом нейтрона, равным $-1{,}93$ протонных магнетона, и предположим, что масса мезона составляет 1/10 массы протона ($e/\varkappa = 10$ протонным магнетонам), то получим $g^2/\varkappa a \sim 6{,}95$. Подставляя значение $\varkappa a \sim 0{,}1$, мы находим $g^2 \sim 0{,}695$, или $g/\varkappa a \sim 8{,}3$, что лежит в области применимости приближения сильной связи.

Однако эта теория никак не может объяснить простым способом, почему магнитные моменты протона и нейтрона не равны по абсолютной величине. Правда, формула (126) дает не весь магнитный момент, а только его часть, создаваемую мезонным облаком. К этой части должен быть прибав-

лен момент самого нуклона [23]. Если мы предположим, что «голый» протон или нейтрон имеет магнитный момент, соответственно равный одному протонному магнетону или нулю, то сможем найти момент нуклона в двух низших состояниях, вычисляя среднее значение оператора

$$\mathbf{M}' = \frac{e\hbar}{m_p c}\frac{1}{2}(1+\tau_3)\,\sigma. \tag{127}$$

В теории слабой связи матрица τ_3 диагональна с собственными значениями $+^1/_2$ для протона и $-^1/_2$ для нейтрона, что дает для магнитного момента те самые значения, которые были приняты для голой сердцевины нуклона. Однако в теории сильной связи, производя S-преобразование, имеем

$$\mathbf{M}' = -\frac{e}{m_p c}\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{(3)},$$

поскольку среднее значение σ равно нулю. Вычисляя, как и выше, составляющую M' вдоль оси x_3, получаем

$$M_3' = \frac{1}{2}\,\frac{nm}{j(j+1)}\,\frac{e}{m_p c}\,. \tag{128}$$

Этот момент, будучи мал по сравнению с эмпирическими значениями магнитных моментов протона и нейтрона, опять оказывается равным по величине и противоположным по знаку для этих двух частиц. Для обоих состояний $n = \pm\, ^1/_2$, $m = j = {^1/_2}$

$$M_3' = \pm\, ^1/_6 \text{ протонного магнетона.}$$

Приложение

1. *Введение полярных углов.* Ортогональные матрицы (или, другими словами, три ортогональных единичных вектора), введенные в разд. 4, можно выразить через углы Эйлера. Мы можем, например, положить:

$$\begin{aligned}
A_{1k} &= \cos\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi,\\
&\qquad \cos\theta\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi,\ \ -\sin\theta\cos\psi,\\
A_{2k} &= -\cos\theta\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi,\\
&\qquad -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi,\ \ \sin\theta\sin\psi,\\
A_{3k} &= \sin\theta\cos\varphi,\ \ \sin\theta\sin\varphi,\ \ \cos\theta.
\end{aligned} \tag{1}$$

Это значит, что в правой части находится транспонированная матрица A. Таким же образом положим для матрицы B:

$$\begin{aligned}
B_{1\alpha} &= \cos\Theta\cos\Phi\cos\Psi - \sin\Phi\sin\Psi,\\
&\qquad \cos\Theta\sin\Phi\cos\Psi + \cos\Phi\sin\Psi,\ \ -\sin\Theta\cos\Psi,\\
B_{2\alpha} &= -\cos\Theta\cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi,\\
&\qquad -\cos\Theta\sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi,\ \ \sin\Theta\sin\Psi,\\
B_{3\alpha} &= \sin\Theta\cos\Phi,\ \ \sin\Theta\sin\Psi,\ \ \cos\Theta.
\end{aligned} \tag{2}$$

[23] Мы обязаны д-ру Ю. Швингеру за ценную дискуссию этой проблемы.

Для матрицы $e_{\alpha k}$, определенной формулой (51), положим

$$
\begin{aligned}
e_{1k} &= \cos a \cos b \cos c - \sin b \sin c,\\
&\quad \cos a \sin b \cos c + \cos b \sin c, \ -\sin a \cos c,\\
e_{2k} &= -\cos a \cos b \sin c - \sin b \cos c,\\
&\quad -\cos a \sin b \sin c + \cos b \cos c, \ \sin a \sin c,\\
e_{3k} &= \sin a \cos b, \ \sin a \sin b, \ \cos a.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Определяя операторы $p_\theta, p_\varphi, p_\psi$ просто следующим образом: $p_\theta = -i\partial/\partial\theta$, $p_\varphi = -i\partial/\partial\varphi$, $p_\psi = -i\partial/\partial\psi$, находим из элемента объема $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi d\psi$, что операторы p_φ, p_ψ эрмитовы, но

$$p_\theta^\dagger = (\sin\theta)^{-1} p_\theta \sin\theta;$$

аналогичные выражения получаются для $p_\Theta^\dagger$, $p_a^\dagger$.

Прямое вычисление операторов момента импульса дает

$$
\begin{aligned}
L_1 \equiv L_{23} &= -\sin\varphi\, p_\theta + (\cos\varphi/\sin\theta)(p_\psi - \cos\theta\, p_\varphi) =\\
&= -p_\theta^\dagger \sin\varphi + (p_\psi - p_\varphi \cos\theta)(\cos\varphi/\sin\theta),\\
L_2 \equiv L_{31} &= \cos\varphi\, p_\theta + (\sin\varphi/\sin\theta)(p_\psi - \cos\theta\, p_\varphi) =\\
&= p_\theta^\dagger \cos\varphi + (p_\psi - p_\varphi \cos\theta)(\sin\varphi/\sin\theta),\\
L_3 \equiv L_{12} &= p_\varphi,
\end{aligned} \tag{4}
$$

и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
L_1 \equiv L_{23} &= -\sin b p_a + (\cos b/\sin a)(p_c - \cos a p_b) =\\
&= -p_a^\dagger \sin b + (p_c - p_b \cos a)(\cos b/\sin a),\\
L_2 = L_{31} &= \cos b p_a + (\sin b/\sin a)(p_c - \cos a p_b) =\\
&= p_a^\dagger \cos b + (p_c - p_b \cos a)(\sin b/\sin a),\\
L_3 = L_{12} &= p_b.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Аналогично для изотопического спина

$$
\begin{aligned}
T_1 \equiv T_{23} &= -\sin\Phi\, p_\Theta + (\cos\Phi/\sin\Theta)(p_\Psi - \cos\Theta\, p_\Phi) =\\
&= -p_\Theta^\dagger \sin\Phi + (p_\Psi - p_\Phi \cos\Theta)(\cos\Phi/\sin\Theta),\\
T_2 \equiv T_{31} &= \cos\Phi\, p_\Theta + (\sin\Phi/\sin\Theta)(p_\Psi - \cos\Theta\, p_\Phi) =\\
&= p_\Theta^\dagger \cos\Phi + (p_\Psi - p_\Phi \cos\Theta)(\sin\Phi/\sin\Theta),\\
T_3 \equiv T_{12} &= p_\Phi.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Для компонент L^{rs} и T^{rs} находим

$$
\begin{aligned}
L^1 \equiv L^{23} &= \sin\psi\, p_\theta + (\cos\psi/\sin\theta)(\cos\theta\, p_\psi - p_\varphi) =\\
&= p_\theta^\dagger \sin\psi + (p_\psi \cos\theta - p_\varphi)(\cos\psi/\sin\theta),\\
L^2 \equiv L^{31} &= \cos\psi\, p_\theta - (\sin\psi/\sin\theta)(\cos\theta\, p_\psi - p_\varphi) =\\
&= p_\theta^\dagger \cos\psi - (p_\varphi \cos\theta - p_\psi)(\sin\psi/\sin\theta),\\
L^3 \equiv L^{12} &= p_\psi,
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
T^1 \equiv T^{23} &= \sin\Psi p_\Theta + (\cos\Psi/\sin\Theta)(\cos\Theta p_\Psi - p_\Psi) =\\
&= p_\Theta^\dagger \sin\Psi + (p_\Psi \cos\Theta - p_\Phi)(\cos\Psi/\sin\Theta),\\
T^2 \equiv T^{31} &= \cos\Psi\, p_\Theta - (\sin\Psi/\sin\Theta)(\cos\Theta\, p_\Psi - p_\Phi) =\\
&= p_\Theta^\dagger \cos\Psi - (p_\Psi \cos\Theta - p_\Phi)(\sin\Psi/\sin\Theta),\\
T^3 \equiv T^{12} &= p_\Psi.
\end{aligned} \tag{8}
$$

И аналогично для компонент $L^{\alpha\beta}$, которые запишем как $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, $L^{(3)}$ или $L^{(23)}$, $L^{(31)}$, $L^{(12)}$, чтобы отличать их от L^{rs}:

$$\begin{aligned} L^{(1)} &\equiv L^{(23)} = \sin c p_a + (\cos c/\sin a)(\cos a p_c - p_b) = \\ &= p_a^\dagger \sin c + (p_c \cos a - p_b)(\cos c/\sin a), \\ L^{(2)} &\equiv L^{(31)} = \cos c\, p_a - (\sin c/\sin a)(\cos a p_c - p_b) = \\ &= p_a^\dagger \cos c - (p_c \cos a - p_b)(\sin c/\sin a), \\ L^{(3)} &\equiv L^{(12)} = p_c. \end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что все компоненты L^{rs}, T^{rs}, $L^{\alpha\beta}$ оказываются эрмитовыми. Для полного квадрата L и T получаем:

$$L^2 = p_\theta^\dagger p_\theta + \frac{(p_\psi - \cos\theta\, p_\varphi)^2}{\sin^2\theta} + p_\varphi^2 = p_\theta^\dagger p_\theta + \frac{(\cos\theta\, p_\psi - p_\varphi)^2}{\sin^2\theta} + p_\psi^2, \tag{10}$$

$$T^2 = p_\Theta^\dagger p_\Theta + \frac{(p_\Psi - \cos\Theta\, p_\Phi)^2}{\sin^2\Theta} + p_\Phi^2 = p_\Theta^\dagger p_\Theta + \frac{(\cos\Theta_p \Psi - p_\Phi)^2}{\sin^2\Theta} + p_\Psi^2, \tag{11}$$

а также

$$L^2 = p_a^\dagger p_a + \frac{(p_c - \cos a p_b)^2}{\sin^2 a} + p_b^2 = p_a^\dagger p_a + \frac{(\cos a p_c - p_b)^2}{\sin^2 a} + p_c^2. \tag{12}$$

Выражения (7), (8) можно подставить в формулу (50) для

$$\sum_{\alpha,k} (\pi_{\alpha k}^0)^2.$$

Однако вследствие наличия членов, содержащих $Q_r - Q_s$, это выражение оказывается довольно сложным даже в приближении, в котором можно положить $Q_r + Q_s = 2D$. Аналогичное выражение (50в) в заряженной скалярной теории упрощается, так как в этом случае мы имеем просто $T^{12} = T_{12} = p_\Phi$. В приближении, в котором в последних двух членах можно положить $Q_1 + Q_2 = 2D$, $Q_r = D$, получаем

$$(\pi_1)^2 + (\pi_2)^2 = P_1^\dagger P_1 + P_2^\dagger P_2 + \frac{(p_c + p_\varphi)^2}{2(Q_1 - Q_2)^2} + \frac{(p_c - p_\varphi)^2}{8D^2} + \\ + \left\{\frac{(\cos a p_c - p_b)^2}{\sin^2 a} + p_a^\dagger p_a\right\} D^{-2}. \tag{13в}$$

2. *S-преобразование.* С помощью выражения (3) для $e_{\alpha k}$ S-преобразование, определенное соотношением (65а), получается просто, если положить [24]:

$$S = \exp\left(i\sigma_3 \frac{c}{2}\right) \exp\left(i\sigma_2 \frac{a}{2}\right) \exp\left(i\sigma_3 \frac{b}{2}\right),$$

$$S^{-1} = \exp\left(-i\sigma_3 \frac{b}{2}\right) \exp\left(-i\sigma_2 \frac{a}{2}\right) \exp\left(-i\sigma_3 \frac{c}{2}\right). \tag{14}$$

[24] См. *W. Pauli*. Helv. phys. acta, 1939, 12, 147 (русск. пер. см. с. 294.— *Ред.*), разд. 3, где рассмотрен частный случай.

Это можно также записать следующим образом:

$$S = \cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} - \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right) I +$$
$$+ i\sin\frac{a}{2}\left(-\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right)\sigma_1 +$$
$$+ i\sin\frac{a}{2}\left(\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right)\sigma_2 +$$
$$+ i\cos\frac{a}{2}\left(\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right)\sigma_3. \qquad (15)$$

Выражение для S^{-1} получается отсюда заменой i на $-i$. Легко находим:

$$Sp_aS^{-1} = p_a - \frac{1}{2}(\sigma_1\sin c + \sigma_2\cos c),$$
$$Sp_bS^{-1} = p_b - \frac{1}{2}(-\sigma_1\sin a\cos c + \sigma_2\sin a\sin c + \sigma_3\cos a), \qquad (16)$$
$$Sp_cS^{-1} = p_c - \frac{1}{2}\sigma_3.$$

Подставляя это в выражения (5) и (9) прил. 1, легко вычисляем уравнения (69), (69′) текста, а именно:

$$S\mathbf{L}S^{-1} = \mathbf{L} - \frac{1}{2}S\sigma S^{-1} = \mathbf{L} - \frac{1}{2}\sum_\alpha \sigma_\alpha \mathbf{e}_\alpha,$$
$$SL^{\alpha\beta}S^{-1} = L^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}.$$

О ТЕОРИИ СМЕШАННОГО ПСЕВДОСКАЛЯРНОГО И ВЕКТОРНОГО МЕЗОННОГО ПОЛЯ *

(Совместно с С. Кусака)

Исследуется в приближении сильной связи предложенная Швингером модификация теории ядерных сил Мёллера — Розенфельда, основанная на смешанном поле псевдоскалярных и векторных мезонов. Изобарное расщепление оказывается равным 1/3 своего значения в псевдоскалярной теории. Вычисляется энергия взаимодействия двух нуклонов; и в наиболее интересном случае симметричной теории для этой энергии получается такое же выражение, как в теории слабой связи, за исключением того, что векторы спина и изотопического спина заменяются на векторы $\mathbf{e}^{\alpha}$, введенные Паули и Данковым. Произведена классификация состояний системы из двух нуклонов; показано, что низшее состояние дейтрона является триплетным. Дана оценка значений констант, причем мы нашли, что можно подобрать такие значения константы связи и масс мезонов, чтобы энергия связи и квадрупольный момент дейтрона совпадали с экспериментальными и чтобы выполнялись условия, что источник мал (по сравнению с комптоновской длиной волны мезона) и влияние высших спиновых состояний на основное состояние является слабым. Однако для магнитного момента дейтрона теория дает только несколько процентов наблюдаемого значения, и, согласно этой теории, многозарядные ядра были бы нестабильными. Поэтому мы заключаем, что теория сильной связи, основанная на предположении о протяженном источнике, должна быть отвергнута в пользу теории слабой связи, основанной на предположении о точечном источнике, причем сингулярности его поля исключаются с помощью формализма вычитания.

I. ВВЕДЕНИЕ

Обычные теории ядерных сил, выводимых из мезонного поля одного типа, приводят, в приближении как слабой, так и сильной связи, к тензорным силам с неприемлемой сингулярностью типа r^{-3} при малых r, которую, следовательно, приходится обрезать на некотором произвольном радиусе. Мёллер и Розенфельд [1] показали, что сингулярность можно устранить, взяв смесь псевдоскалярного и векторного мезонных полей с одной и той же константой связи. Однако они приняли, что массы этих двух видов мезонов равны, и нашли, что в первом приближении тензорные силы исчезают. Швингер [2] указал затем, что можно сохранить тензорные силы с единственно приемлемой зависимостью r^{-1} при малых расстояниях, если

---

* *On the theory of a mixed pseudoscalar and vector meson field.* (With S. Kusaka).— Phys. Rev., 1943, 63, 400—416.

[1] *C. Møller, L. Rosenfeld.* Kgl. Danske vid. selskab. Mat.-fys. medd., 1940, 17.

[2] *J. Schwinger.* Phys. Rev., 1942, 61, 387A.

допустить разные массы мезонов, и что правильный знак квадрупольного момента получается в том случае, если большей массой обладает векторный мезон. Это согласуется с гипотезой о том, что векторный мезон крайне неустойчив и что он ответствен за β-распад ядра.

Можно показать, что введение векторного мезонного поля представляет собой всего лишь другой, значительно усложненный способ удаления недопустимых сингулярностей с помощью произвольной постоянной. Вводить новую частицу, конечно, нежелательно, но мы полагаем, что дальнейшие исследования в этом направлении оправдываются тем, что они могут стать первыми шагами на пути к более полной теории, в которой векторный мезон будет не новой самостоятельной частицей, а возбужденным состоянием псевдоскалярного мезона.

В этой работе мы исследуем теорию смешанных мезонов в приближении сильной связи. Вычисления изобарного расщепления в разд. II проводятся по методу, развитому для псевдоскалярного мезона Паули и Данковым[3]. Теория ядерных сил в приближении сильной связи была развита Сербером и Данковым [4], рассмотревшими заряженное скалярное и нейтральное псевдоскалярное мезонные поля, и вычисления в разд. III проводятся по их методу. Поэтому подробности вычислений в этих разделах не приводятся. Однако следует подчеркнуть, что мы, в противоположность Серберу и Данкову, не считаем нуклоны покоящимися и потому не обсуждаем малых осцилляций около минимума потенциальной энергии, происходящих при достаточно малых расстояниях между нуклонами. Результаты этих разделов применяются в разд. IV и V соответственно к дейтрону и тяжелым ядрам.

II. ИЗОБАРНОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ

Мы описываем псевдоскалярную часть вещественными величинами $\varphi^\alpha(x)$ и векторную часть величинами $\psi_i^\alpha(x)$, где нижний индекс i обозначает компоненты в обычном пространстве и принимает значения 1, 2, 3. Верхний индекс α в обоих случаях обозначает компоненты в пространстве изотопического спина. В симметричной теории он принимает три значения (1, 2, 3), в заряженной теории — два значения (1, 2), в нейтральной же теории — одно значение (3). В дальнейшем мы не ограничиваем значений α, так что результаты для теорий этих трех типов могут быть получены посредством соответствующего выбора возможных значений α. Однако мы будем рассматривать, кроме особо оговоренных случаев, наиболее интересную симметричную теорию. Гамильтониан поля и его взаимодействие с ну-

---

[3] *W. Pauli, S. M. Dancoff.* Phys. Rev., 1942, 62, 85. (Русск. пер. см. с. 424.— *Ред.*). В дальнейшем ссылки на эту работу обозначаются ПД.

[4] *R. Serber, S. M. Dancoff.* Phys. Rev., 1943, 63, 143. Ссылки на эту статью обозначаются СД. Мы выражаем благодарность этим авторам за ознакомление с их вычислениями до опубликования.

клоном имеют вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\int\{(\pi^{\alpha})^2 + (\nabla\varphi^{\alpha})^2 + \varkappa^2(\varphi^{\alpha})^2\}\,dV +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\alpha,i}\int\{(\omega_i^{\alpha})^2 + (\nabla\psi_i^{\alpha})^2 + \mu^2(\psi_i^{\alpha})^2\}\,dV -$$
$$- (4\pi)^{1/2}\sum_{\alpha,i,j}\int\left\{f\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial x_i}\sigma_i + \frac{g}{2}\left(\frac{\partial\psi_j^{\alpha}}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi_i^{\alpha}}{\partial x_j}\right)\sigma_{ij}\right\}\tau^{\alpha}U(x)\,dV. \quad (1)$$

Здесь π^{α} и ω_i^{α} — обобщенные импульсы, сопряженные соответственно φ^{α} и ψ_i^{α}; $\varkappa$ и μ — массы покоя псевдоскалярного и векторного мезонов (мы применяем естественную систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$); σ_i и τ^{α} — матрицы спина и изотопического спина, причем $\sigma_{ij} = -\sigma_{ji} = \sigma_k$, если индексы i, j, k образуют циклические перестановки чисел 1, 2, 3; f и g — константы связи для псевдоскалярного и векторного полей [5]. Пока мы не будем предполагать, что $f = g$. Функция источника для нуклона $U(x)$ предполагается сферически-симметричной и нормированной условием

$$\int U(x)dV = 1. \quad (2)$$

Она определяет радиус нуклона

$$\frac{1}{a} = \int\int\frac{U(x)\,U(x')}{R}\,dV dV', \quad (3)$$

где $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.

Как и в ПД, мы произведем расщепление поля на две части и напишем:

$$\varphi_i^{0\alpha} = -(4\pi)^{1/2}\int\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial x_i}U(x)\,dV = (4\pi)^{1/2}\int\varphi^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dV,$$
$$\psi_{ij}^{0\alpha} = (2\pi)^{1/2}\int\left(\frac{\partial\psi_j^{\alpha}}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi_i^{\alpha}}{\partial x_j}\right)U(x)\,dV = (2\pi)^{1/2}\int\left(\psi_i^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x_j} - \psi_j^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)dV, \quad (4)$$

$$\int\varphi'^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dV = 0,$$
$$\int\left(\psi_i'^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x_j} - \psi_j'^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)dV = 0. \quad (5)$$

Функции $\psi_{ij}^{0\alpha}$ антисимметричны относительно i и j, и мы будем иногда писать $\psi_{ij}^{0\alpha} \equiv \psi_k^{0\alpha}$ с циклической перестановкой i, j, k. Функция источника порождает потенциалы $X(x)$ и $Y(x)$ в соответствии с уравнениями:

$$(-\Delta + \varkappa^2)X = 4\pi U, \qquad (-\Delta + \mu^2)Y = 4\pi U, \quad (6)$$

[5] В этой статье мы сочли более удобным применять эти константы, имеющие размерность $\varkappa^{-1}$. Таким образом, наша константа f равна $g/\varkappa\sqrt{2}$, где g — константа связи для псевдоскалярного поля, применявшаяся в ПД.

так что

$$X(x) = \int U(x')(e^{-\varkappa R}/R)\,dV',$$
$$Y(x) = \int U(x')(e^{-\mu R}/R)\,dV', \tag{7}$$

где $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Введем определение

$$I\delta_{ij} = \int \frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}\,dV. \tag{8}$$

Предполагая, что $\varkappa a$ и $\mu a \ll 1$, имеем

$$\int \frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dV \cong \int \frac{\partial Y}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dV. \tag{9}$$

Это приближение приводит к некоторому формальному, хотя и несущественному упрощению, и мы будем использовать это обстоятельство. В соответствии с этим напишем:

$$\xi(x) = X(x)/I, \qquad \eta(x) = Y(x)/I. \tag{10}$$

Тогда

$$\int \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}\,dV = \int \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} = \delta_{ij}. \tag{11}$$

Таким образом, из (4) и (5) получаем:

$$\varphi^\alpha(x) = (4\pi)^{-1/2}\sum_i \varphi_i^{0\alpha}\frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} + \varphi'^\alpha(x),$$
$$\psi_i^\alpha(x) = (8\pi)^{-1/2}\sum_j \psi_{ij}^{0\alpha}\frac{\partial \eta(x)}{\partial x_j} + \psi_i'^\alpha(x). \tag{12}$$

Соответствующие разложения для импульсов имеют вид:

$$\pi_i^{0\alpha} = (4\pi)^{-1/2}\int \pi^\alpha\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\,dV,$$
$$\omega_{ij}^{0\alpha} = (8\pi)^{-1/2}\int\left(\omega_i^\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x_j} - \omega_j^\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right)dV, \tag{13}$$

где $\omega_{ij}^{0\alpha} \equiv -\omega_{ji}^{0\alpha} \equiv \omega_k^{0\alpha}$ (i, j, k = 1, 2, 3 — циклическая перестановка);

$$\int \pi'^\alpha\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\,dV = 0,$$
$$\int\left(\omega_i'^\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x_j} - \omega_j'^\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right)dV = 0; \tag{14}$$

$$N\delta_{ij} = 4\pi\int \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}\,dV; \tag{15}$$

$$\pi^\alpha(x) = (4\pi)^{1/2} \sum_i \pi_i^{0\alpha} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} + \pi'^\alpha(x),$$
$$\omega_i^\alpha(x) = (2\pi)^{1/2} \sum_j \omega_{ij}^{0\alpha} \frac{\partial U(x)}{\partial x_j} + \omega_i'^\alpha(x). \tag{16}$$

Перестановочные соотношения будут:

$$i\,[\pi_i^{0\alpha}, \varphi_j^{0\beta}] = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij},$$
$$i\,[\omega_{ij}^{0\alpha}, \psi_{kl}^{0\beta}] = \delta_{\alpha\beta}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{17}$$

Гамильтониан (1) приобретает вид

$$H = \frac{N}{2} \sum_{\alpha, i} [(\pi_i^{0\alpha})^2 + (\omega_i^{0\alpha})^2] + \frac{1}{2I} \sum_{\alpha, i} [(\varphi_i^{0\alpha})^2 + (\psi_i^{0\alpha})^2] +$$
$$+ \sum_{\alpha, i} (f\varphi_i^{0\alpha} + \sqrt{2}\, g\psi_i^{0\alpha})\, \sigma_i \tau^\alpha +$$
$$+ (4\pi)^{1/2} \sum_{\alpha, i, j} \left(\pi_i^{0\alpha} \int \pi'^\alpha \frac{\partial U}{\partial x_i} dV + \frac{\omega_{ij}^{0\alpha}}{\sqrt{2}} \int \omega_i'^\alpha \frac{\partial U}{\partial x_j} dV \right) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, i} \int [(\pi'^\alpha)^2 + (\omega_i'^\alpha)^2]\, dV +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, i} \int [\varphi'^\alpha(-\Delta + \varkappa^2)\, \varphi'^\alpha + \psi_i'^\alpha(-\Delta + \mu^2)\, \psi_i'^\alpha]\, dV. \tag{18}$$

Потенциальная энергия в нулевом состоянии E^0 равна

$$E^0 = \sum_{\alpha, i} \left\{ \frac{1}{2I} [(\varphi_i^{0\alpha})^2 + (\psi_i^{0\alpha})^2] + (f\varphi_i^{0\alpha} + \sqrt{2}\, g\psi_i^{0\alpha})\, \sigma_i \tau^\alpha \right\}. \tag{19}$$

Полный момент импульса поля и нуклона выражается формулой

$$L_{ij} = -\sum_\alpha \int \pi^\alpha \left(x_i \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \right) dV - \sum_{\alpha, k} \int \omega_k^\alpha \left(x_i \frac{\partial \psi_k^\alpha}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial \psi_k^\alpha}{\partial x_i} \right) dV +$$
$$+ \sum_\alpha \int (\psi_i^\alpha \omega_j^\alpha - \psi_j^\alpha \omega_i^\alpha)\, dV + \frac{1}{2} \sigma_{ij}. \tag{20}$$

Часть момента L_{ij}^0, обусловленная нулевым состоянием поля, имеет вид

$$L_{ij}^0 = \sum_\alpha (\varphi_i^{0\alpha} \pi_j^{0\alpha} - \varphi_j^{0\alpha} \pi_i^{0\alpha}) + \sum_{\alpha, k} (\psi_{ik}^{0\alpha} \omega_{jk}^{0\alpha} - \psi_{jk}^{0\alpha} \omega_{ik}^{0\alpha}),$$

или

$$L_{ij}^0 = \sum_\alpha (\varphi_i^{0\alpha} \pi_j^{0\alpha} - \varphi_j^{0\alpha} \pi_i^{0\alpha} + \psi_i^{0\alpha} \omega_j^{0\alpha} - \psi_j^{0\alpha} \omega_i^{0\alpha}). \tag{21}$$

Но E^0 принимает минимальное значение, когда

$$\varphi_i^{0\alpha} = fIe_i^\alpha, \qquad \psi_i^{0\alpha} = \sqrt{2}\, gIe_i^\alpha, \tag{22}$$

так что удобно ввести новые переменные, определенные ортогональным преобразованием

$$\begin{aligned} \Phi_i^{0\alpha} &= (f^2 + 2g^2)^{-1/2}(f\varphi_i^{0\alpha} + \sqrt{2}\, g\psi_i^{0\alpha}), \\ \Psi_i^{0\alpha} &= (f^2 + 2g^2)^{-1/2}(\sqrt{2}\, g\varphi_i^{0\alpha} - f\psi_i^{0\alpha}), \end{aligned} \tag{23}$$

имеющим обратное преобразование

$$\begin{aligned} \varphi_i^{0\alpha} &= (f^2 + 2g^2)^{-1/2}(f\Phi_i^{0\alpha} + \sqrt{2}\, g\, \Psi_i^{0\alpha}), \\ \psi_i^{0\alpha} &= (f^2 + 2g^2)^{-1/2}\, (\sqrt{2}\, g\Phi_i^{0\alpha} - f\Psi_i^{0\alpha}). \end{aligned} \tag{24}$$

Соответствующие формулы преобразования обобщенных импульсов имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi_i^{0\alpha} &= (f^2 + 2g^2)^{-1/2}(f\pi_i^{0\alpha} + \sqrt{2}\, g\omega_i^{0\alpha}), \\ \Omega_i^{0\alpha} &= (f^2 + 2g^2)^{-1/2}(\sqrt{2}\, g\pi_i^{0\alpha} - f\omega_i^{0\alpha}), \end{aligned} \tag{25}$$

а обратные преобразования

$$\begin{aligned} \pi_i^{0\alpha} &= (f^2 + 2g^2)^{-1/2}(f\Pi_i^{0\alpha} + \sqrt{2}\, g\Omega_i^{0\alpha}), \\ \omega_i^{0\alpha} &= (f^2 + 2g^2)^{-1/2}(\sqrt{2}\, g\Pi_i^{0\alpha} - f\Omega_i^{0\alpha}). \end{aligned} \tag{26}$$

Далее мы имеем

$$L_{ij}^0 = L_{ij}^{00} + L_{ij}^{01}, \tag{27}$$

где

$$L_{ij}^{00} = \sum_\alpha (\Phi_i^{0\alpha}\Pi_j^{0\alpha} - \Phi_j^{0\alpha}\Pi_i^{0\alpha}), \tag{28}$$

$$L_{ij}^{01} = \sum_\alpha (\Psi_i^{0\alpha}\Omega_j^{0\alpha} - \Psi_j^{0\alpha}\Omega_i^{0\alpha}). \tag{29}$$

Как и в ПД, напишем

$$\Phi_i^{0\alpha} = De_i^\alpha + \sum_\beta q^{\alpha\beta} e_i^\beta, \tag{30}$$

где $q^{\alpha\beta} \equiv q^{\beta\alpha}$; e_i^α — компоненты ортогональной матрицы, введенной в соотношениях (51), (51a) ПД, которые можно рассматривать как составляющие ортогональной системы трех единичных векторов; D в соответствии с (22) есть

$$D = (f^2 + 2g^2)^{1/2} I \tag{31}$$

и

$$\Pi_i^{0\alpha} = \sum_\beta [p^{\alpha\beta} + (1/2D)\, L^{00\alpha\beta}]\, e_i^\beta, \tag{32}$$

причем $p^{\alpha\beta} \equiv p^{\beta\alpha}$ и

$$L^{00\alpha\beta} = \sum_{i,j} e_i^\alpha e_j^\beta L_{ij}^{00} = -D \sum_i (e_i^\alpha \Pi_i^{0\beta} - e_i^\beta \Pi_i^{0\alpha}). \tag{33}$$

В формулах (32) и (33) члены высших порядков по $q^{\alpha\beta}/D$ отброшены [ср. ПД, соотношение (72)]. Величины $p^{\alpha\beta}$ и $q^{\alpha\beta}$ удовлетворяют перестановочному соотношению [ср. ПД, соотношение (57)]

$$i\,[p^{\alpha\beta}, q^{\gamma\delta}] = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}). \tag{34}$$

Подставляя эти новые переменные в формулу (18) и производя S-преобразование, мы приводим гамильтониан к виду

$$H = \frac{N}{4D^2}s^2 - \frac{3}{2}(f^2 + 2g^2)\,I + \frac{\pi^{1/2}f}{D\,(f^2+2g^2)^{1/2}} \sum_{\alpha,\beta,i} L^{00\alpha\beta} e_i^\beta \int \frac{\partial U}{\partial x_i}\pi'^{\alpha}\,dV +$$
$$+ \frac{\pi^{1/2}g}{D\,(f^2+2g^2)^{1/2}} \sum_{\alpha,\beta,i} L^{00\alpha\beta} \int [\nabla U \times \mathbf{e}^\beta]_i \omega_i'^{\alpha}\,dV +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\alpha,i} \int [(\pi_i'^{\alpha})^2 + (\omega_i'^{\alpha})^2]\,dV + \frac{1}{2I^2}\sum_{\alpha,\beta} (q^{\alpha\beta})^2, \tag{35}$$

где

$$s^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} (L^{00\alpha\beta})^2\ {}^{6}.$$

Здесь опущены члены, не влияющие на изобарное расщепление; в частности, это относится к членам, содержащим $\Psi_i^{0\alpha}$ и $\Omega_i^{0\alpha}$, которые описывают свободные мезоны. Перенося начало отсчета π'^{α} и $\omega_i'^{\alpha}$ по формулам:

$$\pi'^{\alpha} = \pi''^{\alpha} - \frac{\pi^{1/2}f}{D\,(f^2+2g^2)^{1/2}} \sum_{\beta,i} L^{00\alpha\beta} e_i^\beta \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{3\partial\xi/\partial x_i}{\int (\nabla\xi)^2\,dV}\right], \tag{36}$$

$$\omega_i'^{\alpha} = \omega_i''^{\alpha} + \frac{\pi^{1/2}g}{D\,(f^2+2g^2)^{1/2}} \sum_{\beta} L^{00\alpha\beta} \left[\mathbf{e}^\beta \times \left(\nabla U - \frac{3\nabla\xi}{\int (\nabla\xi)^2\,dV}\right)\right]_i, \tag{36'}$$

мы можем исключить члены, линейные относительно π'^{α} и $\omega_i'^{\alpha}$, а также члены порядка $1/D$, и в то же время сохранить соотношения ортогональности (14) [ср. ПД, соотношение (75)].

Окончательный результат для энергии изобара имеет вид

$$\frac{3}{4}\,\frac{s^2}{(f^2+2g^2)}\,\frac{4\pi}{\int (\nabla X)^2\,dV},$$

---

[6] Здесь мы пишем s вместо L в ПД, так как хотим пользоваться обычными спектроскопическими обозначениями при рассмотрении системы двух нуклонов в разд. IV.

а изобарное расщепление ΔE дается формулой

$$\Delta E = \frac{3}{4} \frac{\left[s(s+1) - \frac{3}{4}\right]}{(f^2 + 2g^2)} \frac{4\pi}{\int (\nabla X)^2 \, dV}. \qquad (37)$$

Но для малого источника (и $\varkappa a$, и $\mu a \ll 1$) [ср. ПД, уравнение (80а)]

$$\frac{4\pi}{\int (\nabla X)^2 \, dV} \cong \frac{1}{a},$$

откуда

$$\Delta E = \frac{3a}{4(f^2 + 2g^2)} \left[s(s+1) - \frac{3}{4}\right]. \qquad (38)$$

Мы получаем результат (80а) работы ПД для одного лишь псевдоскалярного мезонного поля, полагая $g = 0$ и $f = 1/\sqrt{2}\,\varkappa$. В случае чисто векторной теории мы полагаем $f = 0$ и находим, что ΔE составляет половину величины расщепления в псевдоскалярной теории (при той же константе связи). Для смеси Мёллера — Розенфельда мы полагаем $f = g$ и находим, что значение ΔE в этом случае составляет $^1/_3$ значения в псевдоскалярной теории.

III. ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ

А. Псевдоскалярная теория

Мы делаем упрощающее предположение, что размер источника a мал по сравнению как с $\varkappa^{-1}$, так и с расстоянием между двумя нуклонами $r = |\mathbf{x}_\mathrm{I} - \mathbf{x}_\mathrm{II}|$. Пусть $U_\mathrm{I}(x)$ и $U_\mathrm{II}(x)$ — функции источника для частиц I и II, нормированные условием

$$\int U_A(x) dV = 1 \quad \text{при} \quad A = \mathrm{I}, \mathrm{II}. \qquad (39)$$

Потенциалы $X_\mathrm{I}(x)$ и $X_\mathrm{II}(x)$, порождаемые этими функциями в соответствии с уравнениями

$$(-\Delta + \varkappa^2) X_A = 4\pi U_A \quad (A = \mathrm{I}, \mathrm{II}), \qquad (40)$$

даются выражением

$$X_A(x) = \int U_A(x') \frac{e^{-\varkappa R}}{R} dV', \qquad (41)$$

где $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Пусть также

$$I\delta_{ij} = \int \frac{\partial X_A}{\partial x_i} \frac{\partial U_A}{\partial x_j} dV \quad (A = \mathrm{I}, \mathrm{II}), \qquad (42)$$

$$J_{ij} = \int \frac{\partial X_A}{\partial x_i} \frac{\partial U_B}{\partial x_j} dV \quad (A, B = \mathrm{I}, \mathrm{II} \text{ и } A \neq B)$$

или

$$J_{ij} = -\iint U_{\rm I}(x)\, U_{\rm II}(x')\, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right) dV dV'. \qquad (43)$$

Очевидно, что $J_{ij} = J_{ji}$. Но интеграл I по порядку величины равен a^{-3} и J_{ij} для малых r имеет порядок r^{-3}, так что в дальнейшем всеми величинами второго и более высокого порядков по J_{ij}/I мы будем пренебрегать [7]. Более того, для J_{ij} можно взять значение, соответствующее точечным источникам [8], т. е.

$$J_{ij} = -\frac{\partial^2}{\partial x_{{\rm I}i} \partial x_{{\rm I}j}}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right), \qquad (44)$$

где $r = |\mathbf{x}_{\rm I} - \mathbf{x}_{\rm II}|$.

Чтобы получить энергию взаимодействия двух нуклонов, достаточно рассмотреть потенциальную энергию системы

$$E = \sum_{\alpha} \int \varphi^{\alpha} (-\Delta + \varkappa^2)\, \varphi^{\alpha} dV - (4\pi)^{1/2} \sum_{A,\alpha,i} \int \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x_i}\, \sigma_{Ai} \tau_A^{\alpha} U_A(x)\, dV, \qquad (45)$$

где по индексу A проводится суммирование от I до II. Как и в СД, равенство (71), произведем расщепление следующим образом:

$$\varphi^{\alpha}(x) = (4\pi)^{-1/2} f \sum_{A,i} \varphi_{Ai}^{0\alpha} \xi_{Ai}(x) + \varphi'^{\alpha}(x), \qquad (46)$$

где φ'^{α} удовлетворяет условию

$$\int \varphi'^{\alpha} \frac{\partial U_A}{\partial x_i} dV = 0 \quad \text{при} \quad A = {\rm I}, {\rm II}, \qquad (47)$$

а функции ξ_{Ai} покрывают линейное подпространство функций $\partial X_A/\partial x_i$ таким образом, что

$$\int \xi_{Ai} \frac{\partial U_B}{\partial x_j} dV = \delta_{AB} \delta_{ij}. \qquad (48)$$

Из этих соотношений получаем

$$\varphi_{Ai}^{0\alpha} = (4\pi)^{1/2} \int \varphi^{\alpha} \frac{\partial U}{\partial x_i} dV. \qquad (49)$$

Приведенные выше условия будут выполнены с точностью до членов

---

[7] Аналогичная ситуация имеет место для интеграла $\int (\partial X_{\rm I}/\partial x_i)(\partial X_{\rm II}/\partial x_j)\, dV$ по отношению к интегралу $\int (\partial X_{\rm I} \partial x_i)\, (\partial X_{\rm I}/\partial x_i)\, dV$; эти интегралы по порядку величины равны соответственно r^{-1} и a^{-1}. В СД показано, что благодаря этому обстоятельству пренебрежение зависимостью изобарного уровня оправдано до тех пор, пока второй интеграл остается много больше первого.

[8] Замена точечным источником в действительности не так проста и справедлива только для расстояний r, значительно бóльших a. Это было отмечено Оппенгеймером и Сербером.

порядка J_{ij}/I, если мы положим

$$\xi_{Ai} = \frac{1}{I}\frac{\partial X_A}{\partial x_i} - \frac{1}{I^2}\sum_j J_{ij}\frac{\partial X_B}{\partial x_j} \qquad (A, B = \mathrm{I}, \mathrm{II} \text{ и } A \neq B). \qquad (50)$$

В этих переменных потенциальная энергия (45) принимает вид

$$E = \sum_{A,\alpha,i,j}\left[\frac{1}{2I}(\varphi_{Ai}^{0\alpha})^2 - \frac{J_{ij}}{I^2}\varphi_{\mathrm{I}i}^{0\alpha}\varphi_{\mathrm{II}j}^{0\alpha}\right] + f\sum_{A,\alpha,i}\varphi_{Ai}^{0\alpha}\sigma_{Ai}\tau_A^{\alpha} + \\ + \sum_{\alpha}\int\varphi'^{\alpha}(-\Delta + \varkappa^2)\varphi'^{\alpha}\,dV. \qquad (51)$$

Принятое выше разложение φ^α оправдывается тем, что в формуле (51) не возникает перекрестных членов с $\varphi_{Ai}^{0\alpha}$ и φ'^{α}. Функции φ'^{α} описывают свободные мезоны и для наших целей могут быть опущены.

Для случая бесконечного расстояния между двумя нуклонами ($J_{ij} = 0$) наименьшее собственное значение энергии взаимодействия получается аналогично тому, как это делается при рассмотрении задачи с одним источником в работе ПД [ср. там соотношения (82), (64), (65), (67)]. Мы полагаем

$$\varphi_{Ai}^{0\alpha} = fIe_{Ai}^{\alpha}, \qquad (52)$$

где величины e_{Ai}^{α} удовлетворяют условиям:

$$\sum_\alpha e_{Ai}^{\alpha}e_{Aj}^{\alpha} = \delta_{ij}, \qquad \sum_i e_{Ai}^{\alpha}e_{Ai}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \qquad (A = \mathrm{I}, \mathrm{II}). \qquad (53)$$

Выбирая состояние, где

$$\sum_{\alpha, i}\sigma_{Ai}\tau_A^{\alpha}e_{Ai}^{\alpha} = -3 \qquad (A = \mathrm{I}, \mathrm{II}), \qquad (54)$$

мы получаем при $A = \mathrm{I}, \mathrm{II}$

$$\sigma_A'^{\alpha}\tau_A^{\alpha} = -1 \text{ для каждого значения } \alpha, \qquad (55)$$

причем

$$\sigma_A'^{\alpha} = \sum_i e_{Ai}^{\alpha}\sigma_{Ai} \qquad (56)$$

и

$$\sigma_A'^{\alpha}\tau_A^{\beta} + \sigma_A'^{\beta}\tau_A^{\alpha} = 0 \quad \text{для} \quad \alpha \neq \beta. \qquad (57)$$

Чтобы найти минимальное значение энергии E^0 с точностью до членов первого порядка по J_{ij}/I в отсутствие свободных мезонов, мы просто подставим (52) — (54) в формулу (51). В результате находим [9]

$$E^0 = -3f^2I - f^2\sum_{\alpha,i,j}J_{ij}e_{\mathrm{I}i}^{\alpha}e_{\mathrm{II}j}^{\alpha}. \qquad (58)$$

[9] Если бы мы взяли вместо (52) более общее выражение

$$\varphi_{Ai}^{0\alpha} = \sum_\beta(I\delta_{\alpha\beta} + q_A^{\alpha\beta})\,e_{Ai}^{\alpha},$$

то получили бы в выражении для E содержащие $q_A^{\alpha\beta}$ члены, которые имеют относительную величину порядка J_{ij}/I и потому дают поправки порядка $(J_{ij}/I)^2$ в E^0.

Опуская первый член, который дает собственную энергию, получаем для энергии взаимодействия выражение

$$E^0_{\mathrm{I\,II}} = -f^2 \sum_{\alpha,i,j} J_{ij} e^{\alpha}_{\mathrm{I}i} e^{\alpha}_{\mathrm{II}j}. \tag{59}$$

Подставляя для J_{ij} выражение (44), находим

$$E^0_{\mathrm{I\,II}} = f^2 \sum_{\alpha} (\mathbf{e}^{\alpha}_{\mathrm{I}} \cdot \nabla)(\mathbf{e}^{\alpha}_{\mathrm{II}} \cdot \nabla)(e^{-\varkappa r}/r), \tag{60}$$

или, выполняя дифференцирование,

$$E^0_{\mathrm{I\,II}} = \frac{f^2}{3}\left[\Gamma \frac{\varkappa^2}{r} e^{-\varkappa r} + \Lambda \frac{1}{r^3}(3 + 3\varkappa r + \varkappa^2 r^2) e^{-\varkappa r}\right], \tag{61}$$

где

$$\Gamma = \sum_{\alpha} (\mathbf{e}^{\alpha}_{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{e}^{\alpha}_{\mathrm{II}}),$$

$$\Lambda = \sum_{\alpha}\left[\frac{3}{r^2}(\mathbf{e}^{\alpha}_{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{e}^{\alpha}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{e}^{\alpha}_{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{e}^{\alpha}_{\mathrm{II}})\right], \tag{62}$$

причем $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathrm{I}} - \mathbf{x}_{\mathrm{II}}$.

Из вывода этих формул видно, что наша теория отличается от обычной теории возмущения в приближении слабой связи только заменой величин $\sigma_A \tau^{\alpha}_A$ на e^{α}_A ($A = \mathrm{I}, \mathrm{II}$).

Как было сказано в начале разд. II, симметричная теория получается, если считать, что индекс α принимает значения 1, 2, 3; заряженная теория — если α будет принимать значения 1,2; нейтральная теория — если α ограничить единственным значением 3.

Б. Смешанная теория

Так же как в разд. III, А, рассмотрим две функции источника, нормированные согласно равенству (39). Они порождают потенциалы в соответствии с уравнениями:

$$\begin{aligned}(-\Delta + \varkappa^2) X_A &= 4\pi U_A \\ (-\Delta + \mu^2) Y_A &= 4\pi U_A\end{aligned} \qquad (A = \mathrm{I}, \mathrm{II}), \tag{63}$$

отсюда

$$\begin{aligned}X_A(x) &= \int U_A(x') \frac{e^{-\varkappa R}}{R} dV' \\ Y_A(x) &= \int U_A(x') \frac{e^{-\mu R}}{R} dV'\end{aligned} \qquad (A = \mathrm{I}, \mathrm{II}). \tag{64}$$

Мы имеем:

$$I\delta_{ij}=\int\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial U_A}{\partial x_j}dV\cong\int\frac{\partial Y_A}{\partial x_i}\frac{\partial U_A}{\partial x_j}dV \qquad (A=\mathrm{I,II}); \tag{65}$$

$$J_{ij}=J_{ji}=\int\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial U_B}{\partial x_j}dV\simeq-\frac{\partial^2}{\partial x_{\mathrm{I}i}\partial x_{\mathrm{II}i}}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right)$$

$$\text{для } A,B=\mathrm{I,II} \text{ и } A\neq B; \tag{66}$$

$$K_{ij}=K_{ji}=\int\frac{\partial Y_A}{\partial x_i}\frac{\partial U_B}{\partial x_j}dV\simeq-\frac{\partial^2}{\partial x_{\mathrm{I}i}\partial x_{\mathrm{I}j}}\left(\frac{e^{-\mu r}}{r}\right).$$

Потенциальная энергия системы задается выражением

$$E=\sum_{\alpha,i}\int[\varphi^\alpha(-\Delta+\varkappa^2)\varphi^\alpha+\psi_i^\alpha(-\Delta+\mu^2)\psi_i^\alpha]\,dV-$$

$$-(4\pi)^{1/2}f\sum_{A,\alpha,i,j}\int\left[\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i}\sigma_{Ai}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_j^\alpha}{\partial x_i}-\frac{\partial\psi_i^\alpha}{\partial x_j}\right)\sigma_{Aij}\right]\tau_A^\alpha U_A dV, \tag{67}$$

причем здесь мы предположили равенство констант связи.

Как и прежде, разложим поле следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi^\alpha(x)&=(4\pi)^{-1/2}\sum_{A,i}\varphi_{Ai}^{0\alpha}\xi_{Ai}(x)+\varphi'^\alpha(x),\\ \psi_i^\alpha(x)&=(8\pi)^{-1/2}\sum_{A,j}\psi_{Aij}^{0\alpha}\eta_{Aj}(x)+\psi_i'^\alpha(x),\end{aligned} \tag{68}$$

с условиями ортогональности:

$$\begin{aligned}\int\varphi'^\alpha\frac{\partial U_A}{\partial x_i}dV&=0,\\ \int\psi_i'^\alpha\frac{\partial U_A}{\partial x_j}dV&=0\end{aligned} \qquad (A=\mathrm{I,II}) \tag{69}$$

и

$$\begin{aligned}\int\xi_{Ai}\frac{\partial U_B}{\partial x_j}dV&=\delta_{AB}\delta_{ij},\\ \int\eta_{Ai}\frac{\partial U_B}{\partial x_j}dV&=\delta_{AB}\delta_{ij}.\end{aligned} \tag{70}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\varphi_{Ai}^{0\alpha}&=(4\pi)^{1/2}\int\varphi^\alpha\frac{\partial U_A}{\partial x_i}dV\\ \psi_{Aij}^{0\alpha}&=(8\pi)^{1/2}\int\psi_i^\alpha\frac{\partial U_A}{\partial x_j}dV\end{aligned} \qquad (A=\mathrm{I,II}); \tag{71}$$

здесь мы еще не предполагали антисимметричность $\psi^{0\alpha}_{Aij}$ по i и j. Приведенные выше условия выполняются вплоть до членов, линейных по J_{ij}/I и K_{ij}/I, если положить

$$\xi_{Ai} = \frac{1}{I}\frac{\partial X_A}{\partial x_i} - \frac{1}{I^2}\sum_j J_{ij}\frac{\partial X_B}{\partial x_j} \quad \text{для } A, B = \text{I}, \text{II} \text{ и } A \neq B,$$
$$\eta_{Ai} = \frac{1}{I}\frac{\partial Y_A}{\partial x_i} - \frac{1}{I^2}\sum_j K_{ij}\frac{\partial Y_A}{\partial x_j}. \qquad (72)$$

Потенциальная энергия приобретает вид

$$E = \frac{1}{7I}\sum_{A,\alpha,i,j}\left[(\varphi^{0\alpha}_{Ai})^2 + \frac{1}{2}(\psi^{0\alpha}_{Aij})^2\right] -$$
$$- \frac{1}{I^2}\sum_{\alpha,i,j,k}\left(J_{ij}\varphi^{0\alpha}_{\text{I}i}\varphi^{0\alpha}_{\text{II}j} + \frac{1}{2}K_{ij}\psi^{0\alpha}_{\text{I}ik}\psi^{0\alpha}_{\text{II}jk}\right) -$$
$$- f\sum_{A,\alpha,i,j}\left(\sigma_{Ai}\tau^{\alpha}_{A}\varphi^{0\alpha}_{Ai} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_{Aij}\tau^{\alpha}_{A}\psi^{0\alpha}_{Aij}\right) +$$
$$+ \sum_{\alpha,i}\int\left[\varphi'^{\alpha}(-\Delta + \varkappa^2)\varphi'^{\alpha} + \psi'^{\alpha}_i(-\Delta + \mu^2)\psi'^{\alpha}_i\right]dV. \qquad (73)$$

Чтобы найти минимальное значение E с точностью до членов первого порядка по J_{ij}/I и K_{ij}/I, достаточно положить

$$\varphi^{0\alpha}_{Ai} = fIe^{\alpha}_{Ai} \text{ для } A = \text{I}, \text{II} \text{ и с циклической перестановкой } j, j, k, \qquad (74)$$
$$\psi^{0\alpha}_{Aij} = -\psi^{0\alpha}_{Aji} \equiv \psi^{0\alpha}_{Ak} = \sqrt{2}fIe^{\alpha}_{Ak},$$
$$\frac{1}{2}\sum_i(\sigma_{Ai}\tau^{\alpha}_{A}e^{\beta}_{Ai} + \sigma_{Ai}\tau^{\beta}_{A}e^{\alpha}_{Ai}) = \delta_{\alpha\beta} \qquad (A = \text{I}, \text{II}). \qquad (75)$$

Энергия взаимодействия оказывается равной

$$E^0_{\text{I II}} = -f^2\sum_{\alpha,i,j}\left[(J_{ij} - K_{ij})e^{\alpha}_{\text{I}i}e^{\alpha}_{\text{II}j} - K_{ii}e^{\alpha}_{\text{I}j}e^{\alpha}_{\text{II}j}\right]. \qquad (76)$$

Подставляя выражения (66) для J_{ij}, K_{ij}, получаем в случае точечного источника

$$E^0_{\text{I II}} = f^2\sum_{\alpha}\left[(\mathbf{e}^{\alpha}_{\text{I}}\cdot\nabla)(\mathbf{e}^{\alpha}_{\text{II}}\cdot\nabla)\left(\frac{e^{-\varkappa r} - e^{-\mu r}}{r}\right) + (\mathbf{e}^{\alpha}_{\text{I}}\cdot\mathbf{e}^{\alpha}_{\text{II}})\Delta\left(\frac{e^{-\mu r}}{r}\right)\right]. \qquad (77)$$

Вычисление дифференциальных операторов дает

$$E^0_{\text{I II}} = \frac{1}{3}[\Gamma J(r) + \Lambda K(r)], \qquad (78)$$

где Γ и Λ определены формулами (62), а радиальные функции имеют вид:

$$J(r) = \frac{f^2}{r}(\varkappa^2 e^{-\varkappa r} + 2\mu^2 e^{-\mu r}),$$
$$K(r) = \frac{f^2}{r^3}\left[(3 + 3\varkappa r + \varkappa^2 r^2)e^{-\varkappa r} - (3 + 3\mu r + \mu^2 r^2)e^{-\mu r}\right]. \qquad (79)$$

Следует отметить, что при малых r и J и K ведут себя как r^{-1} и что $K(r) = 0$ для $\varkappa = \mu$ в согласии с результатами Мёллера и Розенфельда в теории слабой связи.

Замечания, сделанные в конце разд. III, А, справедливы и теперь; именно, придавая α значения 1, 2, 3; 1, 2 или 3, мы получаем соответственно симметричную, заряженную или нейтральную теории.

IV. ДЕЙТРОН

А. Классификация состояний

Стационарные состояния однонуклонной системы в симметричной теории полностью описываются числами s, m и n, которые являются собственными значениями следующих операторов [10]:

$$\mathbf{s}^2 = \mathbf{t}^2 = s(s+1), \qquad s_3 = m, \qquad t^3 = n, \tag{80}$$

где s — положительное полуцелое число, а m и n — такие полуцелые числа, что $-s \leqslant m, n \leqslant s$. Следует отметить здесь полную симметрию между спином и изотопическим спином.

Для системы из двух нуклонов гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{M}\left(p_r^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{r^2}\right) + \frac{a}{4f^2}\left(\mathbf{s}_{\mathrm{I}}^2 + \mathbf{s}_{\mathrm{II}}^2 - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3}\left[\Gamma J(r) + \Lambda K(r)\right]. \tag{81}$$

Первая часть описывает кинетическую энергию относительного движения [11], вторая — энергию изобара и третья — энергию взаимодействия. Движение центра тяжести системы не рассматривается, и гамильтониан, конечно, записан в нерелятивистской форме.

Рассмотрим сначала состояния с нулевым орбитальным моментом ($\mathbf{L} = 0$); для них все еще существует полная симметрия между спином и изотопическим спином, как и в однонуклонной системе. Операторы спина $\mathrm{S} = \mathrm{s}_{\mathrm{I}} + \mathrm{s}_{\mathrm{II}}$ и изотопического спина $\mathbf{T} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_{\mathrm{II}}$ здесь являются все еще постоянными, но не обязательно равными по величине. Поэтому стационарные состояния можно описывать собственными значениями S, T, M и N следующих операторов:

$$\mathrm{S}^2 = S(S+1), \qquad \mathbf{T}^2 = T(T+1), \; S_3 = M, \qquad T^3 = N, \tag{82}$$

причем S и T — положительные целые числа или нули, так что $|s_{\mathrm{I}} - s_{\mathrm{II}}| \leqslant S, T \leqslant (s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}})$, а M и N — целые числа или нули, удовлетворяющие

---

[10] Ср. ПД. Мы используем обозначения s вместо j для собственного значения спина. Для оператора спина мы ввели обозначение s вместо L, как уже говорилось в прим. 6, а для оператора изотопического спина — t вместо T.

[11] Мы отождествляем M с разностью между эмпирической массой нуклона и той частью массы, которая создается мезонным полем. Ю. Швингер указал одному из нас на то, что в нейтральных теориях последняя будет тензором относительно направления $\mathbf{e}^3$. Однако в симметричной теории полевая масса будет скаляром.

условиям $-S \leqslant M \leqslant S$ и $-T \leqslant N \leqslant T$. Если же орбитальный момент $\mathbf{L}$ не равен нулю, то спиновый момент S уже не будет постоянным и его следует заменить оператором полного момента $\mathbf{J}$, определяемым формулой

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathrm{S}, \tag{83}$$

а собственные значения S и M — соответственно собственными значениями J и J_M, где

$$\mathbf{J}^2 = J\,(J+1), \quad J_M = L_M + M. \tag{84}$$

Кроме того, здесь существует квантовое число четности — собственное значение оператора пространственного отражения. Гамильтониан (81) инвариантен также относительно произвольного вращения в пространстве изотопического спина. Это вращение не изменяет s_{Ai} и преобразует t_A^α и e_{Ai}^α (для каждого i) одинаковым образом. В частности, полезно рассматривать вращение, изменяющее знак третьей компоненты, например вращение вокруг первой оси на 180°, которое ведет к преобразованиям:

$$\begin{aligned} &t_A^1 \to t_A^1, \quad t_A^2 \to -t_A^2, \quad t_A^3 \to -t_A^3, \\ &\mathbf{e}_A^1 \to \mathbf{e}_A^1, \quad \mathbf{e}_A^2 \to -\mathbf{e}_A^2, \quad \mathbf{e}_A^3 \to -\mathbf{e}_A^3. \end{aligned} \tag{85}$$

[Заметим, что это преобразование сохраняет перестановочные соотношения для e_i^α, приведенные в формулах (135) приложения.] Преобразование (85) приводит к умножению спиновой функции на фазовый множитель $e^{iN\cdot\mathrm{const}}$ и изменению знаков n_{I}, n_{II} и N. Поэтому оператор имеет вырожденные по энергии возбужденные спиновые состояния, различающиеся только знаком N. В частности, для случая $N = 0$, т. е. для дейтрона, фазовый множитель равен единице, и преобразование не изменяет состояния, к которому относится спиновая функция. Следовательно, этот оператор обладает еще одним квантовым числом, которым является сигнатура спиновой функции при подстановке $n_{\mathrm{I}} \to -n_{\mathrm{I}}$, $n_{\mathrm{II}} \to -n_{\mathrm{II}}$.

С помощью этих квантовых чисел полную волновую функцию системы в стационарном состоянии можно записать в виде

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi; J, T, J_M, N) = \sum_{\substack{L, S \\ L_M + M = J_M}} c^J_{L_M M} \frac{u_{L,S}(r)}{r} Y_L^{L_M}(\vartheta, \varphi)\, \Xi\,(S, T, M, N). \tag{86}$$

Здесь введены обозначения: $c^J_{L_M M}$ — нормированные коэффициенты ряда Клебша — Гордана; $u_{L,S}(r)$ — радиальные функции, которые мы нормируем для связанных состояний, где это возможно, согласно условию

$$\sum_{L,S} \int_0^\infty \bar{u}_{L,S}(r)\, u_{L,S}(r)\, dr = 1. \tag{87}$$

Далее, функции $Y_L^{L_M}(\vartheta, \varphi)$ — нормированные сферические гармоники, а $\Xi\,(S, T, M, N)$ — спиновые функции, одновременно отвечающие изото-

пическому спину (в дальнейшем мы будем называть их просто спиновыми функциями, если это не будет приводить к путанице). Разумеется, числа L и S не определяют радиальных функций единственным образом, так как существует еще радиальное квантовое число; но в этой работе мы рассматриваем лишь радиальные функции, соответствующие низшему уровню энергии. Согласно принципу запрета мы полагаем, что функция Ψ антисимметрична относительно перестановки частиц I и II. Тогда, поскольку перестановка пространственных координат приводит к появлению множителя $(-1)^L$, спиновая функция Ξ в зависимости от того, четное число L или нечетное, должна быть соответственно симметричной или антисимметричной относительно перестановки частиц I и II. Далее, поскольку квантовое число четности равно $(-1)^L$, всякое состояние описывается сферическими гармониками только четного или только нечетного порядка.

Для того чтобы найти собственные значения операторов Γ и Λ, необходимо вычислить матричные элементы e_i^α в представлении (s, m, n) и выразить спиновую функцию $\Xi(S, T, M, N)$ через однонуклонные спиновые функции $\xi_{\mathrm{I}}(s_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{I}})$ и $\xi_{\mathrm{II}}(s_{\mathrm{II}}, m_{\mathrm{II}}, n_{\mathrm{II}})$. Вычисление матричных элементов e_i^α приводится в приложении. Выражение для функции $\Xi(S, T, M, N)$ через $\xi_{\mathrm{I}}(s_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{I}})$ и $\xi_{\mathrm{II}}(s_{\mathrm{II}}, m_{\mathrm{II}}, n_{\mathrm{II}})$ получается с помощью рядов Клебша — Гордана. В действительности эти функции можно представить в виде произведения спиновой функции и функции изотопического спина:

$$\Xi(S, T, M, N) = \mathrm{X}(S, M)\,\mathrm{Z}(T, N), \tag{88}$$

$$\xi_A(s_A, m_A, n_A) = \chi_A(s_A, m_A)\,\zeta_A(s_A, n_A) \quad \text{для} \quad A = \mathrm{I}, \mathrm{II}; \tag{89}$$

$$\begin{aligned} X(S, M) &= \sum_{\substack{s_{\mathrm{I}}, s_{\mathrm{II}} \\ m_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}} = M}} c^{s}_{m_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{II}}} [\chi_{\mathrm{I}}(s_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}})\,\chi_{\mathrm{II}}(s_{\mathrm{II}}, m_{\mathrm{II}}) \pm \chi_{\mathrm{II}}(s_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}})\,\chi_{\mathrm{I}}(s_{\mathrm{II}}, m_{\mathrm{II}})], \\ Z(T, N) &= \sum_{\substack{s_{\mathrm{I}}, s_{\mathrm{II}} \\ n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} = N}} c^{T}_{n_{\mathrm{I}} n_{\mathrm{II}}} [\zeta_{\mathrm{I}}(s_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{I}})\,\zeta_{\mathrm{II}}(s_{\mathrm{II}}, n_{\mathrm{II}}) \pm \zeta_{\mathrm{II}}(s_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{I}})\,\zeta_{\mathrm{I}}(s_{\mathrm{II}}, n_{\mathrm{II}})]. \end{aligned} \tag{90}$$

Симметризация этих выражений относительно частиц I и II необходима по причинам, изложенным выше. Однако, поскольку Γ и Λ имеют матричные элементы, связывающие состояния с собственными значениями s_{I} и s_{II}, отличающимися на единицу, числа s_{I} и s_{II} не являются константами движения, и потому суммы (90) в действительности представляют собой бесконечные ряды, так что вычисление собственных значений Γ и Λ оказывается очень сложным.

Поэтому мы делаем следующее приближение: заменим Γ и Λ их частями Γ_0 и Λ_0, диагональными относительно s_{I} и s_{II}. В пределе бесконечно большой энергии изобара это приближение является, конечно, строгим. Для основного состояния дейтрона мы покажем, рассматривая недиагональные части Γ_{I} и Λ_{I} операторов Γ и Λ, что даже при не слишком большой энергии изобара влияние возмущающих членов мало́. Это оправдыва-

ет наше приближение, по крайней мере для основного состояния дейтрона, которым мы интересуемся.

В невозмущенной системе s_{I} и s_{II} также являются квантовыми числами, и потому, объединяя (88), (89) и (90), мы получаем здесь для спиновых функций выражение

$$\Xi(s_{\mathrm{I}}, s_{\mathrm{II}}; S, T, M, N) = \sum_{\substack{m_{\mathrm{I}}+m_{\mathrm{II}}=M \\ n_{\mathrm{I}}+n_{\mathrm{II}}=M}} c^{S}_{m_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{II}}} c^{T}_{n_{\mathrm{I}} n_{\mathrm{II}}} \times$$
$$\times [\xi_{\mathrm{I}}(s_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{I}})\, \xi_{\mathrm{II}}(s_{\mathrm{II}}, m_{\mathrm{II}}, n_{\mathrm{II}}) \pm \xi_{\mathrm{II}}(s_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{I}})\, \xi_{\mathrm{I}}(s_{\mathrm{II}}, m_{\mathrm{II}}, n_{\mathrm{II}})]. \quad (91)$$

Отсюда легко видеть, что эти спиновые функции являются собственными функциями оператора (85), отвечающими собственным значениям $(-1)^{s_{\mathrm{I}}+s_{\mathrm{II}}-T}$. Необходимо только воспользоваться следующим свойством коэффициентов Клебша — Гордана:

$$c^{T}_{n_{\mathrm{I}} n_{\mathrm{II}}} = (-1)^{s_{\mathrm{I}}+s_{\mathrm{II}}-T} c^{T}_{-n_{\mathrm{I}}-n_{\mathrm{II}}}, \quad (92)$$

и вспомнить, что применение оператора (85) к спиновым функциям (91) для дейтрона приводит просто к замене n_{I} и n_{II} соответственно на $-n_{\mathrm{I}}$ и $-n_{\mathrm{II}}$.

Таким образом, спиновые функции (91) являются собственными функциями оператора Γ_0, а собственные значения его можно найти простым вычислением с помощью матричных элементов e_i^{α}. Эти матричные элементы определяются общей формулой

$$\Gamma_0 = \frac{[S(S+1) - s_{\mathrm{I}}(s_{\mathrm{I}}+1) - s_{\mathrm{II}}(s_{\mathrm{II}}+1)]\,[T(T+1) - s_{\mathrm{I}}(s_{\mathrm{I}}+1) - s_{\mathrm{II}}(s_{\mathrm{II}}+1)]}{4 s_{\mathrm{I}}(s_{\mathrm{I}}+1)\, s_{\mathrm{II}}(s_{\mathrm{II}}+1)}. \quad (93)$$

Следовательно, если s есть меньшее, а t большее из двух чисел s_{I} и s_{II}, то мы имеем

$$-\frac{s}{s+1} \leqslant \Gamma_0 \leqslant \frac{s(t+1)}{(s+1)t}, \quad (94)$$

так что для больших s_{I} и s_{II} значение Γ_0 лежит между -1 и $+1$. К тому же значение Γ_0 отрицательно, если одно из квантовых чисел — S или T — близко к максимальному значению $s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}}$, другое же при этом близко к минимальному значению $|s_{\mathrm{I}} - s_{\mathrm{II}}|$, тогда как Γ_0 положительно при условии, что оба квантовых числа — S и T — близки к своим максимальным или минимальным значениям. Этот результат весьма важен, так как главная часть энергии взаимодействия равна $\frac{1}{3}\Gamma_0 J(r)$ и в общем случае от знака Γ_0 зависит, будет взаимодействие носить характер притяжения или же отталкивания. Поскольку оператор Λ_0 содержит, помимо операторов e^{α}_{Ai}, еще и угловые координаты, вычисление его собственных значений в общем случае оказывается слишком сложным, и эти собственные значе-

Классификация состояний дейтрона

s_{I}	s_{II}	S	T	(I, II)	$(n \to -n)$	Γ_0
$1/2$	$1/2$	0	0	$+$	$-$	$+1$
$1/2$	$1/2$	0	1	$-$	$+$	$-1/3$
$1/2$	$1/2$	1	0	$-$	$-$	$-1/3$
$1/2$	$1/2$	1	1	$+$	$+$	$+1/9$
$3/2$	$1/2$	1	1	$+, -$	$-$	$+5/9$
$3/2$	$1/2$	1	2	$+, -$	$+$	$-1/3$
$3/2$	$1/2$	2	1	$+, -$	$-$	$-1/3$
$3/2$	$1/2$	2	2	$+, -$	$+$	$+1/5$
$3/2$	$3/2$	0	0	$+$	$-$	$+1$
$3/2$	$3/2$	0	1	$-$	$+$	$+11/15$
$3/2$	$3/2$	0	2	$+$	$-$	$+2/5$
$3/2$	$3/2$	0	3	$-$	$+$	$-3/5$
$3/2$	$3/2$	1	0	$-$	$-$	$+11/15$
$3/2$	$3/2$	1	1	$+$	$+$	$+121/225$
$3/2$	$3/2$	1	2	$-$	$-$	$+11/75$
$3/2$	$3/2$	1	3	$+$	$+$	$-11/25$
$3/2$	$3/2$	2	0	$+$	$-$	$+2/5$
$3/2$	$3/2$	2	1	$-$	$+$	$+11/75$
$3/2$	$3/2$	2	2	$+$	$-$	$+1/25$
$3/2$	$3/2$	2	3	$-$	$+$	$-3/25$
$3/2$	$3/2$	3	0	$-$	$-$	$-3/5$
$3/2$	$3/2$	3	1	$+$	$+$	$-11/25$
$3/2$	$3/2$	3	2	$-$	$-$	$-3/25$
$3/2$	$3/2$	3	3	$+$	$+$	$+9/25$

ния вычисляются только для некоторых состояний, рассматриваемых в разд. IV, Б.

Несколько первых состояний дейтрона классифицируются по их квантовым числам в таблице. В столбце (I, II) указывается симметрия спиновой функции относительно перестановки частиц I и II. При $s_{\text{I}} \neq s_{\text{II}}$ для каждых значений S и T могут существовать как симметричные, так и антисимметричные функции; но при $s_{\text{I}} = s_{\text{II}}$ для данных значений S и T возможна только симметричная или антисимметричная функция в зависимости от того, будет сумма $(S + T)$ соответственно четной или нечетной. В столбце $(n \to -n)$ дается сигнатура спиновых функций относительно операции (85). Как указывалось выше, она положительна или отрицательна в зависимости от того, четно или нечетно выражение $(s_{\text{I}} + s_{\text{II}} - T)$. В последнем столбце приводятся собственные значения оператора Γ_0.

Б. Основное состояние

Для низшего состояния невозмущенной системы $s_{\mathrm{I}} = s_{\mathrm{II}} = {}^1/_2$, и чтобы пространственная часть волновой функции содержала главным образом S-волну ($L = 0$), мы должны брать антисимметричные (относительно перестановки частиц) спиновые функции. В таблице мы видим, что как для синглетного ($S = 0$), так и для триплетного ($S = 1$) состояний $\Gamma_0 = -{}^1/_3$. Таким образом, эти состояния являются, очевидно, связанными. Но для синглетного состояния тензорное взаимодействие, определяемое оператором Λ_0, исчезает, и в дальнейшем мы покажем, что оно создает дополнительное потенциальное поле притяжения в триплетном состоянии. Следовательно, в согласии с экспериментом основное состояние является триплетным.

Для вычисления матричных элементов оператора Λ_0 мы используем матричные элементы оператора e_i^{α} и разложение Ξ в ряд (91) по ξ_{I} и ξ_{II}. В результате имеем [12]

$$\Lambda_0 \Xi_0 (1, 0, M) = -\frac{4(2\pi)^{1/2}}{3} \sum_{M'+M''=M} c^1_{M'M''} Y_2^{M'} \Xi_0 (1, 0, M''). \tag{95}$$

Теперь, используя спектроскопические обозначения состояний, т. е. вводя обозначение ${}^3S_{M^1}$ для триплетного S-состояния с $J = 1$ и $J_M = M$, ${}^3D_{M^1}$ для триплетного D-состояния и т. д. и применяя для спиновой и угловой частей волновой функции обозначения $\Sigma_0\,({}^3S_{M^1})$, $\Sigma_0\,({}^3D_{M^1})$ и т. д., имеем:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 ({}^3S_{M^1}) &= (4\pi)^{-1/2} \Xi_0 (1, 0, M), \\ \Sigma_0 ({}^3D_{M^1}) &= \sum_{M'+M'=M} c^1_{M'M''} Y_2^{M'} \Xi_0 (1, 0, M''). \end{aligned} \tag{96}$$

Объединяя (95) и (96), получаем:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 \Sigma_0 ({}^3S_{M^1}) &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Sigma_0 ({}^3D_{M^1}), \\ \Lambda_0 \Sigma_0 ({}^3D_{M^1}) &= \frac{2}{3} \Sigma_0 ({}^3D_{M^1}) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \Sigma_0 ({}^3S_{M^1}). \end{aligned} \tag{97}$$

Более высокие значения момента импульса в это состояние не входят, и мы имеем

$$\Psi_0 (r, \vartheta, \varphi; 1, 0, M) = \frac{u_0(r)}{r} \Sigma_0 ({}^3S_{M^1}) + \frac{v_0(r)}{r} \Sigma_0 ({}^3D_{M^1}). \tag{98}$$

[12] Вместо того чтобы писать значения спина s_{I} и s_{II}, как в формуле (91), мы теперь применяем нижние индексы 0, 1 и 2 для обозначения величин, относящихся соответственно к состояниям $s_{\mathrm{I}} = s_{\mathrm{II}} = 1/2$; $s_{\mathrm{I}} = 3/2$; $s_{\mathrm{II}} = 1/2$; $s_{\mathrm{I}} = s_{\mathrm{II}} = 3/2$. Мы также опускаем обозначение 0 для N, поскольку не рассматриваем состояний, в которых N отличается от нуля.

Подставляя это выражение в уравнение Шредингера

$$H\Psi = E\Psi \tag{99}$$

и используя для H выражение (81), получаем для $u_0(r)$ и $v_0(r)$ с учетом (97) систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{d^2u_0}{dr^2} + M\left[E_0 + \frac{1}{9}J(r)\right]u_0 = -\frac{2\sqrt{2}}{9}MK(r)v_0, \\ \frac{d^2v_0}{dr^2} - \frac{6v_0}{r^2} + M\left[E_0 + \frac{1}{9}J(r) - \frac{2}{9}K(r)\right]v_0 = -\frac{2\sqrt{2}}{9}MK(r)u_0. \end{gathered} \tag{100}$$

Отсюда видно, что тензорные силы создают дополнительный потенциал притяжения. Уравнения (100) должны решаться при условии нормировки

$$\int_0^\infty (u_0^2 + v_0^2)\,dr = 1 \tag{101}$$

с граничными условиями u_0, $v_0 = 0$ при $r = 0$ и $r = \infty$. Решение этих уравнений исследуется в разд. IV, B.

Сначала посмотрим, насколько хорошее приближение к истинной волновой функции основного состояния дает формула (98); иначе говоря, посмотрим, насколько оправдано наше допущение о том, что можно брать только диагональные относительно $s_{\rm I}$ и $s_{\rm II}$ части операторов Γ и Λ. Для этого вычислим матричные элементы возмущений Γ_1 и Λ_1, вносимых остальными состояниями в состояние, описываемое волновой функцией (98). Первое возбужденное спиновое состояние возникает, когда одна из частиц имеет спин $^3/_2$, в то время как вторая частица обладает невозбужденным значением спина $^1/_2$. Из таблицы следует, однако, что ни одно из этих состояний не имеет таких собственных значений, какими обладают состояния с $s_{\rm I} = s_{\rm II} = {}^1/_2$; а так как ни Γ_1, ни Λ_1 не изменяют этих квантовых чисел (за исключением $s_{\rm I}$ и $s_{\rm II}$), то матричные элементы операторов Γ_1 и Λ_1 для этих состояний обращаются в нуль.

Для второго возбужденного спинового состояния, $s_{\rm I} = s_{\rm II} = {}^3/_2$, только триплетный и септетный термы с $T = 0$ комбинируются с основным состоянием ($S = 1$, $T = 0$) (см. таблицу). Спин-угловые функции в этом состоянии имеют вид:

$$\begin{aligned} \Sigma_2(^3S_{M^1}) &= (4\pi)^{-1/2}\,\Xi_2(1, 0, M), \\ \Sigma_2(^3D_{M^1}) &= \sum_{M'+M''=M} c^1_{M'M''} Y_2^{M'} \Xi_2(1, 0, M''), \\ \Sigma_2(^7D_{M^1}) &= \sum_{M'+M''=M} c^1_{M'M''} Y_2^{M'} \Xi_2(3, 0, M''), \\ \Sigma_2(^7G_{M^1}) &= \sum_{M'+M''=M} c^1_{M'M''} Y_4^{M'} \Xi_2(3, 0, M''). \end{aligned} \tag{102}$$

При действии оператора Λ_0 на эти функции получаются следующие результаты:

$$\begin{aligned}
\Lambda_0\Sigma_2({}^3S_{M^1}) &= \frac{4\sqrt{7}}{25}\Sigma_2({}^7D_{M^1}) - \frac{34\sqrt{2}}{75}\Sigma_2({}^3D_{M^1}),\\
\Lambda_0\Sigma_2({}^3D_{M^1}) &= \frac{12\sqrt{6}}{25\sqrt{7}}\Sigma_2({}^7G_{M^1}) - \frac{4\sqrt{2}}{25\sqrt{7}}\Sigma_2({}^7D_{M^1}) + \\
&\quad + \frac{34}{75}\Sigma_2({}^3D_{M^1}) - \frac{34\sqrt{2}}{75}\Sigma_2({}^3S_{M^1}),\\
\Lambda_0\Sigma_2({}^7D_{M^1}) &= \frac{12\sqrt{3}}{175}\Sigma_2({}^7G_{M^1}) + \frac{144}{175}\Sigma_2({}^7D_{M^1}) - \\
&\quad - \frac{4\sqrt{2}}{25\sqrt{7}}\Sigma_2({}^3D_{M^1}) + \frac{4\sqrt{7}}{25}\Sigma_2({}^3S_{M^1}),\\
\Lambda_0\Sigma_2({}^7G_{M^1}) &= \frac{6}{7}\Sigma_2({}^7G_{M^1}) - \frac{12\sqrt{3}}{175}\Sigma_2({}^7D_{M^1}) + \frac{12\sqrt{6}}{25\sqrt{7}}\Sigma_2({}^3D_{M^1}).
\end{aligned} \tag{103}$$

Записывая волновую функцию в виде

$$\begin{aligned}
\Psi_2(r, \vartheta, \varphi; 1, 0, M) &= \frac{u_2(r)}{r}\Sigma_2({}^3S_{M^1}) + \frac{v_2(r)}{r}\Sigma_2({}^3D_{M^1}) + \\
&\quad + \frac{w_2(r)}{r}\Sigma_2({}^7D_{M^1}) + \frac{y_2(r)}{r}\Sigma_2({}^7G_{M^1}),
\end{aligned} \tag{104}$$

находим для радиальных функций следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u_2}{dr^2} + M\left[E_2 - \frac{3a}{2f^2} - \frac{11}{15}J(r)\right]u_2 = -\frac{2}{225}MK(r)(17\sqrt{2}v_2 - 6\sqrt{7}w_2),\\
&\frac{d^2v_2}{dr^2} - \frac{6v_2}{r^2} + M\left[E_2 - \frac{3a}{2f^2} - \frac{11}{15}J(r) - \frac{34}{225}K(r)\right]v_2 = \\
&\qquad = -\frac{2}{225}MK(r)\left(17\sqrt{2}u_2 + \frac{6\sqrt{2}}{7}w_2 - \frac{18\sqrt{6}}{\sqrt{7}}y_2\right),\\
&\frac{d^2w_2}{dr^2} - \frac{6w_2}{r^2} + M\left[E_2 - \frac{3a}{2f^2} + \frac{1}{5}J(r) - \frac{48}{175}K(r)\right]w_2 = \\
&\qquad = -\frac{4}{75}MK(r)\left[-\sqrt{2}u_2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}v_2 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}y_2\right],\\
&\frac{d^2y_2}{dr^2} - \frac{20y_2}{r^2} + M\left[E_2 - \frac{3a}{2f^2} + \frac{1}{5}J(r) - \frac{2}{7}K(r)\right]y_2 = \\
&\qquad = -\frac{4}{25}MK(r)\left[-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}w_2\right].
\end{aligned} \tag{105}$$

Состояния с высшими спинами можно не рассматривать, так как для операторов Γ_1 и Λ_1 матричные элементы перехода между состояниями, у которых спин отличается больше чем на единицу, равны нулю. Поэтому рассмотренное выше возбужденное состояние остается единственным состоянием, которое комбинируется с основным состоянием (98).

Для вычисления соответствующих матричных элементов имеем:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1\Sigma_0\,({}^3S_{M^1}) &= \frac{\sqrt{5}}{3}\,\Sigma_2\,({}^3S_{M^1}),\\
\Gamma_1\Sigma_0\,({}^3D_{M^1}) &= \frac{\sqrt{5}}{3}\,\Sigma_2\,({}^3D_{M^1}),\\
\Lambda_1\Sigma_0\,({}^3S_{M^1}) &= -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\,\Sigma_2\,({}^7D_{M^1}) + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\,\Sigma_2\,({}^3D_{M^1}),\\
\Lambda_1\Sigma_0({}^3D_{M^1}) &= -\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{35}}\,\Sigma_2\,({}^7G_{M^1}) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{35}}\,\Sigma_2\,({}^7D_{M^1}) -\\
&\quad - \frac{1}{3\sqrt{5}}\,\Sigma_2\,({}^3D_{M^1}) + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\,\Sigma_2\,({}^3S_{M^1}).
\end{aligned}
\tag{106}
$$

Вводя для матричного элемента энергии возмущения

$$
H_1 = \frac{1}{3}\,[\Gamma_1 J\,(r) + \Lambda_1 K\,(r)] \tag{107}
$$

обозначение $(2\,|H|\,0)$, получим

$$
\begin{aligned}
(2\,|H|0) = \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty \Big[\frac{\sqrt{5}}{3}\,(\bar{u}_2 v_0 + \bar{v}_2 u_0)\,J\,(r) + \Big\{\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\,\bar{u}_2 v_0 +\\
+ \frac{1}{3\sqrt{5}}\,\bar{v}_2\,(\sqrt{2}u_0 - v_0) - \frac{1}{\sqrt{35}}\,\bar{w}_2\,(7u_0 - \sqrt{2}\,v_0) - \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{35}}\,\bar{y}_2 v_0\Big\}\,K\,(r)\Big]\,dr.
\end{aligned}
\tag{108}
$$

Из уравнений (105) видно, что прямое взаимодействие для главной S-части волновой функции u_2 дает потенциал отталкивания $(11/15)J\,(r)$. Тензорные силы приводят к притяжению в случае связи с триплетной D-частью v_2 и к отталкиванию при связи с септетной D-частью w_2, но они малы по сравнению с прямым взаимодействием. Отсюда, по-видимому, следует, что состояние, описываемое волновой функцией (104), не является связанным. Принимая это допущение, мы можем оценить обусловленную возмущением (107) поправку к волновой функции (98), если заменим (104) плоской волной. Вводя для этой поправки обозначение Ψ_{01} и используя численные значения констант a, f, $\varkappa$ и μ, которые будут определены в разд. IV, В, мы находим при величине изобарного расщепления 20 *Мэв*

$$
\int |\Psi_{01}|^2 dV \sim 0{,}2. \tag{109}
$$

Таким образом, эта поправка ввиду своей малости не может существенно повлиять на результаты, полученные для невозмущенного основного состояния.

С другой стороны, если волновая функция (104) описывает связанное состояние, то эффект возмущения пропорционален отношению

$$
(2|H\,|\,0)/(E_2 - E_0) \cong (2\,|H\,|\,0)/E_{\text{изоб}}, \tag{110}
$$

где $E_{\text{изоб}} = 3a/2f^2$. Мы заведомо получим для $(2\,|H|\,0)$ оценку сверху, если подставим в (108) u_0, v_0 вместо u_2, v_2 и пренебрежем другими малыми величинами. Это дает для $(2\,|H|\,0)$ значение, в несколько раз бóльшее энергии связи дейтрона $E_{\text{св}} = |E_0|$. Поэтому приближение оправдывается и здесь, поскольку верхний предел отношения (110) составляет около 0,3, а в действительности оно будет гораздо меньше.

В обоих случаях справедливость приближения определяется условием, чтобы было малó отношение

$$E_{\text{св}}/E_{\text{изоб}}. \tag{111}$$

В. Определение констант

В рассматриваемую здесь теорию входят следующие константы: размер нуклона a, сила связи f, массы псевдоскалярного и векторного мезонов $\varkappa$ и μ. Из этих констант f должна быть выбрана так, чтобы энергия связи дейтрона была равна наблюдаемой величине 2,17 *Мэв*, а $\varkappa$ — наблюдаемой величине массы мезона $\sim$ 200 электронных масс (мы принимаем для удобства $\varkappa = 177\ m_0$). Тензорные силы зависят от отношения масс $\mu/\varkappa$ и при $\mu = \varkappa$ исчезают. Поэтому мы выберем μ так, чтобы квадрупольный момент дейтрона оказался равным $2{,}73 \cdot 10^{-27}$ *см*^{2}, как наблюдается на опыте. Вместе с тем для справедливости наших вычислений должны выполняться следующие условия:

1) малые размеры источника, т. е. $a\varkappa \ll 1$;

2) сильная связь, т. е. $(f\varkappa)^2 \gg (a\varkappa)^2$;

3) малое влияние высших спиновых состояний на основное состояние, т. е. $E_{\text{св}}/E_{\text{изоб}} \ll 1$.

Заранее нельзя сказать, можно ли удовлетворить этим условиям с нашим набором констант, но ниже мы покажем, что это возможно.

Для нахождения f и μ рассмотрим дифференциальные уравнения (100). Константа f должна быть определена так, чтобы низшее собственное значение E_0 этих уравнений было равно $-E_{\text{св}}$, а μ — так, чтобы квадрупольный момент [13]

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{10} \int\limits_0^\infty r^2 \left(uv - \frac{1}{2\sqrt{2}}\, v^2\right) dr \tag{112}$$

согласовался с экспериментом. Поскольку уравнения (100) не решаются в известных функциях, а условия, определяющие f и μ, не независимы, мы должны принять для μ некоторое разумное значение, решить (100) приближенно и посмотреть, какая величина получается для Q. Упростим сначала уравнения путем введения безразмерной переменной

$$x = 2\,(M\,|E|)^{1/2} r. \tag{113}$$

---

[13] Так как теперь и далее рассматривается только волновая функция основного состояния (98), мы опускаем индекс 0.

Тогда уравнения (100) будут:

$$d^2u/dx^2 - \left[\frac{1}{4} - j(x)\right]u = -\sqrt{2}k(x)v,$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{6v}{x^2} - \left[\frac{1}{4} - j(x) + k(x)\right]v = -\sqrt{2}k(x)u, \qquad (114)$$

где

$$j(x) = \frac{\gamma}{x}(\alpha^2 e^{-\alpha x} + 2\beta^2 e^{-\beta x}),$$
$$k(x) = \frac{2\gamma}{x^3}[(\alpha^2x^2 + 3\alpha x + 3)e^{-\alpha x} - (\beta^2x^2 + {}^3\beta x + 3)e^{-\beta x}], \qquad (115)$$

$$\alpha = \frac{\varkappa}{2(M\,|\,E_0\,|)^{1/2}}, \quad \beta = \frac{\mu}{2(M\,|\,E_0\,|)^{1/2}}, \quad \gamma = \frac{2}{9}f^2M(M\,|E_0\,|)^{1/2}. \qquad (116)$$

Условие нормировки (101) принимает вид

$$\int_0^\infty (u^2 + v^2)\,dx = 1. \qquad (117)$$

Квадрупольный момент (112), измеряемый теперь в единицах $(4M\,|\,E_0\,|)^{-1}$, определяется выражением

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{10}\int_0^\infty x^2\left(uv - \frac{2}{2\sqrt{2}}v^2\right)dx. \qquad (118)$$

Мы оценим константы, выполнив вариационный расчет минимума γ и взяв для $u(x)$ и $v(x)$ приближенные выражения, чтобы найти Q. Хюльтен [14] показал, что для простого уравнения Шредингера с потенциалом $e^{-\alpha x}/x$ хорошим приближенным решением является

$$[a_1(1 - e^{-x}) + a_2(1 - e^{-x})^2]e^{-x/2}.$$

Поэтому мы возьмем это выражение для $u(x)$ и аналогичное выражение для $v(x)$. Другими словами, положим:

$$u(x) = [a_1(1 - e^{-x}) + a_2(1 - e^{-x})^2]e^{-x/2},$$
$$v(x) = [b_1(1 - e^{-x})^4 + b_2(1 - e^{-x})^5]\left(1 + \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2}\right)e^{-x/2}. \qquad (119)$$

Эти выражения имеют требуемое поведение как для малых, так и для больших значений x. Мы подставили эти выражения в формулу для энергии

$$\frac{1}{4} = \int_0^\infty \left\{u\frac{d^2u}{dx^2} + v\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{6v^2}{x^2} + u^2j(x) + 2\sqrt{2}uvk(x) + v^2[j(x) - k(x)]\right\}dx; \qquad (120)$$

[14] *L. Hulthén*. Arkiv mat., astron. och fys., 1942, A28, N 5.

определим постоянные a_1, a_2, b_1 и b_2 так, чтобы величина γ была минимальной при соблюдении условия нормировки (117). Вычисления просты, но утомительны, и мы приводим только их результаты. Полагая $|E_0| = 2{,}17$ *Мэв*, $\varkappa = 177\, m$ и $\mu/\varkappa = 2$, получаем:

$$\gamma = 0{,}433, \tag{121}$$

$$a_1 = 3{,}18, \quad a_2 = -2{,}01 \tag{122}$$

$$b_1 = 0{,}095, \quad b_2 = -0{,}072$$

Из (121) имеем $(f\varkappa)^2 = 0{,}375$ и, используя (119) и (122), для квадрупольного момента находим $Q = 1{,}6\cdot 10^{-27}$ *см*^{2}. Для получения правильной величины Q отношение $\mu/\varkappa$ следовало бы увеличить. Однако известно, что вариационной метод может давать вполне хорошие результаты для минимизируемой величины (в нашем случае f), использование же приближенных волновых функций для вычисления других свойств может привести к очень плохим результатам. В нашем случае это вполне возможно, так как квадрупольный момент Q пропорционален функции $v(x)$, слабо влияющей на величину энергии, и так как величина Q определяется главным образом волновыми функциями при больших расстояниях от начала координат, не дающими заметного вклада в энергию. В действительности повторение вычисления с $\mu/\varkappa = 3$ дает еще меньшее значение для Q. Таким образом, оказывается, что, не проведя более тщательных вычислений, можно получить лишь грубую оценку $\mu/\varkappa \sim 2$.

Однако мы можем показать, что найденные нами значения констант позволяют удовлетворять условиям, приведенным в начале этого раздела. Действительно, поскольку $E_{\text{изоб}} = 3a/2f^2$, имеем

$$\frac{E_{\text{св}}}{E_{\text{изоб}}} = \frac{2\,(f\varkappa)^2}{3\,(a\varkappa)}\left(\frac{E_{\text{св}}}{\varkappa}\right) \cong \frac{0{,}0056}{(a\varkappa)} . \tag{123}$$

Таким образом, существует область значений a (а значит, и $E_{\text{изоб}}$), для которой все неравенства в упомянутых выше условиях выполняются с точностью до множителя порядка 10.

Г. Магнитный момент

Вычисление магнитного момента дейтрона проводится совершенно аналогично вычислению для единичного нуклона в работе ПД. Вектор тока имеет вид [15]

$$j = \varphi^2\nabla\varphi^1 - \varphi^1\nabla\varphi^2 + (4\pi)^{1/2} f \sum_A \sigma_A(\varphi^1\tau_A^2 - \varphi^2\tau_A^1)\,U_A + \psi^2 \times (\nabla \times \psi^1) -$$
$$-\psi^1 \times (\nabla \times \psi^2) + (4\pi)^{1/2} f \sum_A \{(\sigma_A \times \psi^1)\,\tau_A^2 - (\sigma_A \times \psi^2)\,\tau_A^1\}\,U_A. \tag{124}$$

---

[15] Мы не пишем здесь члены, которые появились бы в случае, если бы векторный мезон обладал аномальным магнитным моментом; но это никак не может изменить наши результаты.

Рассмотрим сначала часть, обусловленную псевдоскалярным мезоном. Взяв в формуле (46) часть, соответствующую отсутствию свободных мезонов ($\varphi'^{\alpha} = 0$), и подставив наименьшее собственное значение энергии взаимодействия (52), получаем с помощью (50)

$$\varphi^{\alpha} = \frac{f}{(4\pi)^{1/2}} \sum_{A,i} e^{\alpha}_{Ai} \frac{\partial X_A}{\partial x_i}. \tag{125}$$

Мы пренебрегли в формуле (50) членами, содержащими J_{ij}/I, так как они дают только поправки высших порядков. Подставляя (125) в псевдоскалярную часть выражения (124), находим

$$j_k = \frac{f^2}{4\pi} \sum_{A,B,i,j} \left[\left(e^2_{Ai}\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(e^1_{Bj}\frac{\partial X_B}{\partial x_j}\right) - \left(e^1_{Ai}\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(e^2_{Bj}\frac{\partial X_B}{\partial x_j}\right) - \right.$$
$$\left. - 4\pi\left\{\left(e^1_{Ai}\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\right)e^2_{Bk} - \left(e^2_{Ai}\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\right)e^1_{Bk}\right\}U_B\right],$$

или

$$j_k = \frac{f^2}{4\pi} \sum_{A,B,i,j} (e^2_{Ai}e^1_{Bj} - e^1_{Ai}e^2_{Bj}) \left(\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial^2 X_B}{\partial x_k \partial x_j} + 4\pi\delta_{jk}\frac{\partial X_A}{\partial x_i}U_B\right). \tag{126}$$

Магнитный момент определяется формулой

$$M_{kl} = \frac{e}{2}\int (x_k j_l - x_l i_k)\, dV. \tag{127}$$

Подставляя в нее выражение (126) для j_k, получаем

$$M_{kl} = \frac{ef^2}{8\pi} \sum_{A,B,i,j} (e^2_{Ai}e^1_{Bj} - e^1_{Ai}e^2_{Bj})(A^{ij}_{kl} - A^{ij}_{lk}), \tag{128}$$

где

$$A^{ij}_{kl} = \int\left[x_k\left(\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial^2 X_B}{\partial x_l \partial x_j} + 4\pi\delta_{jl}\frac{\partial X_A}{\partial x_i}U_B\right)\right] dV. \tag{129}$$

В двойной сумме по A, B в (128) члены с $A = B$ дают моменты индивидуальных частиц, которые уже были вычислены в ПД. Поскольку там было найдено, что моменты протона и нейтрона равны по величине и противоположны по знаку, эти члены сокращаются, и нам нужно взять только члены с $A \neq B$. Так как A^{ij}_{kl} при перестановке частиц I и II не изменяется, формулу (128) можно переписать в виде

$$M_{kl} = \frac{ef^2}{8\pi} \sum_{i,j} P_{ij}(A^{ij}_{kl} - A^{ij}_{lk}), \tag{130}$$

причем

$$P_{ij} = (e^2_{Ii}e^1_{IIj} - e^1_{Ii}e^2_{IIj} + e^2_{IIi}e^1_{Ij} - e^1_{IIi}e^2_{Ij}). \tag{131}$$

Мы видим, что тензор P_{ij} антисимметричен по i, j и потому имеет только три независимые компоненты. Чтобы вычислить составляющую **M** в задан-

ном направлении, мы должны взять матричные элементы P_{ij} в представлении (S, T, M, N). Однако P_{ij} при преобразовании (85) изменяет знак на противоположный и потому не может иметь ненулевых матричных элементов для состояний с одинаковой сигнатурой. Таким образом, в этой теории дейтрон имеет нулевой магнитный момент.

Нет необходимости производить вычисления для векторного мезона, так как причина исчезновения магнитного момента в рассмотренном выше случае является настолько общей, что такой же точно результат, очевидно, будет получаться во всех случаях сильной связи.

Конечно, существование тензорных сил приводит к магнитному моменту, обусловленному орбитальным моментом протона, но этот момент очень мал (порядка нескольких процентов наблюдаемого значения).

V. ТЯЖЕЛЫЕ ЯДРА

В работе СД показано, что ядерные силы в заряженной скалярной и в нейтральной псевдоскалярной теориях не обладают свойством насыщения. Вызвано это тем, что в этих теориях из любого числа нуклонов можно построить симметричную конфигурацию таким образом, что каждая частица будет испытывать притяжение со стороны всех остальных: в заряженной скалярной теории можно расположить векторы изотопического спина всех частиц в одном направлении, а в нейтральной псевдоскалярной теории можно поместить все частицы в одной плоскости, причем все их векторы спина направить параллельно и перпендикулярно этой плоскости. В нейтральной смешанной теории такие конфигурации не дают притяжения между частицами [16]. В симметричной псевдоскалярной и в симметричной смешанной теориях вместо одного вектора спина или изотопического спина мы имеем для каждой частицы систему трех ортогональных векторов $\mathbf{e}^{\alpha}$. Единственная симметричная конфигурация в этих случаях получается, если все векторы параллельны, а тогда взаимодействие отвечает отталкиванию. Таким образом, потенциальная энергия в этих теориях будет пропорциональна числу частиц, а не квадрату этого числа, как в случаях, рассмотренных в СД.

Однако для обеспечения свойства насыщения ядерных сил необходимо также, чтобы при уменьшении радиуса ядра кинетическая энергия возрастала быстрее, чем потенциальная энергия притяжения, вследствие чего существовал бы минимум полной энергии системы. Это условие выполняется в обычной теории слабой связи [17], поскольку, обозначая через r_0 радиус занимаемого каждой частицей объема, мы находим здесь, что кинетическая энергия возрастает как r_0^{-2}; зависимость же потенциальной энергии от радиуса совпадает, конечно, с поведением радиальной потенциальной функ-

---

[16] Вторая конфигурация ведет к притяжению только при условии $K(r) > J(r)$. При $\mu/\varkappa \sim 2$ это условие соблюдается, только если r больше $2/\varkappa$; для таких расстояний и $J(r)$ и $K(r)$ очень малы.

[17] *H. A. Bethe, R. F. Bacher.* Rev. Mod. Phys., 1936, 8, 82, в частности § 25. (Русск. пер.: *Г. Бете, Р. Бечер.* Физика ядра. Харьков, 1938.— *Ред.*).

ции, которая не может возрастать быстрее r^{-1}. Однако в теории сильной связи существование изобарных состояний увеличивает число разрешенных состояний в данном объеме пространства с заданным верхним предельным значением энергии, и это изменяет зависимость от r_0 как кинетической, так и потенциальной энергии.

Чтобы увидеть, как это обстоятельство отражается на наших результатах, мы проделали вычисления, аналогичные вычислениям Бете и Бечера. Мы использовали для волновой функции системы приближение Хартри, взяв индивидуальные волновые функции, как пространственные, так и спиновые, в виде решения для свободных частиц. Это решение выражается через гипергеометрические функции, исследованные Радемахером и Райхе [18] в связи с квантовой теорией симметричного волчка. Все необходимые нам интегралы протабулированы в этой работе. Мы не будем приводить подробно наших вычислений, а отметим лишь их отличия от вычислений Бете и Бечера.

Число частиц N теперь дается произведением $N_k N_s$, где N_k — число состояний с кинетической энергией, меньшей $k_0^2/2M$, а N_s — число состояний с изобарной энергией, меньшей $(a/4f^2)\ [s_0\ (s_0 + 1) - {}^3/_4]$. Полная энергия системы есть

$$E = E_k + E_s + E_p, \tag{132}$$

где E_k, E_s и E_p — соответственно кинетическая, изобарная и потенциальная энергии. Если мы будем считать значение s_0 большим по сравнению с единицей и сохранять только высшие степени s_0, то N_k, N_s и E_k, E_s будут зависеть от k_0, s_0 одинаково. Следовательно, для минимума энергии (132) мы имеем условия

$$k_0^2\ (2M) = (a/4f^2)s_0^2 \tag{133}$$

и

$$E_k = E_s. \tag{134}$$

Кроме того, N_k, N_s и E_k, E_s пропорциональны N/r_0. Величина E_p, с другой стороны, оказывается пропорциональной $N/(r_0)^{1/2}$, и потому существует такое значение r_0, при котором энергия E минимальна.

В этом рассуждении мы пренебрегали кулоновской энергией, и хотя это, возможно, и не влияет на свойство насыщения, однако приводит к серьезным трудностям в проблеме стабильности тяжелых ядер с большим зарядом. Как указал Фирц [19], в ядре типа урана переход протона или нейтрона в частицу с отрицательным зарядом будет энергетически выгодным, если изобарное расщепление не достигает значения около 50 *Мэв*. Однако такое значение изобарного расщепления недопустимо, так как для этого нам пришлось бы взять источник, размеры которого были бы порядка комптоновской длины волны мезона. Другими словами, размеры источ-

---

[18] *H. Rademacher*, *F. Reiche*. Z. Phys., 1926, 39, 444; 1927, 41, 453.
[19] *M. Fierz*. Helv. phys. acta, 1941, 14, 105.

ника должны бы быть того же порядка, что и радиус действия ядерных сил, и потому природа ядерных сил определялась бы полностью формой источника. К тому же подобное значение размера сделало бы невозможным получить малое значение сечения рассеяния мезонов, лишило бы теорию сильной связи ее основного предназначения.

VI. ВЫВОДЫ

Наши результаты свидетельствуют о том, что рассмотренная здесь теория сталкивается с двумя серьезными трудностями: она дает для магнитного момента дейтрона значение, равное только нескольким процентам наблюдаемой величины, и предсказывает неустойчивость ядер с большим зарядом. Эти результаты, по-видимому, присущи всем теориям сильной связи, и не видно, как их можно обойти.

Этих трудностей нет в теории слабой связи, и потому, вероятно, следовало бы вернуться к ней и пересмотреть аргументы, заставившие нас предпочесть ей теорию сильной связи. Главные трудности в теории слабой связи — это расходимости, обусловленные рассмотрением тяжелых частиц как точечных источников, и большое сечение рассеяния мезона. Как уже было указано одним из нас [20], первую трудность можно устранить, применяя λ-процесс, развитый Вентцелем и Дираком, а вторую — используя теорию радиационного затухания, развитую Гайтлером и Вильсоном. Кроме того, теория слабой связи, построенная указанным способом, обладает релятивистской инвариантностью, которую теория сильной связи не имеет вследствие конечности размера источника. Поэтому теперь основания для теории сильной связи отпадают, и нам следовало бы вернуться к теории слабой связи.

Как указано в конце разд. III, A, переход от теории сильной связи к теории слабой связи можно совершить с помощью простой замены векторов $\mathbf{e}^\alpha$ векторами спина и изотопического спина. Таким образом, радиальные волновые функции для основного состояния дейтрона в теории слабой связи удовлетворяют в точности тем же дифференциальным уравнениям (114), только γ, как показано в приложении, определяется по-другому:

$$\gamma = 2f'^2M(M\,|E_0|)^{1/2},$$

где f' — константа связи в этой теории. И здесь не требуется делать какие-либо приближения, обусловленные высшими изобарными состояниями, так как этих состояний просто не существует. Поэтому вычисления, выполненные в разд. IV, B, справедливы и в этом случае, так что для силы связи получаем $(f'\varkappa)^2 = {}^1/_9\,(f\varkappa)^2 = 0{,}042$. Отношение масс не изменяется.

---

[20] *W. Pauli*. Bull. Amer. Phys. Soc. New York Meeting, Jan. 22—23 1943, Abstract N 25; Phys. Rev., 1943, 63, 221.

Приложение

Вычисление матричного элемента вектора e_i^α. Векторы e_i^α подчиняются следующим соотношениям коммутации с s_i и t^α [ср. ПД, соотношения (55)]:

$$[s_i, e_j^\alpha] = ie_k^\alpha, \quad i, j, k \text{ — циклическая перестановка;}$$
$$[t^\alpha, e_i^\beta] = ie_i^\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ — циклическая перестановка.} \tag{135}$$

Более удобно ввести мнимые составляющие:

$$s_+ = s_1 + is_2, \qquad s_- = s_1 - is_2, \quad s_3,$$
$$t^+ = t^1 + it^2, \qquad t^- = t^1 - it^2, \quad t^3; \tag{136}$$

и

$$e_+^+ = e_1^1 - e_2^2 + i(e_2^1 + e_1^2), \qquad e_+^3 = e_1^3 + ie_2^3,$$
$$e_+^- = e_1^1 + e_2^2 + i(e_2^1 - e_1^2), \qquad e_-^3 = e_1^3 - ie_2^3,$$
$$e_-^+ = e_1^1 + e_2^2 - i(e_2^1 - e_1^2), \qquad e_+^3 = e_3^1 + ie_3^2, \tag{137}$$
$$e_-^- = e_1^1 - e_2^2 - i(e_2^1 + e_1^2), \qquad e_3^- = e_3^1 - ie_3^2.$$
$$e_3^3.$$

Для матричных элементов векторов e_1^α, связывающих состояния (s, m, n) и (s', m', n'), имеем следующие правила отбора:

1) для любого e_i^α $\quad s' = s - 1$, s или $s + 1$;
2) для e_+^α $\quad m' = m - 1$;
3) для e_3^α $\quad m' = m$;
4) для e_-^α $\quad m' = m + 1$;
5) для e_i^+ $\quad n' = n - 1$;
6) для e_i^3 $\quad n' = n$;
7) для e_i^- $\quad n' = n + 1$.

Все матричные элементы, не удовлетворяющие этим правилам, обращаются в нуль.

Ненулевыми матричными элементами s_i и t^α являются:

$$(m \mid s_+ \mid m - 1) = [(s + m)(s - m + 1)]^{1/2},$$
$$(m \mid s_3 \mid m) = m, \tag{138}$$
$$(m \mid s_- \mid m + 1) = [(s + m + 1)(s - m)]^{1/2}.$$

Для t^+, t^3, t^- справедливы такие же выражения с заменой m на n. Поэтому, чтобы удовлетворить соотношениям коммутации (135), мы должны иметь для e_i^α следующую зависимость от m:

$$(s, m, n \mid e_+^\alpha \mid s - 1, \ m - 1, n') = -(s, n \mid c^\alpha \mid s - 1, n')\,[(s + m)(s + m - 1)]^{1/2},$$
$$(s, m, n \mid e_+^\alpha \mid s, \ m - 1, \ n') = (s, n \mid c^\alpha \mid s, n')\,[(s + m)(s - m + 1)]^{1/2},$$
$$(s, m, n \mid e_+^\alpha \mid s + 1, \ m - 1, \ n') = (s, n \mid c^\alpha \mid s + 1, \ n')\,[(s - m + 1)(s - m + 2)]^{1/2},$$

$$(s, m, n \mid e_3^\alpha \mid s-1, m, n') = (s, n \mid c^\alpha \mid s-1, n') (s^2 - m^2)^{1/2},$$
$$(s, m, n \mid e_3^\alpha \mid s, m, n') = (s, n \mid c^\alpha \mid s, n') m,$$
$$(s, m, n \mid e_3^\alpha \mid s+1, m, n') = (s, n \mid c^\alpha \mid s+1, n') [(s+1)^2 - m^2]^{1/2},$$
$$(s, m, n \mid e_-^\alpha \mid s-1, m+1, n') = (s, n \mid c^\alpha \mid s-1, n') [(s-m)(s-m-1)]^{1/2},$$
$$(s, m, n \mid e_-^\alpha \mid s, m+1, n') = (s, n \mid c^\alpha \mid s, n') [(s-m)(s+m+1)]^{1/2},$$
$$(s, m, n \mid e_-^\alpha \mid s+1, m+1, n') = -(s, n \mid c^\alpha \mid s+1, n') [(s+m+1)(s+m+2)]^{1/2}.$$

Аналогично, чтобы удовлетворить соотношениям коммутации, зависимость от n должна быть следующей:

$$(s, n \mid c^+ \mid s-1, n-1) = -(s \mid b \mid s-1) [(s+n)(s+n-1)]^{1/2},$$
$$(s, n \mid c^+ \mid s, n-1) = (s \mid b \mid s) [(s+n)(s-n+1)]^{1/2},$$
$$(s, n \mid c^+ \mid s+1, n-1) = (s \mid b \mid s+1) [(s-n+1)(s-n+2)]^{1/2},$$
$$(s, n \mid c^3 \mid s-1, n) = (s \mid b \mid s-1) (s^2 - n^2)^{1/2},$$
$$(s, n \mid c^3 \mid s, n) = (s \mid b \mid s) n,$$
$$(s, n \mid c^3 \mid s+1, n) = (s \mid b \mid s+1) [(s+1)^2 - n^2]^{1/2},$$
$$(s, n \mid c^- \mid s-1, n+1) = (s \mid b \mid s-1) [(s-n)(s-n-1)]^{1/2},$$
$$(s, n \mid c^- \mid s, n+1) = (s \mid b \mid s) [(s-n)(s+n+1)]^{1/2},$$
$$(s, n \mid c^{-1} \mid s+1, n+1) = -(s \mid b \mid s+1) [(s+n+1)(s+n+2)]^{1/2}.$$

Чтобы получить зависимость от s, мы используем условие нормировки для e_i^α [ср. ПД, формула (51a)]. Используя (137), находим

$$e_+^3 e_-^3 + (e_3^3)^2 = 1,$$
$$e_+^+ e_-^- + e_-^+ e_+^- + 2 e_3^+ e_3^- = 4. \qquad (139)$$

Из этих условий получаем уравнения:

$$s^3 (2s-1) (s \mid b \mid s-1)^2 + (s+1)^3 (2s+3) (s \mid b \mid s+1)^2 = 1,$$
$$s^2 (s-1)(2s-1) (s \mid b \mid s-1)^2 + s^2 (s+1)^2 (s \mid b \mid s)^2 + (s+1)^2 (s+2)(2s+3) \times$$
$$\times (s \mid b \mid s+1)^2 = 2. \qquad (140)$$

Затем из соотношения

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}^3) = -t^3 \qquad (141)$$

имеем

$$(s \mid b \mid s) = -1/s(s+1). \qquad (142)$$

Следовательно, уравнения (140) теперь можно решить, и мы, наконец, получаем:

$$(s \mid b \mid s-1) = 1/s [(2s-1)(2s+1)]^{1/2},$$
$$(s \mid b \mid s+1) = 1/(s+1) [(2s+1)(2s+3)]^{1/2}. \qquad (143)$$

В частности, при $s = s' = 1/2$ мы имеем соотношение

$$(1/2, m, n \mid \mathbf{e}^\alpha \mid 1/2, m', n') = 1/3 (m, n \mid \sigma\tau^\alpha \mid m', n'). \qquad (144)$$

Это соотношение связывает теории сильной и слабой связи; именно, единственное различие для основного состояния заключается в появлении в энергии взаимодействия множителя 1/9, который лишь изменяет значения констант связи.

О НОВОМ МЕТОДЕ ДИРАКА ДЛЯ КВАНТОВАНИЯ ПОЛЯ *[1]

1. ВВЕДЕНИЕ

Дирак[2] недавно предложил новый метод квантования поля, использующий индефинитную метрику в пространстве квантовых состояний. В применении к частицам с целым спином, подчиняющимся статистике Бозе, этот метод приводит, в частности, к «отрицательной вероятности» состояний, в которых присутствует нечетное число частиц. Термин «отрицательная вероятность» в сущности означает, что математическое ожидание наблюдаемых с заведомо положительными собственными значениями может быть отрицательным. Осцилляторы поля, квантованного этим методом, описывают частицы с отрицательной энергией. Кроме того, вводится другое поле осцилляторов, квантованное обычным способом, с положительными вероятностями и положительной энергией. Построенный таким образом формальный аппарат допускает трактовку, более близкую к первоначальной интерпретации волнового уравнения второго порядка как описания проблемы одного тела без вторичного квантования; согласно этой трактовке состояния с положительными (отрицательными) частотами должны иметь положительную (отрицательную) энергию.

Преимущество этого нового метода заключается в том, что он обеспечивает возможность преодоления известных трудностей, связанных с проблемой сходимости в теории квантованных полей, при условии, что он будет объединен с совершенно другим, логически независимым методом, предложенным Вентцелем и усовершенствованным Дираком, а именно с методом так называемого λ-процесса, представляющего собой чисто классический прием, который можно перенести в квантовую теорию. Однако этот положительный результат частично обесценивается трудностями в теории рождения и аннигиляции пар частиц с противоположными электрическими зарядами. В то время как в обычной теории дырок возможен учет кулоновского взаимодействия между рожденными парами, применение λ-процесса в этой теории не позволяет сделать конечной собственную энергию электрона (независимо от того, применяется или нет при этом новый метод квантования поля). Причина этого состоит в том, что необходимым условием последовательного применения λ-процесса является требование, чтобы частицы не сближались на расстояние, меньшее λ. В теории, в ко-

---

* *On Dirac's New Method of Field Quantization.*— Rev. Mod. Phys., 1943, 15, 175—207.

[1] Этот обзор представляет собой улучшенный и дополненный текст лекции, прочитанной в 1942 г. в университете Пурдю (Лафайетт, штат Индиана), и в то же время служит продолжением более раннего обзора [Rev. Mod. Phys., 1941, 13, 203. (Русск. пер. см. с. 372.— *Ред.*)], цитируемого далее как «А».

[2] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc. London, 1942, **A180**, 1.

торой число частиц является конечным и постоянным, этому условию можно удовлетворить, выбирая достаточно малую длину λ, в теории же дырок это условие приводит к трудностям в связи с тем, что, согласно этой теории, пары рождаются в непосредственной окрестности заряженной частицы таким образом, что электростатическая (а также электродинамическая) собственная энергия электрона расходится логарифмически. По мнению автора, эта трудность может быть преодолена только при использовании вместо λ-процесса нового и, вероятно, чисто квантовотеоретического метода [3]. Ситуация в теории заряженных частиц с нулевым спином, подчиняющихся статистике Бозе, полностью аналогична ситуации в теории обычных электронов со спином $1/2$, подчиняющихся принципу запрета.

И отрицательные значения энергии, и отрицательные вероятности некоторых состояний одной частицы в новом формальном аппарате приводят к неизбежным и довольно фундаментальным изменениям в обычной физической интерпретации квантовой теории. Хотя новый формальный метод в некоторых отношениях оказывается ближе к классической теории, чем прежний метод, приводивший к расходящимся выражениям, для интерпретации нового метода не существует стройной и полной системы, а применяются лишь некоторые неокончательные правила для вычисления коэффициентов вероятности в процессах излучения и столкновений. Ситуация допускает также известную аналогию со старым принципом соответствия Бора в том отношении, что новая теория объединяет различные процессы, действительно происходящие в природе при совершенно непохожих условиях. В самом деле, теория не дает правильной зависимости вероятностей перехода в этих процессах от числа частиц, первоначально находившихся в различных состояниях. Хотя это обстоятельство говорит о весьма предварительном характере нового формального аппарата и указывает, по-видимому, на необходимость более радикальных изменений в фундаментальных предпосылках квантовой теории поля, можно все-таки надеяться, что именно эта ситуация обеспечит дальнейший прогресс.

2. ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В дираковском методе квантования поля применяется обобщение обычной метрики в гильбертовом пространстве состояний системы. В то время как в обычной метрике нормировка волновой функции $\psi(q)$ определяется интегралом

$$\int \bar{\psi}\psi dq,$$

где $\bar{\psi}$ — функция, комплексно-сопряженная ψ, а скалярное произведение

[3] Я не согласен с утверждением Дирака о том, что в теории дырок, где в начальном состоянии все состояния с отрицательной энергией считаются занятыми, уравнения оказываются более сложными, чем в старой форме теории, в которой имелось постоянное число заряженных частиц, совершавших переходы в состояния с отрицательной энергией.

двух комплексных векторов φ и ψ в гильбертовом пространстве определяется интегралом

$$\int \overline{\varphi}\psi dq,$$

мы будем рассматривать теперь более общие билинейные формы

$$\int \overline{\psi}\eta\psi dq, \quad \int \overline{\varphi}\eta\psi dq, \tag{1}$$

в которых оператор η ограничивается только условием эрмитовости, чтобы форма, используемая для нормировки, давала вещественные значения. Очевидно, что в системе дискретных координат интеграл $\int dq$ должен быть заменен суммой по дискретному индексу n, а η можно представить в виде матрицы η_{nm}, так что равенства (1) принимают вид:

$$\sum_{n,m} \overline{\psi}_n\eta_{nm}\psi_m, \quad \sum_{n,m} \overline{\varphi}_n\eta_{nm}\psi_m. \tag{2}$$

Математическое ожидание наблюдаемой A, представляемой линейным оператором, теперь определяется по формуле

$$\langle A\rangle = \int \overline{\psi}\eta A\psi dq = \sum_{n,m,l} \overline{\psi}_n\eta_{nm}A_{ml}\psi_l. \tag{3}$$

Как обобщение эрмитово-сопряженного оператора мы введем сопряженный оператор, который будем обозначать A^*. Этот оператор определяется равенствами

$$A^* = \eta^{-1}A^\dagger\eta^\dagger = \eta^{-1}A^\dagger\eta, \tag{4}$$

где $A^\dagger$ — эрмитово-сопряженный оператор. Оператор A^* обладает свойством

$$\langle A^*\rangle_{\text{ср}} = \langle A\rangle_{\text{ср}}. \tag{5}$$

Физические наблюдаемые должны быть самосопряженными; это означает, что для них выполняется равенство $A^* = A$, так как самосопряженными называются такие операторы, для которых значения математического ожидания вещественны. Самосопряженные операторы играют такую же роль, как эрмитовы операторы в обычной теории. В частности, оператор Гамильтона H, определяющий зависимость волновой функции ψ от времени в соответствии с уравнением

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -iH\psi,$$

вследствие равенств

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t}\eta = i\overline{\psi}H^\dagger\eta = i\overline{\psi}\eta H^* \tag{6}$$

должен быть самосопряженным

$$H^* = H.$$

Следствием этого условия является равенство, выражающее сохранение

нормировки со временем:

$$\frac{d}{dt}\int\bar{\psi}\eta\psi dq=\frac{d}{dt}\sum_{n,\,m}\bar{\psi}_n\eta_{nm}\psi_m=i\bar{\psi}\eta(H^*-H)\psi.$$

Зависимость от времени математического ожидания наблюдаемой величины A (не зависящей от времени *явно*), как обычно, определяется формулой

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\text{ср}}=i\langle HA-AH\rangle_{\text{ср}}. \tag{7}$$

Совершая линейное, но необязательно унитарное преобразование системы координат в гильбертовом пространстве по формуле

$$\psi'=S\psi, \tag{8}$$

мы должны положить

$$\eta'=S^{\dagger}\eta S, \tag{9}$$

чтобы сохранить постоянной длину вектора в гильбертовом пространстве; другими словами, нормировка волновой функции является инвариантной

$$\int\bar{\psi}'\eta'\psi'dq=\int\bar{\psi}\eta\psi dq.$$

Тогда наблюдаемые, такие, как A, и сопряженные им величины в соответствии с равенством (4) должны преобразовываться по формулам

$$A'=S^{-1}AS,\qquad A^{*\prime}=\eta'^{-1}A^{\dagger\prime}\eta'=S^{-1}A^*S,$$

чтобы их математические ожидания были инвариантными:

$$\langle A\rangle_{\text{ср}}=\int\psi\eta A\psi dq=\int\bar{\psi}'\eta'A'\psi'dq.$$

Свойство наблюдаемой величины быть самосопряженной является инвариантным по отношению к этим S-преобразованиям, тогда как свойство эрмитовости в общем случае неинвариантно.

Две различные формы матрицы η, связанные преобразованием (9), следует считать эквивалентными. Но каждую эрмитову матрицу η можно преобразовать при помощи соответствующей матрицы S по формуле (9) к нормальному диагональному виду, в котором, кроме того, всякий диагональный элемент имеет значение 1 или -1. Поэтому физический смысл имеют только знаки собственных значений η; в частности, положительно-определенные формы (1) эквивалентны формам обычной теории, в которой η — единичная матрица. Мы получим, однако, нечто существенно новое, если будем рассматривать индефинитные билинейные формы в качестве выражений для длин векторов в гильбертовом пространстве. Это приводит к следствию, что *операторы, обладающие только положительными собственными значениями, могут иметь отрицательные величины математических ожиданий*. Другими словами, мы вводим отрицательные вероятности того, что реализуются некоторые положительные собственные значения наблюдаемой величины. Хотя физический смысл этой возможности остается неясным, Дираку удалось показать, что она позволяет преодолеть трудности, связанные с проблемами сходимости в той форме квантовой электродинамики, которая была известна до настоящего времени.

3. ПРИЛОЖЕНИЕ К ГАРМОНИЧЕСКОМУ ОСЦИЛЛЯТОРУ

Рассмотрим гармонический осциллятор, который мы можем описывать в надлежащих единицах двумя переменными p и q, удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$i\,[p,\,q] = 1, \tag{10}$$

и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2). \tag{11}$$

Вводя новые переменные u, u^* по формулам

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq), \qquad u^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq), \tag{12}$$

получаем

$$[u,\ u^*] = 1, \tag{13}$$

$$H = \frac{1}{2}(u^*u + uu^*) = u^*u + \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Если мы предположим, что переменные p и q эрмитовы, то $u^* = u^\dagger$; другими словами, переменная u^* эрмитово сопряжена u. Как известно, величина

$$u^*u = N \tag{15}$$

обладает собственными значениями 0, 1, 2, . . ., и в представлении, где величина N диагональна, операторы, соответствующие u и u^*, имеют простой смысл операторов поглощения и рождения, применяемых к волновой функции $\psi\,(N)$:

$$\begin{aligned} u^*\psi\,(N) &= N^{1/2}\,\psi\,(N-1) \\ u\psi\,(N) &= (N+1)^{1/2}\psi\,(N+1). \end{aligned} \tag{16}$$

Волновая функция $\psi\,(N)$ должна быть нормирована условием

$$\sum_N \overline{\psi}(N)\,\psi(N) = 1.$$

Если $h_N\,(q)$ — нормированные эрмитовы собственные функции гамильтониана (11), то имеем

$$\psi(q) = \sum_N h_N(q)\,\psi(N) \tag{17}$$

и отсюда

$$\int \overline{\psi}\,(q)\psi\,(q) = 1.$$

Существует, однако, альтернативная возможность: рассматривать тот же гамильтониан, но считать, что переменные p и q, по-прежнему удовлетворяющие соотношениям (10) и по-прежнему самосопряженные, являются не эрмитовыми, а антиэрмитовыми. В этом случае удобно ввести

переменные:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq), \qquad u^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq). \tag{18}$$

Мы получаем

$$[u, u^*] = -1, \tag{19}$$

причем переменная u^* эрмитово сопряжена u с отрицательным знаком. Мы можем теперь положить

$$u^* u = -N, \tag{20}$$

где N опять имеет положительные собственные значения 0, 1, 2, . . ., и опять можно рассматривать u как оператор поглощения, u^* — как оператор рождения, но изменяющий знак ψ:

$$u^*\psi(N) = N^{1/2}\psi(N-1), \tag{16'}$$

$$u\psi(N) = -(N+1)^{1/2}\psi(N+1).$$

Гамильтониан принимает вид

$$H = \frac{1}{2}(u^*u + uu^*) = -\left(N + \frac{1}{2}\right). \tag{21}$$

Теперь мы должны найти матрицу η, определяющую нормировку волновой функции $\psi(N)$ в соответствии с формулой

$$\sum_{N', N''} \overline{\psi}(N')(N' \mid \eta \mid N'')\psi(N'') = \text{const}.$$

Учитывая равенства (4), примененные к $u^* = -u^\dagger$, мы должны взять матрицу η, антикоммутирующую с u^*:

$$\eta u^* = -u^*\eta.$$

В представлении, в котором матрица η диагональна, из соотношения (19) следует, что достаточно выбрать матрицу η диагональной по отношению к N с элементами $(N \mid \eta \mid N) \equiv \eta_N$, удовлетворяющими условию

$$\eta_{N+1} = -\eta_N,$$

причем

$$\eta_N = (-1)^N.$$

Поэтому волновую функцию $\psi(N)$ следует нормировать условием

$$\sum_N (-1)^N \overline{\psi}(N)\psi(N) = \text{const}, \tag{22}$$

ясно показывающим «отрицательную вероятность» состояний с нечетными значениями N в этом варианте теории. Принимая во внимание, что $h_N(q)$ — функция четная или нечетная, когда значение N четное или нечетное, мы легко получаем с помощью формул (16) условие нормировки $\psi(q)$, соответствующее условию (22) для нормировки $\psi(N)$:

$$\int \overline{\psi}(q)\psi(-q)dq = \text{const}, \tag{23}$$

или, если мы разложим $\psi(q)$ на четную $\psi_{\text{чет}}(q)$ и нечетную $\psi_{\text{неч}}(q)$ части,

$$\int \overline{\psi}_{\text{чет}}(q)\psi_{\text{чет}}(q)dq - \int \overline{\psi}_{\text{неч}}(q)\psi_{\text{неч}}(q)\,dq = \text{const}. \tag{24}$$

Это означает, что оператор η, действуя на функцию $\psi(q)$, переводит ее в $\psi(-q)$:

$$\eta\psi(q) = \psi(-q). \tag{25}$$

Рассматривая p, q как антиэрмитовы операторы, которые должны удовлетворять соотношениям (10), мы должны положить:

$$\begin{aligned} q_{\text{оп}}\psi(q) &= iq\,\psi(q), \\ p_{\text{оп}}\psi(q) &= -\frac{d}{dq}\psi(q). \end{aligned} \tag{26}$$

Легко проверить, что для определенных таким образом операторов значения математических ожиданий p и q будут вещественными:

$$\langle q\rangle_{\text{ср}} = i\int \overline{\psi}(q)(-q)\psi(-q)dq,$$

$$\langle p\rangle_{\text{ср}} = \int \overline{\psi}(q)\frac{d}{dq}\psi(-q)\,dq.$$

Заметим, что из формул (26) и (11) имеем

$$H_{\text{оп}}\psi(q) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dq^2} + q^2\right)\psi(q) \tag{27}$$

в соответствии с отрицательными собственными значениями гамильтониана H, приведенными в уравнении (21).

4. СИСТЕМА ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ И ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Рассмотрим теперь систему двух осцилляторов, один из которых имеет положительную энергию (p_+, q_+ — эрмитовы), а второй — отрицательную энергию (p_-, q_- — самосопряженные, но антиэрмитовы), с правилами коммутации

$$i[p_+, q_+] = 1, \quad i[p_-, q_-] = 1, \tag{28}$$

где обе переменные с индексом $+$ коммутируют, а две переменные с индексом — антикоммутируют. Пусть гамильтониан системы будет

$$H = \frac{1}{2}(p_+^2 + p_-^2 + q_+^2 + q_-^2). \tag{29}$$

Вводя переменные u_+, u_- и сопряженные им согласно соотношениям, аналогичным (12) и (18), т. е.

$$u_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_+ - iq_+), \quad u_+^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_+ + iq_+), \tag{30}$$

$$u_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_- + iq_-), \quad u_-^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_- - iq_-), \tag{31}$$

получаем

$$[u_+, u_+^*] = 1, \quad [u_-, u_-^*] = -1, \tag{32}$$

причем

$$N_+ = u_+ u_+^*, \quad N_- = -u_-^* u_-, \tag{33}$$

$$H = \left(N_+ + \frac{1}{2}\right) - \left(N_- + \frac{1}{2}\right) = N_+ - N_-. \tag{34}$$

Нормировка волновой функции определяется условием

$$\sum_{N_+, N_-} (-1)^{N_-} \overline{\psi}(N_+, N_-)\, \psi(N_+, N_-) = \mathrm{const}, \tag{35}$$

или

$$\iint \overline{\psi}\,(q_+, q_-)\psi\,(q_+, -q_-)dq_+dq_- = \mathrm{const}. \tag{36}$$

Для дальнейшего важно, что для этой системы осцилляторов существуют еще две пары переменных, удовлетворяющих тем же самым правилам коммутации, которым удовлетворяют u_+, u_- и сопряженные им переменные, а именно:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_+ + u_-^*), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_+^* + u_-), \tag{37}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_+^* - u_-), \quad b^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_+ - u_-^*). \tag{38}$$

Для этих переменных имеем:

$$[a, a^*] = 1, \quad [b, b^*] = 1, \tag{39}$$

причем

$$N_a = a^*a, \quad N_b = -b^*b, \tag{40}$$

$$N_a - N_b = N_+ - N_-. \tag{41}$$

Отсюда также получаем

$$H = N_a - N_b. \tag{42}$$

Заметим, что обратные формулы, выражающие u_+, u_- через a, b, а также аналогичные формулы для сопряженных величин имеют такой же вид, как формулы (37), (38), а именно:

$$u_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b^*), \quad u_+^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^* + b), \tag{43}$$

$$u_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^* - b), \quad u_-^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - b^*). \tag{44}$$

Поэтому переменные a, b полностью эквивалентны переменным u_+, u_-. Преобразование переменных p и q, соответствующее новым самосопряженным переменным p_a, q_a, p_b, q_b, дается формулами:

$$p_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_+ + p_-), \quad q_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_+ + q_-), \tag{45}$$

$$p_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_+ - p_-), \quad q_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_+ - q_-). \tag{46}$$

При этом переменные a и переменные b коммутируют друг с другом и

$$i\,[p_a,\,q_a] = i[p_b, q_b] = 1. \tag{47}$$

Обратные формулы для соотношений (45), (46) снова имеют тот же вид. Очевидно, мы имеем

$$\frac{1}{2}(p_+^2 + p_-^2 + q_+^2 + q_-^2) = \frac{1}{2}(p_a^2 + p_b^2 + q_a^2 + q_b^2) = H. \tag{48}$$

Учитывая формулы (30), (31), (37), (38), находим:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_a - iq_a), \qquad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_a + iq_a), \tag{49}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_b + iq_b), \qquad b^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_b - iq_b). \tag{50}$$

Теперь мы приступим к исследованию S-преобразования, переводящего волновую функцию $\psi(N_+, N_-)$ в волновую функцию $\psi(N_a, N_b)$ по формуле

$$\psi(N_a, N_b) = \sum_{N_+,\,N_-}(N_a, N_b\,|\,S\,|\,N_+, N_-)\,\psi(N_+, N_-). \tag{51}$$

Это преобразование не будет унитарным, но его можно выбрать так, чтобы нормировка сохранялась, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{N_+,\,N_-}(-1)^{N_-}\bar{\psi}(N_+, N_-)\,\psi(N_+, N_-) = \sum_{N_a,\,N_b}(-1)^{N_b}\bar{\psi}(N_a, N_b)\,\psi(N_a, N_b), \tag{52}$$

или

$$\sum_{N_+,\,N_-}(N_a', N_b'\,|\,S\,(-1)^{N_-}S^\dagger\,|\,N_a'', N_b'') = (-1)^{N_b'}\delta_{N_a', N_a''}\delta_{N_b', N_b''}. \tag{53}$$

Последнее соотношение можно рассматривать как частный случай преобразования (9), если мы положим

$$(N_a', N_b'\,|\,\eta'\,|\,N_a'', N_b'') = (-1)^{N_b'}\delta_{N_a', N_a''}\delta_{N_b', N_b''},$$

$$(N_+', N_-'\,|\,\eta\,|\,N_+'', N_-'') = (-1)^{N_-'}\delta_{N_+', N_+''}\delta_{N_-', N_-''}.$$

Соотношения (51), (52) можно упростить с помощью равенства (41), и двойные суммы в них сведутся к простым суммам. Полагая

$$N_b = N_a - N \geqslant 0, \qquad N_- = N_+ - N \geqslant 0,$$

находим для каждого N:

$$\psi(N_a) = \sum_{N_+=N}^{\infty}(N_a\,|\,S\,|\,N_+)\,\psi(N_+), \tag{51'}$$

$$\sum_{N_+}(N_a'\,|\,S\,(-1)^{N_+-N}S^\dagger\,|\,N_a'') = (-1)^{N_a'-N}\delta_{N_a', N_a''}. \tag{53'}$$

Для вычисления функции преобразования S удобно взять равенство, получаемое из формул (37), (38):

$$\frac{1}{2}(aa^* + a^*a) - \frac{1}{2}(bb^* + b^*b) = u_+u_- + \overset{*}{u}_+u_-.$$

Так как левую его часть можно также записать в виде

$$N_a + N_b + 1 = 2N_a - N + 1,$$

то применение этого равенства к S дает

$$(2N_a - N + 1)(N_a | S | N_+) = (u_+u_- + \overset{*}{u}_+\overset{*}{u}_-)(N_a | S | N_+).$$

Используя формулы (16) для u_+, $\overset{*}{u}_+$ и формулы (16′) для u_-, $\overset{*}{u}_-$, имеем

$$(2N_a - N + 1)(N_a | S | N_+) = [N_+(N_+ - N)]^{1/2}(N_a | S | N_+ - 1) - \\ - [(N_+ + 1)(N_+ + 1 - N)]^{1/2}(N_a | S | N_+ + 1). \quad (54)$$

Полагая

$$\varphi(N_+) = \frac{[N_+!]^{1/2}}{[(N_+ - N)!]^{1/2}}(N_a | S | N_+), \qquad (N_a | S | N_+) = \frac{[N_+!]^{1/2}}{[(N_+ - N)!]^{1/2}}\psi(N_+), \quad (55)$$

мы получаем из равенства (54):

$$(2N_a - N + 1)\varphi(N_+) = N_+\varphi(N_+ - 1) - (N_+ + 1 - N)\varphi(N_+ + 1), \quad (56)$$

$$(2N_a - N + 1)\psi(N_+) = (N_+ - N)\psi(N_+ - 1) - (N_+ + 1)\psi(N_+ + 1). \quad (56')$$

В то время как уравнение (56) имеет решение с $\varphi(N_+) = 0$ для $N_+ < N$, уравнение (56′) обладает решением с $\psi(N_+) = 0$ для $N_+ < 0$. В последнем случае множитель $[(N_+ - N_-)!]^{-1/2}$ во втором соотношении (55) приводит к тому, что $(N_a | S | N_+) = 0$ для $0 \leqslant N_+ < N$, как и должно быть, а формула (56′) определяет $\psi(N_+)$ для $0 < N_+ < N$. С другой стороны, для $N < 0$ значение $\varphi(N_+)$ можно найти по формуле (56) также и для отрицательных значений N_+, бóльших или равных $N = -|N|$, а множители в первом соотношении (55) приводят к тому, что $(N_a | S | N_+) = 0$ для $N_+ < 0$.

Вводя вспомогательную переменную x и степенные ряды

$$\varphi(x) = \sum_{N_+=N}^{\infty}\varphi(N_+)x^{N_+-N}, \qquad \psi(x) = \sum_{N_+=0}^{\infty}\psi(N_+)x^{N_+}, \quad (57)$$

мы получаем из формул (56), (56′) дифференциальные уравнения для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$(x^2 - 1)\varphi' - [2N_a - N + 1 - (N + 1)x]\varphi = 0$$

или

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{N_a - N}{x - 1} - \frac{N_a + 1}{x + 1}, \quad (58)$$

$$(x^2-1)\psi'-[2N_a-N+1+(N-1)x]\psi=0$$

или

$$\frac{\psi'}{\psi}=\frac{N_a}{x-1}-\frac{N_a-N+1}{x+1}. \qquad (58')$$

Эти уравнения имеют решения:

$$\varphi=\text{const}\,(x-1)^{N_a-N}(x+1)^{-N_a-1}, \qquad (59)$$

$$\psi=\text{const}\,(x-1)^{N_a}(x+1)^{N-N_a-1}. \qquad (59')$$

Чтобы сравнить значения постоянных множителей в последних двух формулах, заметим, что из формул (55) следует равенство

$$\varphi(N_+)=\frac{N_+!}{(N_+-N)!}\psi(N_+).$$

Отсюда

$$\varphi(N_+)=N_+(N_+-1)\dots(N_+-N+1)\;\;\psi(N_+),\quad \varphi(x)=\frac{d^N}{dx^N}\psi(x),\quad N\geqslant 0; \qquad (60)$$

$$\psi(N_+)=(N_++|N|)(N_++|N|-1)\dots(N_++1)\varphi(N_+),$$

$$\psi(x)=\frac{d^{|N|}}{dx^{|N|}}\varphi(x),\qquad N\leqslant 0, \qquad (60')$$

Сравнивая обе части равенств (60) в окрестности $x=1$ и приводя в согласие коэффициенты при $(x-1)^{N_a-N}$ в уравнениях (60) и при $(x-1)^{N_a}$ в (60′), получаем в случаях $N\geqslant 0$ и $N\leqslant 0$:

$$\varphi(x)=K(N_a,N)\frac{N!}{(N_a-N)!}2^N(x-1)^{N_a-N}(x+1)^{-N_a-1}, \qquad (61)$$

$$\psi(x)=K(N_a,N)(x-1)^{N_a}(x+1)^{N-N_a-1}. \qquad (61')$$

Кроме того, формулы (60) и (60′) легко проверить прямым вычислением, что, однако, для наших целей не требуется.

Теперь определим нормировочный множитель $K(N_a, N)$, используя условие (53′). Левая часть его равна нулю при $N_a' \neq N_a''$ уже вследствие равенства (54). Действительно, подставляя $N_a = N_a''$ в соотношение, сопряженное (53′), умножая на $(N_a' \mid S \mid N_+)(-1)^{N-N_+}$ и суммируя по N_+, находим такую же правую часть, какую мы получили бы, подставляя в равенство (54) $N_a = N_a'$, умножая его на $(-1)^{N-N_+}(N_+ \mid S^\dagger \mid N_a'')$ и суммируя по N_+. Вычитая эти два результата, имеем

$$(N_a''-N_a')(N_a' \mid S(-1)^{N-N_+}S^\dagger \mid N_a'')=0.$$

Теперь нам осталось рассмотреть случай $N_a' = N_a''$. Для того чтобы придать определенный смысл сумме

$$\sum_{N_+}(N_a|S|N_+)(-1)^{N-N_+}(N_+|S^\dagger|N_a),$$

в обычном смысле расходящейся, мы вслед за Дираком будем считать ее равной пределу выражения

$$\lim_{r\to 1} \Sigma(r)$$

при $0 < r < 1$, где

$$\Sigma(r) = \sum_{N_+} (N_a | S | N_+) r^{2N_+} (-1)^{N-N_+} (N_+ | S^\dagger | N_a).$$

Учитывая формулы (55), это выражение можно также записать в виде

$$\Sigma(r) = \sum_{N_+} (-1)^{N-N_+} r^{2N_+} \varphi(N_+) \overline{\psi}(N_+).$$

Как видно из формул (57), с помощью функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, вводя полярные координаты на комплексной плоскости

$$x = re^{i\theta}, \quad \bar{x} = re^{-i\theta}, \qquad 0 < r < 1,$$

сумму $\Sigma(r)$ можно представить как интеграл по единичному кругу, а именно:

$$\Sigma(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\psi}(x)\, x^N \varphi(-x)\, d\theta. \tag{62}$$

Подставляя выражения (61) и (61′), получаем

$$\Sigma(r) = |K(N_a, N)|^2 \frac{N_a!}{(N_a - N)!} 2^N I(r), \tag{63}$$

где

$$I(r) = \frac{r^N}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iN\theta} (re^{-i\theta} - 1)^{N_a} (re^{-i\theta} + 1)^{N-N_a-1} (-re^{i\theta} - 1)^{N_a - N} \times$$

$$\times (-re^{i\theta} + 1)^{-N_a-1} d\theta$$

или, вводя $z = e^{-i\theta}$, $dz/iz = -d\theta$,

$$I(r) = (-1)^{N_a - N} \frac{r^N}{2\pi i} \oint dz\, (z + r)^{N_a - N} (z - r)^{-N_a - 1} (rz - 1)^{N_a} (rz + 1)^{N - N_a - 1}, \tag{64}$$

причем контурное интегрирование производится по единичной окружности в положительном направлении. Учитывая, что $N_a - N \geqslant 0$, мы видим, что подынтегральное выражение имеет полюсы при $z = r$ и $z = -r^{-1}$, из которых только первый лежит внутри единичного круга. Поэтому интеграл равен вычету в полюсе $z = r$, а именно:

$$I(r) = (-1)^{N_a - N} r^N \frac{1}{N_a!} \frac{d^{N_a}}{dz^{N_a}} [(z + r)^{N_a - N} (rz + 1)^{N - N_a - 1} (rz - 1)^{N_a}]_{z=r}.$$

К счастью, это выражение в пределе $r = 1$ сильно упрощается, так как последний множитель в скобках равен $(r^2 - 1)^{N_a}$ при $z = r$ и нулю при $r = 1$. Поэтому отличный от нуля вклад при $r \to 1$ дает только производная последнего множителя, и мы получаем:

$$\lim_{r\to 1} I(r) = (-1)^{N_a - N}\frac{1}{2},$$
$$\lim_{r\to 1} \Sigma(r) = (-1)^{N_a - N}\,|K(N_a, N)|^2\, 2^{N-1}\frac{N_a!}{(N_a - N)!}. \qquad (65)$$

Таким образом, условие нормировки (53) или (53′) будет выполнено, если мы выберем

$$K(N_a, N) = \left[2^{-(N-1)}\frac{(N_a - N)!}{N_a!}\right]^{1/2}. \qquad (66)$$

Фазовый множитель в $K\ (N_a, N)$ остается, конечно, произвольным.

Собирая наши результаты, имеем наконец

$$(N_a\,|\,S\,|\,N_+) = \sqrt{2}\left[2^N\frac{N_a!\,(N_+ - N)!}{(N_a - N)!\,N_+!}\right]^{1/2}\{\text{коэфф. при } x^{N_+ - N} \text{ в } (x-1)^{N_a - N} \times$$
$$\times (x+1)^{-N_a - 1}\}, \qquad (67)$$

$$(N_a\,|\,S\,|\,N_+) = \sqrt{2}\left[2^N\frac{N_a!\,(N_+ - N)!}{(N_a - N)!\,N_+!}\right]^{1/2}\{\text{коэфф. при } x^{N_+} \text{ в } (x-1)^{N_a} \times$$
$$\times (x+1)^{N - N_a - 1}\}.$$

Вследствие полной симметрии в переменных N_a, N_b и N_+, N_- (или N_a, N и N_+, N) обратную функцию преобразования S^{-1}, выражающую $\psi\ (N_+, N_-)$ через $\psi\ (N_a, N_b)$ по формуле

$$\psi(N_+, N_-) = \sum_{N_a, N_b}(N_+, N_-\,|\,S^{-1}\,|\,N_a, N_b)\,\psi(N_a, N_b), \qquad (51')$$

мы получаем, просто меняя местами N_a, N_b и N_+, N_-.

Особый интерес представляет состояние $N^+ = N^- = 0$ (откуда $N = N_+ - N_- = N_a - N_b = 0$), для которого, полагая в формулах (67) $N_a = N_b = n$, находим

$$(n, n\,|\,S\,|\,0, 0) = \sqrt{2}\,(-1)^n.$$

Это означает, что «вероятность значения $n = N_a = N_b$ в состоянии $N_+ = N_- = 0$» дается формулой

$$\eta_n\,|\,(n, n\,|\,S\,|\,0, 0)\,|^2 = 2\,(-1)^n. \qquad (68)$$

Сумма вероятностей, определяемая при $0 < r < 1$ пределом выражения

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} 2\,(-1)^n r^n = \lim_{r\to 1}\frac{2}{1+r},$$

равна 1, как и должно быть. Разумеется, этот результат можно также получить прямо из формулы (54). Это значит, что основное состояние нашей системы двух осцилляторов при использовании в гильбертовом пространстве индефинитной метрики не определяется однозначно; это обстоятельство играет важную роль в теории Дирака.

5. КВАНТОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПОЛЯ

а) Незаряженные частицы со спином 0 или 1 и статистика Бозе

Сначала рассмотрим простейший случай волнового поля с целым спином, а именно вещественное скалярное поле $A(x) = A^*(x)$ в отсутствие взаимодействия. Это поле удовлетворяет волновому уравнению

$$(\Box + \mu^2)A = 0, \tag{69}$$

где

$$\Box = -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2},$$

а $x_0 = ct$ и μ — масса покоящейся частицы (единицы выбраны так, что $\hbar = c = 1$) [4]. Особенно важен случай $\mu = 0$, но мы пока отложим его рассмотрение. Энергия E и импульс $\mathbf{G}$ выражаются формулами:

$$E = \frac{1}{2}\int\left[(\nabla A)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial x_0}\right)^2\right]dV, \qquad \mathbf{G} = -\int \frac{\partial A}{\partial x_0}\nabla A dV. \tag{70}$$

В обычном методе разложение поля на компоненты Фурье (периодические по отношению к большой полости объемом V) производится по формуле

$$A(x) = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}[A(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0)\} + A^*(k)\exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0x_0)\}], \tag{71}$$

причем мы считаем величину k_0 положительной и удовлетворяющей условию $k_0^2 = \mathbf{k}^2 + \mu^2$, откуда

$$k_0 = (\mathbf{k}^2 + \mu^2)^{1/2}.$$

Обычное квантование с помощью соотношения

$$[A(k), A^*(k)] = 1 \tag{72}$$

при коммутативности всех переменных, соответствующих различным значениям k, приводит к формуле

$$A^*(k)A(k) = N_u(k) \tag{73}$$

[4] Ср. статью «А», ч. А, разд. I, г. Функция поля, которая здесь обозначается через $A(x)$, там — через $V(x)$.

и к выражениям для энергии и импульса:

$$E=\sum_k k_0\left[N_a(k)+\frac{1}{2}\right],\qquad \mathbf{G}=\sum_k \mathbf{k}\left[N_a(k)+\frac{1}{2}\right]. \tag{74}$$

Дирак предложил метод разложения вещественного поля $A(x)$ на два комплексных поля $U(x)$, $U^*(x)$:

$$A(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[U(x)+U^*(x)]. \tag{75}$$

В этом методе обычным способом квантуются только осцилляторы поля $U(x)$ с фазовым множителем, содержащим $(-k_0x_0)$, тогда как другая часть осцилляторов поля $U(x)$ с фазовым множителем, содержащим $(+k_0x_0)$, квантуется по новому способу, изложенному в двух предыдущих разделах и приводящему к отрицательным энергиям этих осцилляторов. Это значит, что мы должны положить:

$$U(x)=V^{-1/2}\sum_k(2k_0)^{-1/2}[U_+(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)\}+$$
$$+U_-(k)\exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+k_0x_0)\}], \tag{76}$$

$$U^*(x)=V^{-1/2}\sum_k(2k_0)^{-1/2}[U_+^*(k)\exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+k_0x_0)\}+$$
$$+U_-^*(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)\}]. \tag{76'}$$

Определяя энергию и импульс по формулам

$$E=\int\left[\nabla U^*\nabla U+\frac{\partial U^*}{\partial x_0}\frac{\partial U}{\partial x_0}+\mu^2U^*U\right]dV,$$
$$\mathbf{G}=-\int\left[\frac{\partial U^*}{\partial x_0}\nabla U+\nabla U^*\frac{\partial U}{\partial x_0}\right]dV \tag{77}$$

(причем в подынтегральном выражении второй формулы производится симметризация по порядку сомножителей), предполагая, что $U_+^*(k)$ и $U_+(k)$ коммутируют с $U_-^*(k)$ и $U_-(k)$, и полагая

$$[U_+(k),U_+^*(k)]=1,\qquad [U_-(k),U_-^*(k)]=1, \tag{78}$$

мы удовлетворяем правилу

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}=i[H,F], \tag{79}$$

примененному к $F=U(x)$ и $F=U^*(x)$. Кроме того, это оставляет обычные соотношения коммутации для $U^*(x)$, $U(x)$ неизменными [см. статью А, ч. II, соотношение (21)]. Последнее уравнение означает, что величина $U_-^*(k)$ является сопряженной, но уже не эрмитово-сопряженной величине $U_-(k)$. В соответствии с формулами (33), (34) получаем:

$$N_+(k)=U_+^*(k)U_+(k),\qquad N_-(k)=-U_-^*(k)U_-(k) \tag{80}$$

и

$$E = \sum_k k_0 [N_+(k) - N_-(k)],$$
$$\mathrm{G} = \sum_k \mathbf{k} [N_+(k) - N_-(k)]. \tag{81}$$

Эти равенства говорят о том, что энергия N_- осцилляторов отрицательна. Нормировка волновой функции, аналогичная нормировке (35)

$$\sum_{N_+(k),\, N_-(k)} (-1)^{\sum_k N_-(k)} \overline{\psi}\{\ldots . N_+(k) \ldots , \ldots N_-(k) \ldots\} \times$$
$$\times \psi\{\ldots N_+(k) \ldots , \ldots N_-(k) \ldots\} = \mathrm{const}, \tag{82}$$

показывает «отрицательную вероятность» состояний с нечетным числом частиц, имеющих отрицательную энергию.

Эта процедура эквивалентна также тому, что кроме $A(x)$ вводится еще одно поле $B(x)$ [5], причем сопряженное ему поле $B^*(x) = -B(x)$,

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [U(x) - U^*(x)], \tag{75'}$$

или в форме разложения Фурье

$$B(x) = V^{-1/2} \sum_k (2k_0)^{-1/2} [B^*(k) \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)\} -$$
$$- B(k) \exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)\}] \tag{71'}$$

с условием квантования

$$[B(k), B^*(k)] = -1, \tag{72'}$$

приводящим к равенству

$$B^*(k) B(k) = - N_b(k) \tag{73'}$$

и к выражениям для энергии и импульса:

$$E = \frac{1}{2} \int \left[(\nabla A)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial x_0}\right)^2 - (\nabla B)^2 - \left(\frac{\partial B}{\partial x_0}\right)^2 \right] dV, \tag{70'}$$
$$\mathrm{G} = \int \left[-\frac{\partial A}{\partial x_0} \nabla A + \frac{\partial B}{\partial x_0} \nabla B \right] dV.$$

В последнем выражении следует симметризовать порядок всех некоммутирующих сомножителей. Из приведенных выше формул получаем:

$$E = \sum_k k_0 [N_a(k) - N_b(k)],$$
$$\mathrm{G} = \sum_k \mathbf{k} [N_a(k) - N_b(k)]. \tag{74'}$$

[5] Для функций $A(x)$, $B(x)$ в статье «А», ч. II применялись обозначения $V(x)$, $iW(x)$. Связь этих функций с $U(x)$, $U^*(x)$ дана там соотношениями (33).

Связь между $U_+(k)$, $U_-(k)$ и сопряженными им величинами, с одной стороны, и $A(k)$, $B(k)$ и сопряженными им величинами — с другой, вследствие равенств (75), (75′) дается формулами, аналогичными (37), (38):

$$A =(k) \frac{1}{\sqrt{2}}[U_+(k) + U_-^*(k)], \qquad A^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[U_+^*(k) + U_-(k)], \quad (37')$$

$$B(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[U_+^*(k) - U_-(k)], \qquad B^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[U_+(k) - U_-^*(k)]. \quad (38')$$

Обратные формулы получаются путем перестановки $A(k)$, $B(k)$ с величинами $U_+(k)$, $U_-(k)$ и путем такой же перестановки — формулы для сопряженных величин.

Альтернативный путь разложения поля $A(x)$ состоит в том, чтобы отнести все осцилляторы с положительной энергией к полю $A_+(x) = A_+^*(x)$ и все осцилляторы с отрицательной энергией к полю $A_-(x) = A_-^*(x)$ по формулам [6]:

$$\begin{aligned} A_+(x) &= V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}\{u_+(k)\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})] + u_+^*(k)\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]\}, \\ A_-(x) &= V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}\{u_-^*(k)\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})] + u_-(k)\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]\}, \end{aligned} \quad (83)$$

$$A(x) = (1/\sqrt{2})\,[A_+(x) + A_-(x)]. \quad (84)$$

В целях подготовки к обсуждению взаимодействия поля с заряженными частицами мы ввели здесь наряду с постоянными величинами $U_+(k)$, $U_-(k)$ и их сопряженными еще и величины, зависящие от времени:

$$\begin{aligned} u_+(k) &= U_+(k)\exp(-ik_0x_0), & u_+^*(k) &= U_k^*(k)\exp(ik_0x_0), \\ u_-(k) &= U_-(k)\exp(ik_0x_0), & u_-^*(k) &= U_-^*(k)\exp(-ik_0x_0). \end{aligned} \quad (85)$$

Соответствующее разложение $B(x)$ на $B_+(x) = -B_+^*(x)$, $B_-(x) = -B_-^*(x)$ по формуле

$$B(x) = (1/\sqrt{2})\,[B_+(x) + B_-(x)] \quad (86)$$

приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} B_+(x) &= V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}\{u_+(k)\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})] - u_+^*(k)\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]\}, \\ B_-(x) &= V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}\{-u_-^*(k)\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})] + u_-(k)\exp[\,i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]\}. \end{aligned} \quad (87)$$

Если мы для каждого значения k введем по формулам (30) и (31) переменные $p_+(k)$, $q_+(k)$, $p_-(k)$, $q_-(k)$ и, используя аналогию с равенствами (85), отождествим $a(k)$, $b(k)$ и сопряженные им величины (37), (38) с

[6] В статье Дирака наши переменны е $A_+(x)$, $A_-(x)$ обозначаются $A^1(x)$, $A^2(x)$.

выражениями

$$a(k) = A(k)\exp(-ik_0x_0), \qquad a^*(k) = A^*(k)\exp(ik_0x_0),$$
$$b(k) = B(k)\exp(ik_0x_0), \qquad b^*(k) = B^*(k)\exp(-ik_0x_0), \tag{88}$$

то величины $A_+(x)$, $A_-(x)$, $B_+(x)$, $B_-(x)$ можно будет представить в виде:

$$A_+(x) = V^{-1/2}\sum_k k_0^{-1/2}[p_+(k)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + q_+(k)\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})], \tag{89}$$

$$A_-(x) = V^{-1/2}\sum_k k_0^{-1/2}[p_-(k)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + q_-(k)\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})], \tag{90}$$

$$B_+(x) = V^{-1/2}\sum_k k_0^{-1/2}\, i\,[-q_+(k)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + p_+(k)\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})], \tag{91}$$

$$B_-(x) = V^{-1/2}\sum_k k_0^{-1/2}\, i\,[q_-(k)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) - p_-(k)\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]. \tag{92}$$

Далее, определяя самосопряженные величины $p_a(k)$, $q_a(k)$, $p_b(k)$, $q_b(k)$ по формулам (45), (46), (49) и (50), получаем:

$$A(x) = V^{-1/2}\sum_k (k_0)^{-1/2}[p_a(k)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + q_a(k)\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})], \tag{93}$$

$$B(x) = V^{-1/2}\sum_k (k_0)^{-1/2}[-q_b(k)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + p_b(k)\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]. \tag{94}$$

Энергию и импульс можно записать в новых переменных в следующей форме:

$$E = V^{-1/2}\sum_k k_0\cdot\frac{1}{2}[p_a^2(k) + q_a^2(k) + p_b^2(k) + q_b^2(k)] =$$
$$= V^{-1/2}\sum_k k_0\cdot\frac{1}{2}[p_+^2(k) + q_+^2(k) + p_-^2(k) + q_-^2(k)], \tag{95}$$

$$\mathbf{G} = V^{-1/2}\sum_k \mathbf{k}\cdot\frac{1}{2}[p_a^2(k) + q_a^2(k) + p_b^2(k) + q_b^2(k)] =$$
$$= V^{-1/2}\sum_k \mathbf{k}\cdot\frac{1}{2}[p_+^2(k) + q_+^2(k) + p_-^2(k) + q_-^2(k)]. \tag{96}$$

Аналогичное квантование уравнений Максвелла мы получаем, полагая $\mu = 0$ и подставляя вместо скалярных полей поля четырехмерных векторов $A_\nu(x)$, $B_\nu(x)$, $U_\nu(x)$, $U_\nu^*(x)$, ($v = 1, 2, 3$ и 4 или 0), связанных между собой формулами того же вида:

$$A_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[U_\nu(x) + U_\nu^*(x)], \qquad B_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[U_\nu(x) - U_\nu^*(x)]. \tag{97}$$

В формулах для энергии и импульса следует принять во внимание

определение скалярного произведения четырехмерных векторов

$$\sum_{\nu=1}^{4} A_\nu B_\nu = -A_0 B_0 + \sum_{j=1}^{3} A_j B_j,$$

а также ввести в них вместо квадратов функций поля соответствующие инвариантные полные квадраты 4-векторов. Кроме того, необходимо добавить известные дополнительные условия Ферми для всех полей:

$$\sum_{\nu=1}^{4}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\right)\Psi = \sum_{\nu=1}^{4}\left(\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\nu}\right)\Psi = \sum_{\nu=1}^{4}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_\nu}\right)\Psi = \sum_{\nu=1}^{4}\left(\frac{\partial U_\nu^*}{\partial x_\nu}\right)\Psi = 0. \qquad (98)$$

Хотя до этого места теория оставалась симметричной по отношению к N_a и N_b, с одной стороны, и N_+, N_- — с другой, при учете взаимодействия с заряженными частицами эта симметрия уже не сохраняется. Дирак предполагает, что в энергию взаимодействия входит только поле $A_\nu(x)$, а не $B_\nu(x)$; вследствие этого числа $N_b(k)$ сохраняются постоянными во времени. С другой стороны, он предполагает, что, по крайней мере для больших значений k, числа $N_+(k)$ и $N_-(k)$ равны нулю в отличие от чисел $N_a(\mathbf{k})$ и $N_b(k)$. Благодаря этому при вычислениях более удобно применять первые из названных переменных, несмотря на то, что числа N_b представляются излишними.

б) Заряженные частицы [7]

Имея в виду взаимодействие мезонов с тяжелыми частицами (протонами и нейтронами), особенный интерес представляет также рассмотрение полей, описывающих не фотоны, а заряженные частицы. Мы рассмотрим здесь простейший случай частиц со спином 0, так как заряженные частицы со спином 1 могут быть рассмотрены аналогичным образом.

В обычной теории Паули и Вайскопфа вводится комплексное поле $\psi(x)$ (вместо вещественного поля $A(x)$ предыдущего раздела), которое по-прежнему удовлетворяет волновому уравнению

$$(\Box + \mu^2)\psi = 0.$$

Его разложение на компоненты Фурье имеет вид:

$$\psi(x) = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}[A_p(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0)\} + A_n^*(k)\exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0x_0)\}], \qquad (99)$$

$$\psi^*(x) = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}[A_p^*(k)\exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0x_0)\} + A_n(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0x_0)\}].$$

Правила коммутации для величин $A_p(k)$, $A_n(k)$ и им сопряженных будут:

$$[A_p(k), A_p^*(k)] = 1, \qquad [A_n(k), A_n^*(k)] = 1. \qquad (100)$$

---

[7] Ср. «А», ч. II, § 1, 2.

Напомним [8], что в этой теории числа частиц с положительным и отрицательным электрическим зарядом выражаются соответственно формулами:

$$N_{p,a}(k) = A_p^*(k)A_p(k), \qquad N_{n,a} = A_n^*(k)A_n(k). \tag{101}$$

По аналогии с (71) введем теперь второе дополнительное поле $\varphi(x)$ по формулам:

$$\varphi(x) = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}[B_n^*(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)\} - B_p(k)\exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+k_0x_0)\}],$$

$$\varphi^*(x) = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}[B_n(k)\exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+k_0x_0)\} - B_p^*(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)\}]. \tag{102}$$

Это поле квантуется по формулам:

$$[B_p(k), B_p^*(k)] = -1, \qquad [B_n(k), B_n^*(k)] = -1, \tag{103}$$

$$B_p^*(k)B_p(k) = -N_{p,b}(k), \qquad B_n^*(k)B_n(k) = -N_{n,b}(k). \tag{104}$$

Энергия и импульс определяются выражениями:

$$E = \int\left[\left\{\frac{\partial\psi^*}{\partial x_0}\frac{\partial\psi}{\partial x_0} + \nabla\psi^*\nabla\psi + \mu^2\psi^*\psi\right\} + \left\{\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} + \nabla\varphi^*\nabla\varphi + \mu^2\varphi^*\varphi\right\}\right]dV,$$

$$\mathbf{G} = \int\left[\left\{\frac{\partial\psi^*}{\partial x_0}\nabla\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\nabla\psi^*\right\} + \left\{\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_0}\nabla\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\nabla\varphi^*\right\}\right]dV. \tag{105}$$

Здесь и в дальнейшем всегда подразумевается, что производится симметризация по порядку следования всех некоммутирующих сомножителей. Из этих выражений получаем:

$$E = \sum_k k_0[N_{p,a}(k) + N_{n,a}(k) - N_{p,b}(k) - N_{n,b}(k)],$$

$$\mathbf{G} = \sum_k \mathbf{k}[N_{p,a}(k) + N_{n,a}(k) - N_{p,b}(k) - N_{n,b}(k)]. \tag{106}$$

Для вектора тока s_ν ($\nu = 1, 2, 3$ и 4 или 0, $s_4 = is_0$) имеем

$$s_\nu = ie\left[\left\{\frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\psi^*\right\} + \left\{\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\nu}\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\varphi^*\right\}\right]. \tag{107}$$

Отсюда для полного электрического заряда находим

$$Q = \int s_0\,dV = e\sum_k[N_{p,a}(k) - N_{n,a}(k) + N_{p,b}(k) - N_{n,b}(k)]. \tag{108}$$

Разложение полей $\psi(x)$, $\varphi(x)$, аналогично прежнему разложению $A(x)$ на $U(x)$ и сопряженную величину $U^*(x)$ [см. формулы (75), (75')],

[8] Статья «А», ч. II, соотношения (11), (11*), (19) и (20).

следует производить по формулам:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_p(x)+U_n^*(x)], & \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_p(x)-U_n^*(x)], \\ \psi^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_p^*(x)+U_n(x)], & \varphi^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_p^*(x)-U_n(x)], \end{aligned} \qquad (109)$$

где

$$\begin{aligned} U_p(x) = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}[U_{p,+}(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)\} + \\ + U_{p,-}(k)\exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+k_0x_0)\}], \\ U_p^*(x) = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}[U_{p,+}^*(k)\exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+k_0x_0)\} + \\ + U_{p,-}^*(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)\}], \end{aligned} \qquad (110)$$

и таким же образом

$$\begin{aligned} U_n(x) = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}[U_{n,+}(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)\} + \\ + U_{n,-}(k)\exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+k_0x_0)\}], \\ U_n^*(x) = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}[U_{n,+}^*(k)\exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+k_0x_0)\} + \\ + U_{n,-}^*(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)\}]. \end{aligned} \qquad (111)$$

Квантование производится с помощью соотношений:

$$[U_{p,+}(k), U_{p,+}^*(k)] = [U_{n,+}(k), U_{n,+}^*(k)] = 1, \qquad (112)$$

$$[U_{p,-}(k), U_{p,-}^*(k)] = [U_{n,-}(k), U_{n,-}^*(k)] = -1. \qquad (113)$$

Следовательно, величины $U_{p,-}(k)$, $U_{n,-}(k)$, как и $B_p(k)$, $B_n(k)$, обладают в гильбертовом пространстве индефинитной метрикой; величины $U_{p,+}(k)$, $U_{n,+}(k)$, $A_p(k)$ и $A_n(k)$ имеют определенную метрику в гильбертовом пространстве. Кроме того, имеем:

$$\begin{aligned} U_{p,+}^*(k)U_{p,+}(k) &= N_{p,+}(k), & U_{n,+}^*(k)U_{n,+}(k) &= N_{n,+}(k), \\ U_{p,-}^*(k)U_{p,-}(k) &= -N_{p,-}(k), & U_{n,-}^*(k)U_{n,-}(k) &= -N_{n,-}(k). \end{aligned} \qquad (114)$$

Сравнивая формулы (110), (111) и (99), (102), находим с помощью (109):

$$\begin{aligned} A_p(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_{p,+}(k)+U_{n,-}^*(k)], & A_p^*(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_{p,+}^*(k)+U_{n,-}(k)], \\ A_n(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_{n,+}(k)+U_{p,-}^*(k)], & A_n^*(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_{n,+}^*(k)+U_{p,-}(k)], \end{aligned} \qquad (115)$$

$$\begin{aligned} B_p(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-U_{p,-}(k)+U_{n,+}^*(k)], & B_p^*(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-U_{p,-}^*(k)+U_{n,+}(k)], \\ B_n(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_{p,+}^*(k)-U_{n,-}(k)], & B_n^*(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_{p,+}(k)-U_{n,-}^*(k)]. \end{aligned} \qquad (116)$$

Отсюда

$$N_{p,a}(k) - N_{n,b}(k) = N_{p,+}(k) - N_{n,-}(k),$$
$$N_{n,a}(k) - N_{p,b}(k) = N_{n,+}(k) - N_{p,-}(k), \quad (117)$$

$$E = \sum_k k_0 [N_{p,+}(k) + N_{n,+}(k) - N_{p,-}(k) - N_{n,-}(k)],$$

$$\mathbf{G} = \sum_k \mathbf{k} [N_{p,+}(k) + N_{n,+}(k) - N_{p,-}(k) - N_{n,-}(k)], \quad (118)$$

$$Q = \sum_k [N_{p,+}(k) - N_{n,+}(k) + N_{p,-}(k) - N_{n,-}(k)].$$

Из этих выражений видно, что поле описывает четыре сорта частиц соответственно с положительным и отрицательным зарядом и с положительной и отрицательной энергией. Подставляя формулы (109) в выражения (105) и (107), находим:

$$E = \int \left[\left\{ \frac{\partial U_p^*}{\partial x_0} \frac{\partial U_p}{\partial x_0} + \nabla U_p^* \nabla U_p + \mu^2 U_p^* U_p \right\} + \right.$$
$$\left. + \left\{ \frac{\partial U_n^*}{\partial x_0} \frac{\partial U_n}{\partial x_0} + \nabla U_n^* \nabla U_n + \mu^2 U_n^* U_n \right\} \right] dV,$$
$$\mathbf{G} = -\int \left[\left\{ \frac{\partial U_p^*}{\partial x_0} \nabla U_p + \frac{\partial U_p}{\partial x_0} \nabla U_p^* \right\} + \left\{ \frac{\partial U_n^*}{\partial x_0} \nabla U_n + \frac{\partial U_n}{\partial x_0} \nabla U_n^* \right\} \right] dV, \quad (119)$$

$$s_\nu = ie \left[\left\{ \frac{\partial U_p^*}{\partial x_\nu} U_p - \frac{\partial U_p}{\partial x_\nu} U_p^* \right\} - \left\{ \frac{\partial U_n^*}{\partial x_\nu} U_n - \frac{\partial U_n}{\partial x_\nu} U_n^* \right\} \right]. \quad (120)$$

Во внешнем электромагнитном поле с потенциалом $\varphi_\nu(x)$ следует произвести замену:

$$\frac{\partial U_p}{\partial x_\nu} \to \frac{\partial U_p}{\partial x_\nu} - ie\varphi_\nu U_p, \qquad \frac{\partial U_p^*}{\partial x_\nu} \to \frac{\partial U_p^*}{\partial x_\nu} + ie\varphi_\nu U_p^*,$$
$$\frac{\partial U_n}{\partial x_\nu} \to \frac{\partial U_n}{\partial x_\nu} + ie\varphi_\nu U_n, \qquad \frac{\partial U_n^*}{\partial x_\nu} \to \frac{\partial U_n^*}{\partial x_\nu} - ie\varphi_\nu U_n^*. \quad (121)$$

Таким образом, функции U_p, U_n^* при градиентном преобразовании $\varphi_\nu \to \varphi_\nu - (i/e)(\partial\alpha/\partial x_\nu)$ умножаются на $e^{i\alpha}$, тогда как U_p^*, U_n умножаются на $e^{-i\alpha}$. Эта форма теории фундаментально отличается от прежней теории Паули—Вайскопфа. Согласно формулам (99) вектор тока s_ν, образованного полем $\psi(x)$, содержит члены вида $A_p(k)A_n(k')$ и $A_p^*(k)A_n^*(k')$, которые соответствуют поглощению и испусканию пар частиц с положительным и отрицательным электрическим зарядом. Однако выражение (120) в соответствии с формулами (110) и (111) не содержит членов такого рода и коммутирует с полным числом частиц p и n. Следовательно, в этом математическом описании нет рождения пар и их аннигиляции, а происходят только переходы частицы из состояния с положительной в состояние

с отрицательной энергией, как это было в первоначальной дираковской теории электрона со спином $^1/_2$. Физическая интерпретация этого описания обсуждается ниже, в разд. 7. Мы отметим здесь, что в общем случае, разумеется, новое математическое описание включает также изменение числа заряженных частиц при взаимодействии одних заряженных частиц с другими заряженными частицами (например, при взаимодействии заряженных мезонов с протонами и нейтронами).

Для полноты укажем еще, что возможно ввести другие, иногда более удобные переменные с помощью отделения вещественной и мнимой частей $\psi(x)$:

$$\psi_\alpha(x) = \psi_\alpha^*(x), \qquad \alpha = 1, 2, \tag{122}$$

по формулам

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x) - i\psi_2(x)], \qquad \psi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x) + i\psi_2(x)], \tag{123}$$

и аналогично для $\varphi(x)$:

$$\varphi_\alpha(x) = -\varphi_\alpha^*(x), \tag{122'}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)], \qquad \varphi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)]. \tag{123'}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\alpha=1,2} \frac{1}{2}\int\left[\left\{\left(\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_0}\right)^2 + (\nabla\psi_\alpha)^2 + \mu^2\psi_\alpha^2\right\} - \left\{\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_0}\right)^2 + (\nabla\varphi_\alpha)^2 + \mu^2\varphi_\alpha^2\right\}\right]dV, \\ \mathrm{G} &= \sum_{\alpha=1,2} \frac{1}{2}\int\left[-\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_0}\nabla\psi_\alpha + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_0}\nabla\varphi_\alpha\right]dV, \end{aligned} \tag{124}$$

$$s_\nu = e\left[\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial x_\nu}\psi_2 - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_\nu}\psi_1\right\} - \left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu}\varphi_2 - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_\nu}\varphi_1\right\}\right]. \tag{125}$$

Полагая аналогичным образом

$$\begin{aligned} U_p(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\bar{U}_1(x) - iU_2(x)], \qquad & U_p^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_1^*(x) + i\bar{U}_2^*(x)], \\ U_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_1(x) + iU_2(x)], \qquad & U_n^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_1^*(x) - iU_2^*(x)], \end{aligned} \tag{126}$$

и учитывая формулы (109), получаем:

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[U_\alpha(x) + U_\alpha^*(x)], \qquad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[U_\alpha(x) - U_\alpha^*(x)]. \tag{127}$$

Соответствующие выражения для энергии, импульса и вектора тока имеют

вид:

$$E = \sum_{\alpha=1,2} \int \left[\frac{\partial U_\alpha^*}{\partial x_0} \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_0} + \nabla U_\alpha^* \nabla U_\alpha + \mu^2 U_\alpha^* U_\alpha \right] dV,$$

$$\mathbf{G} = \sum_{\alpha=1,2} \int \left[\frac{\partial U_\alpha^*}{\partial x_0} \nabla U_\alpha + \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_0} \nabla U_\alpha^* \right] dV, \tag{128}$$

$$s_\nu = e \left[\frac{\partial U_1^*}{\partial x_\nu} U_2 - \frac{\partial U_2^*}{\partial x_\nu} U_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_\nu} U_2^* - \frac{\partial U_2}{\partial x_\nu} U_1^* \right]. \tag{129}$$

Мы подчеркиваем, однако, что существует и другая схема описания полей заряженных частиц, более похожая на прежнюю теорию Паули — Вайскопфа. Расщепим поле по формуле

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [U_+(x) + U_-(x)], \tag{130}$$

где

$$U_+(x) = V^{-1/2} \sum_k (2k_0)^{-1/2} [U_{p,+}(k) \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)\} + $$
$$+ U_{n,+}^*(k) \exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)\}], \tag{131}$$
$$U_-(x) = V^{-1/2} \sum_k (2k_0)^{-1/2} [U_{p,-}(k) \exp\{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)\} + $$
$$+ U_{n,-}^*(k) \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0)\}],$$

и определим дополнительное поле, отличное от $\varphi(x)$, следующим образом:

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [U_+(x) - U_-(x)]. \tag{132}$$

Тогда энергия, импульс и вектор тока будут выражаться формулами:

$$E = \int \left[\left\{ \frac{\partial \psi^*}{\partial x_0} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} + \nabla\psi^* \nabla\psi + \mu^2 \psi^* \psi \right\} + \left\{ \frac{\partial \chi^*}{\partial x_0} \frac{\partial \chi}{\partial x_0} + \nabla\chi^* \nabla\chi + \mu^2 \chi^* \chi \right\} \right] dV,$$

$$\mathbf{G} = -\int \left[\left\{ \frac{\partial \psi^*}{\partial x_0} \nabla\psi + \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \nabla\psi^* \right\} + \left\{ \frac{\partial \chi^*}{\partial x_0} \nabla\chi + \frac{\partial \chi}{\partial x_0} \nabla\chi^* \right\} \right] dV, \tag{133}$$

$$s_\nu = ie \left[\left\{ \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\nu} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \psi^* \right\} + \left\{ \frac{\partial \chi^*}{\partial x_\nu} \chi - \frac{\partial \chi}{\partial x_\nu} \chi^* \right\} \right], \tag{134}$$

или еще в другой форме:

$$E = \int \left[\left\{ \frac{\partial U_+^*}{\partial x_0} \frac{\partial U_+}{\partial x_0} + \nabla U_+^* \nabla U_+ + \mu^2 U_+^* U_+ \right\} + \right.$$
$$\left. + \left\{ \frac{\partial U_-^*}{\partial x_0} \frac{\partial U_-}{\partial x_0} + \nabla U_-^* \nabla U_- + \mu^2 U_-^* U_- \right\} \right] dV,$$

$$\mathbf{G} = -\int \left[\left\{ \frac{\partial U_+^*}{\partial x_0} \nabla U_+ + \frac{\partial U_+}{\partial x_0} \nabla U_+^* \right\} + \left\{ \frac{\partial U_-^*}{\partial x_0} \nabla U_- + \frac{\partial U_-}{\partial x_0} \nabla U_-^* \right\} \right] dV, \tag{135}$$

$$s_\nu = ie\left[\left\{\frac{\partial U_+^*}{\partial x_\nu}U_+ - \frac{\partial U_+}{\partial x_\nu}U_+^*\right\} + \left\{\frac{\partial U_-^*}{\partial x_\nu}U_- - \frac{\partial U_-}{\partial x_\nu}U_-^*\right\}\right]. \qquad (136)$$

Выражения (118) для E, $\mathbf{G}$ и Q все еще остаются справедливыми, но выражение для тока отличается существенно. Оно не содержит, в соответствии с (131), операторов, отвечающих переходам из состояний с положительной в состояния с отрицательной энергией частицы, но в него входят операторы, отвечающие рождению и аннигиляции пар с противоположными зарядами, как в прежней теории. Мы не приводим деталей разложения самосопряженных полей $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, определенных формулами (123), на их самосопряженные части $U_{\alpha,+}(x)$, $U_{\alpha,-}(x)$ с положительной и отрицательной энергией; это разложение следует проводить совершенно аналогично тому, что было сделано выше. Соответствующее выражение для тока имеет вид

$$s_\nu = e\left[\left\{\frac{\partial U_{1,+}}{\partial x_\nu}U_{2,+} - \frac{\partial U_{2,+}}{\partial x_\nu}U_{1,+}\right\} + \left\{\frac{\partial U_{1,-}}{\partial x_\nu}U_{2,-} - \frac{\partial U_{2,-}}{\partial x_\nu}U_{1,-}\right\}\right]. \qquad (137)$$

Во внешнем поле необходимо произвести для «+»- и «—»-частей замену:

$$\frac{\partial U_\pm}{\partial x_\nu} \to \frac{\partial U_\pm}{\partial x_\nu} - ie\varphi_\nu U_\pm, \qquad \frac{\partial U_\pm^*}{\partial x_\nu} \to \frac{\partial U_\pm^*}{\partial x_\nu} + ie\varphi_\nu U_\pm^*. \qquad (138)$$

Градиентное преобразование производится следующим образом:

$$\varphi_\nu = \varphi_\nu - \frac{i}{e}\frac{\partial \alpha}{\partial x_\nu}, \qquad U_\pm \to U_\pm e^{i\alpha}, \qquad U_\pm^* \to U_\pm e^{-i\alpha}. \qquad (139)$$

Более детальное рассмотрение двух альтернативных форм теории заряженных частиц мы отложим до следующего раздела, а здесь сделаем несколько предварительных замечаний. Нулевая энергия вакуума части поля с положительной энергией точно компенсируется нулевой энергией части поля с отрицательной энергией также и во внешнем электромагнитном поле; поэтому все эффекты, обусловленные так называемой поляризуемостью вакуума, исчезают. С другой стороны, собственная энергия как вакуума, так и отдельной частицы, обусловленная электромагнитным взаимодействием частиц, приводит во второй форме теории к бесконечностям, в то время как бесконечности полностью исключаются в прежней альтернативной форме теории с фиксированным числом частиц.

Эта прежняя форма теории в случае обыкновенного электрона со спином $^1/_2$ аналогична первоначальной форме теории электрона, предложенной Дираком, а вторая альтернативная форма теории аналогична несколько модифицированной теории дырок. Мы должны иметь в виду, что принцип определения вакуума как состояния с низшей энергией был уже отвергнут нами в математическом описании, когда фотонный вакуум был определен условием $N_+ = N_- = 0$. Поэтому (и это станет более ясным в разд. 7, где рассматривается физическая интерпретация теории) мы вводим кроме обычного поля $u_p(x)$ (спинорный индекс здесь опущен),

удовлетворяющего уравнению Дирака, второе поле $u_n(x)$, также удовлетворяющее этому уравнению. Однако мы предполагаем, что во внешнем электромагнитном поле следует для первого поля производить замену

$$\frac{\partial u_p}{\partial x_\nu} \to \frac{\partial u_p}{\partial x_\nu} - ie\varphi_\nu u_p, \qquad \frac{\partial \overset{*}{u}_p}{\partial x_\nu} \to \frac{\partial \overset{*}{u}_p}{\partial x_\nu} + ie\varphi_\nu \overset{*}{u}_p, \tag{140}$$

а для второго поля

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_\nu} \to \frac{\partial u_n}{\partial x_\nu} + ie\varphi_\nu u_n, \qquad \frac{\partial \overset{*}{u}_n}{\partial x_\nu} \to \frac{\partial \overset{*}{u}_n}{\partial x_\nu} - ie\varphi_\nu \overset{*}{u}_n. \tag{141}$$

Поэтому вектор полного тока приобретает вид

$$s_\nu = e\,[(\overset{*}{u}_p\alpha_\nu u_p) - (\overset{*}{u}_n\alpha_\nu u_n)], \tag{142}$$

где $\alpha_4 = iI$, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — пространственные части матриц Дирака. «Вакуум», аналогичный вакууму, определенному условием $N_+ = N_- = 0$ в теории бозе-частиц, получается в следующем предположении: *все состояния с отрицательной энергией p-частиц* [*поле* $u_p(x)$] *должны быть заняты, а все состояния с положительной энергией n-частиц* [*поле* $u_n(x)$] *должны быть незаняты*. Используя принцип зарядово-сопряженных решений, легко доказать, что в этом представлении не существует ни нулевой энергии, ни нулевого заряда даже в присутствии внешнего электромагнитного поля. Следовательно, «поляризация вакуума» отсутствует абсолютно. С другой стороны, здесь, как и в аналогичной картине для заряженных бозе-частиц, снова появляются бесконечные значения собственной энергии, обусловленные электромагнитным взаимодействием, так как при использовании принципа запрета p- и n-частицы должны считаться нетождественными (см. разд. 7).

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

а) Предельный λ-процесс. Электростатическая собственная энергия

Мы будем рассматривать взаимодействие электронов с электромагнитным полем в две стадии: сначала введем так называемый предельный λ-процесс, а затем допустим, в соответствии с результатами предыдущих разделов, что фотоны могут иметь отрицательную энергию. Предельный λ-процесс, предложенный Вентцелем [9], первоначально развивался как чисто классический метод релятивистски-инвариантного устранения сингулярностей, связанных с классической электромагнитной собственной энергией точечного источника, при условии, что уравнения Максвелла остаются применимыми и вблизи источника. Этот метод основывается на

[9] *G. Wentzel.* Z. Phys., 1933, **86**, 479, 635; 1934, **87**, 726.

формализме Дирака — Фока — Подольского, в котором для каждой электрически заряженной частицы и для электромагнитного поля вводятся свои временны́е координаты. Вентцель показал, что этот метод легко переносится и в квантовую теорию, если не вводить явно теорию дырок, а использовать теорию Дирака в первоначальной форме, в которой общее число заряженных частиц сохраняется и разрешаются переходы этих частиц в состояния отрицательной энергии. В дальнейшем мы обсудим это ограничение, имеющее, по-видимому, принципиальное значение, а пока тоже будем применять первоначальную форму теории Дирака. Впоследствии Дирак [10] показал, что процесс можно формулировать, вводя измененные перестановочные соотношения для полей [11]

$$i\,[A_\mu(\mathbf{x}, x_0),\ A_\nu(\mathbf{x}, x_0)] = \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu}\,[D(\mathbf{x}-\mathbf{x}'+\boldsymbol{\lambda},\ x_0-x_0'+\lambda_0) + D(\mathbf{x}-\mathbf{x}'-\boldsymbol{\lambda},\ x_0-x_0'-\lambda_0)], \quad (143)$$

гда масса покоя фотона в D-функции приравнивается нулю, а новый четырехмерный вектор λ_ν или λ_0, $\boldsymbol{\lambda}$ должен быть временноподобным:

$$\lambda_0^2 > \lambda^2. \quad (144)$$

В окончательном результате следует опять переходить к пределу λ_0, $\boldsymbol{\lambda} \to 0$ таким образом, чтобы условие (144) выполнялось всегда.

Для конечных значений λ результаты будут релятивистски-инвариантными только при условии, что $\boldsymbol{\lambda}$ преобразуется так же (как вектор), тогда как в пределе $\lambda \to 0$ величина λ в окончательные формулы не входит. Мы можем разложить поле на компоненты Фурье по формулам:

$$A_\mu(\mathbf{x}, x_0) = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}\,[a_\mu(k, x_0)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\} + a_\mu^*(k, x_0)\exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\}], \quad (145)$$

$$\frac{dA_\mu(\mathbf{x}, x_0)}{dx_0} = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}\,ik_0\,[-a_\mu(k, x_0)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\} + a_\mu^*(k, x_0)\exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\}]. \quad (146)$$

Соотношения коммутации (143) для определенного момента x_0 эквивалентны соотношениям

$$[a_\mu(k, x_0),\ a_\nu^*(k', x_0)] = \delta_{\mu\nu}\delta_{kk'}\cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}). \quad (147)$$

[10] *P. A. M. Dirac.* Ann. Inst. H. Poincaré, 1939, 9, 13.

[11] Мы применяем здесь обозначения статьи «А». Индексы μ, ν пробегают значения от 1 до 4, причем последний соответствует мнимой координате $x_4 = ix_0$. Компоненты вектора или тензора с индексом 0 всегда удовлетворяют соотношению $A_{\ldots 4\ldots} = iA_{\ldots 0\ldots}$. Следовательно, компоненты с индексом 0 всегда являются контравариантными, как x_0. Кроме того, мы присоединяемся к условию, используемому в «А», что в случае комплексного вектора или тензора, $A^*_{\ldots 4\ldots} = iA^*_{\ldots 0\ldots}$, причем последняя величина является истинной комплексно-сопряженной, или самосопряженной.

В то время как соотношение (143) выполняется также и при $x_0 \neq x_0'$ в случае взаимодействия поля с веществом, если только в обеих полевых величинах время частицы одно и то же, последнее соотношение, уже ограниченное условием $x_0 = x_0'$, не требует введения различных временны́х переменных. Различные временны́е переменные очень удобны для доказательства релятивистской инвариантности метода. Однако, с другой стороны, было бы, вероятно, полезно сформулировать также метод, в котором используются одно-единственное время и гамильтониан H, в действительности выражающий энергию и определяющий зависимость от времени для всех наблюдаемых величин F в соответствии с известным соотношением [ср. (7)]

$$\frac{dF}{dx_0} = i(HF - FH). \tag{148}$$

Мы будем применять здесь этот последний метод. Прежде чем внести необходимые изменения в обычное выражение для H, требуемые λ-процессом, мы сначала заметим, что собственные значения величины $a_\mu^*(k)a_\mu(k)$ в соответствии с соотношением (147) даются формулой

$$a_\mu^*(k)a_\mu(k) = N_\mu(k)\cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}), \tag{149}$$

где $k_0 = |\mathbf{k}|$, масса покоя фотона равна нулю, а $N_\mu(k)$ — нуль или положительные целые числа при $\mu = 1, 2, 3$, но отрицательные целые числа при $\mu = 4$. [Заметим, что величина $-a_0^* a_0 = a_4^* a_4$ имеет отрицательные собственные значения, в соответствии с соотношением (147) равные $(-1, -2, -3, \ldots)\cos(\lambda_0 k_0 - \cdot\boldsymbol{\lambda}\mathbf{k})$]. Это утверждение будет справедливо также для отрицательного знака множителя при косинусе в формуле (149), если мы будем считать в этом случае, что $a_\mu^*(k)$ — величина, самосопряженная, а не эрмитово-сопряженная, величине $a_\mu(k)$ аналогично соотношениям (19), (20).

Гамильтониан H состоит из трех частей: энергии свободного поля излучения H_0, энергии свободных электронов H_m и энергии взаимодействия Ω:

$$H = H_0 + H_m + \Omega.$$

Сначала мы должны написать

$$H_0 = \sum_k k_0\left[\sum_\mu N_\mu(k) + \frac{1}{2}\right] = \sum_k k_0[\cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k})]^{-1} \times \\ \times \frac{1}{2}\sum_\mu [a_\mu^*(k)a_\mu(k) + a_\mu(k)a_\mu^*(k)]. \tag{150}$$

Множитель $[\cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k})]^{-1}$ может показаться странным, но он необходим для того, чтобы удовлетворить соотношению (146) и правилу (148), примененным к $A_\mu(x)$ с учетом (147). При формулировании λ-процесса с помощью нескольких временны́х переменных это обстоятельство не так очевидно, так как тогда не требуется выделять H_0 явно. Энергия частиц для системы электронов, со спином $1/2$, характеризуемых индексом n, опре-

деляется формулой

$$H_m = \sum_n [(\alpha^{(n)} \cdot \mathbf{p}^{(n)}) + m\beta^{(n)}], \tag{151}$$

где введены обычные матрицы Дирака α, β. Энергия взаимодействия записывается в виде

$$\Omega = (4\pi)^{1/2} e \sum_n [-A_0(\mathbf{z}_n) + \alpha^{(n)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{z}_n)] =$$

$$= \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e \sum_n \sum_k (2k_0)^{-1/2} [\{-a_0(k) + \alpha^{(n)} \cdot \mathbf{a}(k)\} \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)\} +$$

$$+ \{-\overset{*}{a}_0(k) + \alpha^{(n)} \cdot \mathbf{a}(k)\} \exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)\}]. \tag{152}$$

Здесь $\mathbf{z}_n$ — пространственная координата n-й частицы; знак выбран так, что для электронов с отрицательным зарядом e означает положительную абсолютную величину заряда; множитель $(4\pi)^{1/2}$ добавлен для того, чтобы измерять заряд в обычных единицах, а не в единицах Хевисайда, тогда как потенциалы, в соответствии с выражением (150), измеряются в единицах Хевисайда. Видно, что формула (146) в силу соотношения (148) остается справедливой и при учете энергии взаимодействия (152), так как последняя величина коммутирует с $A_\mu(x)$. Импульс $\mathbf{p}^{(n)}$ удовлетворяет обычным правилам коммутации:

$$i[p_i^{(n)}, z_j^{(m)}] = \delta_{ij}\delta_{nm} \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{153}$$

Корректное обобщение дополнительных условий (98) в случае, когда принимается во внимание энергия взаимодействия, для k-пространства выражается формулами:

$$X(k)\Psi = 0, \qquad X^*(k)\Psi = 0, \tag{154}$$

где

$$X(k) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{a}(k) - k_0 a_0(k) - \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e (2k_0)^{-1/2} \sum_n \exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)] \cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}). \tag{155}$$

Дополнительный член в правой части этого выражения однозначно определяется условием, что уравнение $(dX/dx_0)\Psi = i[H, \Psi] = 0$ должно быть следствием самих условий (154). Используя соотношения (147) и (153), мы действительно получаем:

$$[H, X(k)] = -k_0 X(k), \qquad [H, X^*(k)] = k_0 X^*(k). \tag{156}$$

Кроме того, учитывая равенство $k_0^2 = \mathbf{k}^2$, имеем

$$[X(k), X^*(k)] = 0. \tag{156'}$$

Дальнейшее упрощение задачи возможно, если разложить поле на продольную и поперечную части (конечно, это разложение зависит от выбранной системы координат). Соответствующее разложение для $\mathbf{a}(k)$

производится по формулам:

$$\mathbf{a}(k) = \mathbf{a}^L(k) + \mathbf{a}^T(k), \quad \mathbf{a}^L(k) = (\mathbf{k}/k_0^2)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}(k)),$$
$$\mathbf{a}^T(k) = \mathbf{a}(k) - (\mathbf{k}/k_0^2)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}(k)). \tag{157}$$

Аналогичные формулы справедливы для $\mathbf{a}^*(k)$. Оператор $X(k)$ содержит только продольную часть $\mathbf{a}^L(k)$ и коммутирует с $\mathbf{a}^{*T}(k)$. Кроме того, мы имеем

$$[a_i^T(k),\ a_j^{*T}(k)] = [\delta_{ij} - (k_i k_j/k_0^2)]. \tag{158}$$

Применяя равенство

$$\sum_\mu a_\mu^*(k)\, a_\mu(k) = \mathbf{a}^{*T}(k)\cdot\mathbf{a}^T(k) - a_0^*(k)\, a_0(k) + \frac{1}{k_0^2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}^*(k))(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}(k)),$$

разложим H на две части

$$H = \sum_k \frac{1}{k_0}[\cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k})]^{-1}\cdot\frac{1}{2}\Big[\Big\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}^*(k) + k_0 a_0^*(k) +$$
$$+ \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e(2k_0)^{-1/2}\sum_n \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)]\cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k})\Big\} X(k) +$$
$$+ \Big\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}(k) + k_0 a_0(k) + \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e(2k_0)^{-1/2}\sum_n \exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)]\ \times$$
$$\times \cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k})\Big\} X^*(k)\Big] + H'. \tag{159}$$

Вводя сокращенное обозначение

$$\mathbf{p}'^{(n)} = \mathbf{p}^{(n)} + \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e\sum_k (2k_0)^{-1/2}\sum_n \{\mathbf{a}^L(k)\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)] +$$
$$+ \mathbf{a}^{*L}(k)\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)]\} = \mathbf{p}^{(n)} + \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e\sum_n \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_n}\sum_k (2k_0)^{-1/2}\ \times$$
$$\times \left\{\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}(k))}{k_0^2}\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)] - \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}^*(k))}{k_0^2}\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)]\right\}, \tag{160}$$

получаем для H' выражение

$$H' = \sum_k k_0[\cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k})]^{-1}\cdot\frac{1}{2}[\mathbf{a}^{*T}(k)\cdot\mathbf{a}^T(k) + \mathbf{a}^T(k)\cdot\mathbf{a}^{*T}(k)] +$$
$$+ \sum_n [(\boldsymbol{\alpha}^{(n)}\cdot\mathbf{p}'^{(n)}) + m\beta^{(n)}] + \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e\sum_k (2k_0)^{-1/2}\ \times$$
$$\times \sum_n [(\boldsymbol{\alpha}^{(n)}\cdot\mathbf{a}^T(k))\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)\} + (\boldsymbol{\alpha}^{(n)}\cdot\mathbf{a}^{*T}(k))\exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)\}] +$$
$$+ \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e^2\sum_k \frac{1}{k_0^2}\cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k})\cdot\frac{1}{2}\sum_n\sum_m \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m)]. \tag{161}$$

Важное свойство операторов $\mathbf{p}'^{(n)}$, $X(k)$, $X^*(k)$ заключается в том, что они коммутируют друг с другом:

$$[p'^{(n)}_i,\ p'^{(m)}_j] = 0, \quad [\mathbf{p}'^{(n)},\ X(k)] = 0, \quad [\mathbf{p}'^{(n)},\ X(k)] = 0. \tag{162}$$

Физический смысл имеют только те наблюдаемые, которые коммутируют с дополнительными условиями, т. е. с операторами $X(k)$, $X^*(k)$; известно, что эти операторы инвариантны относительно градиентного преобразования. Результат (162) показывает, например, что к градиентно-инвариантным величинам принадлежит не оператор $\mathbf{p}^{(n)}$, а оператор $\mathbf{p}'^{(n)}$. До тех пор, пока мы будем рассматривать только градиентно-инвариантные наблюдаемые, можно полагать явно $X(k) = X^*(k) = 0$, вследствие чего в гамильтониане останется только часть H', и тогда можно использовать волновую функцию Ψ' полного набора градиентно-инвариантных переменных, коммутирующих друг с другом. В качестве таких переменных можно взять координаты $\mathbf{z}_{(n)}$ частиц и числа $N_\lambda(k)$ фотонов, относящихся к собственным колебаниям поперечной части поля ($\lambda = 1, 2$ для каждого волнового вектора $\mathbf{k}$ в соответствии с двумя возможными поляризациями). Кроме того, чтобы удовлетворить соотношению $i\,[p'^{(n)}_i,\ z_{ni}] = 1$, достаточно положить [12]

$$\mathbf{p}'^{(n)}\Psi' = -i\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_n}\,\Psi'. \tag{163}$$

[12] Для более детального пояснения мы напишем:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}(k) - k_0 a_0(k) = k_0\,[Q_1(k) + iQ_2(k)],$$
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}^*(k) - k_0 a_0^*(k) = k_0\,[Q_1(k) - iQ_2(k)],$$

где $Q_1(k)$, $Q_2(k)$ — эрмитовы операторы, коммутирующие друг с другом. В соответствии с правилом коммутации (147) определим эрмитовы операторы $P_1(k)$, $P_2(k)$, удовлетворяющие соотношениям:

$$[P_1(k),\ P_2(k)] = 0, \quad i\,[P_1(k),\ Q_1(k)] = i\,[P_2(k),\ Q_2(k)] = \cos(k_0\lambda_0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\lambda}).$$

Мы полагаем для этого

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}(k) + k_0 a_0(k) = ik_0\,[P_1(k) + iP_2(k)],$$
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}^*(k) + k_0 a_0^*(k) = -ik_0\,[P_1(k) - iP_2(k)].$$

Кроме того, определим эрмитовы операторы $X_1(k)$, $X_2(k)$ по формулам:

$$X(k) = X_1(k) + iX_2(k), \quad X^*(k) = X_1(k) - iX_2(k).$$

Из формулы (155) получаем:

$$X_1(k) = k_0 Q_1(k) - \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e\,(2k_0)^{-1/2}\cos(k_0\lambda_0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\lambda})\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n),$$
$$X_2(k) = k_0 Q_2(k) + \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e\,(2k_0)^{-1/2}\cos(k_0\lambda_0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\lambda})\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n).$$

Выражение (160) для $\mathbf{p}'^{(n)}$ теперь принимает вид

$$\mathbf{p}'^{(n)} = \mathbf{p}^{(n)} + \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e\sum_k (2k_0)^{-1/2}\frac{\mathbf{k}}{k_0}\,[(-P_2 + Q_1)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n) - (P_1 + Q_2)\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)].$$

Это будет показано ниже, причем мы будем просто опускать все штрихи.

Теперь рассмотрим в гамильтониане (161) последний член, который возникает из продольной части поля и выражает не что иное, как электростатическую энергию $E^{\text{ст}}$. Производя подстановку

$$\frac{1}{V}\sum_k \to \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}$$

и отделяя члены с $n = m$ от членов с $n \neq m$, получаем

$$E^{\text{ст}} = \sum_n E_0^{\text{ст}} + \sum_{n<m} E_{nm}^{\text{ст}},$$

где

$$E_0^{\text{ст}} = \frac{1}{2} e^2 \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\, k_0^{-2} \cos(k_0\lambda_0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\lambda}), \tag{164}$$

$$E_{nm}^{\text{ст}} = e^2 \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\, k_0^{-2} \cos(k_0\lambda_0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\lambda}) \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m)]. \tag{165}$$

Предполагая, что операторы $\mathbf{p}^{(n)}$, P_1, P_2 имеют обычный вид: $-i\partial/\partial\mathbf{z}_n$, $-i\partial/\partial Q_1$, $-i\partial/\partial Q_2$, найдем теперь результат применения оператора $\mathbf{p}'^{(n)}$ к произвольной функции величин $X_1(k)$, $X_2(k)$. Вклады от операторов $\mathbf{p}^{(n)}$, P_1, P_2 взаимно уничтожаются, и остается выражение

$$\mathbf{p}'^{(n)} F(\ldots X_1(k)\ldots,\ldots X_2(k)\ldots) =$$
$$= F(\ldots X_1(k)\ldots,\ldots X_2(k)\ldots)\left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e\sum_k (2k_0)^{-1/2}\frac{\mathbf{k}}{k_0}\,[Q_1\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n) - Q_2\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)].$$

Для величины

$$\Psi(Q_1(k), Q_2(k), \mathbf{z}_n, N_\lambda(k)) = F(\ldots X_1(k)\ldots,\ldots X_2(k)\ldots)\times$$
$$\times\exp\left[-i\left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e\sum_k (2k_0)^{-1/2} k_0^{-1}\sum_n\{Q_1\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n) + Q_2\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)\}\right]\Psi'(\mathbf{z}_n, N_\lambda(k))$$

мы поэтому получаем

$$\mathbf{p}'^{(n)}\Psi = F\exp[\ldots]\left(-i\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}_n}\right)\Psi'.$$

Чтобы удовлетворить дополнительным условиям

$$X_1(k)\,\Psi = X_2(k)\,\Psi = 0,$$

мы должны положить

$$F = \prod_k \delta(X_1(k))\,\delta(X_2(k)).$$

Фазовый множитель не влияет на величину математического ожидания любой наблюдаемой, коммутирующей с операторами $X_1(k)$, $X_2(k)$, так как эти наблюдаемые являются функциями самих операторов $X_1(k)$, $X_2(k)$ и операторов $\mathbf{z}_n$, $\mathbf{p}'^{(n)}$, а также только поперечной части поля. Поэтому для этих наблюдаемых можно использовать только одну часть волновой функции Ψ', а операторы $X_1(k)$, $X_2(k)$ всюду приравнивать нулю, как указано в тексте.

Выполняя интегрирование по углам в выражении (164), находим

$$E_0^{\text{ст}} = \frac{e^2}{\pi}\int_0^\infty dk_0 \cos(k_0\lambda_0)\frac{\sin(k_0|\boldsymbol{\lambda}|)}{k_0|\boldsymbol{\lambda}|} = \frac{e^2}{2\pi}\int_0^\infty dk_0\left[\frac{\sin k_0(\lambda_0+|\boldsymbol{\lambda}|)}{k_0} - \frac{\sin k_0(\lambda_0-|\boldsymbol{\lambda}|)}{k_0}\right].$$

Два интеграла взаимно уничтожаются, если $\lambda_0^2 > \boldsymbol{\lambda}^2$, в соответствии с условием (144), и мы имеем

$$E_0^{\text{ст}} = 0. \tag{166}$$

Для $\lambda_0^2 < \boldsymbol{\lambda}^2$ эти интегралы складываются, и сумма их пропорциональна $|\boldsymbol{\lambda}|^{-1}$. Для $n \neq m$ достаточно положить $\boldsymbol{\lambda} = 0$, что разрешается условием (144). Выполняя затем интегрирование по углам и полагая

$$r_{nm} = |\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m|, \tag{167}$$

получаем

$$E_{nm}^{\text{ст}} = \frac{2}{\pi}e^2\int_0^\infty dk_0\cos(k_0\lambda_0)\frac{\sin(k_0 r_{nm})}{k_0 r_{nm}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{e^2}{r_{nm}}\int_0^\infty dk_0\left[\frac{\sin k_0(r_{nm}+\lambda_0)}{k_0} - \frac{\sin k_0(r_{nm}-\lambda_0)}{k_0}\right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} E_{nm}^{\text{ст}} &= \frac{e^2}{r_{nm}}, & r_{nm} &> \lambda_0, \\ E_{nm}^{\text{ст}} &= 0, & r_{nm} &< \lambda_0. \end{aligned} \tag{168}$$

До тех пор, пока мы рассматриваем дискретную систему частиц, сингулярный случай $r_{nm} = 0$ можно исключать, и для $r_{nm} > 0$ мы получаем, наконец, в пределе $\lambda_0 \to 0$:

$$\lim_{\lambda_0\to 0} E_{nm}^{\text{ст}} = \frac{e^2}{r_{nm}} \quad \text{для} \quad r_{nm} \neq 0. \tag{168a}$$

В случае непрерывно распределенных зарядов вклад частиц внутри сферы с конечным радиусом λ_0 равен нулю. Если плотность заряда будет регулярной, то для $\lambda_0 \to 0$ этот вклад, разумеется, также будет равен нулю. Однако существуют случаи, когда плотность заряда вокруг частицы на малых расстояниях оказывается сингулярной; тогда может случиться, что вклад в электростатическую энергию от частиц, находящихся на расстояниях, бо́льших λ_0, при $\lambda_0 \to 0$ будет возрастать до бесконечности. В конце этого раздела мы увидим, что такой случай встречается в теории дырок. По мнению автора, ограничительное условие $r_{nm} \neq 0$ для частиц, необходимое для выполнения λ-процесса [13], является не вполне удовлетворительным.

[13] См. прим. 2 и 10.

б) Введение фотонов с отрицательной энергией. Электродинамическая часть собственной энергии в приближении e^2

Введем теперь фотоны с отрицательной энергией, полагая в соответствии с формулами (97), (98), (76) и (137):

$$A_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[U_\nu(x) + U_\nu^*(x)], \tag{169}$$

$$U_\nu(x) = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}\,[u_{\nu,+}(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\} + u_{\nu,-}(k)\exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\}], \tag{170}$$

$$\frac{dU_\nu(x)}{dx_0} = V^{-1/2}\sum_k (2k_0)^{-1/2}\,[-u_{\nu,+}(k)\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\} + u_{\nu,-}(k)\exp\{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\}], \tag{171}$$

$$[u_{\mu,+}(k),\, u^*_{\nu,+}(k)] = \delta_{\mu\nu}\cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}),$$

$$[u_{\mu,-}(k),\, u^*_{\nu,-}(k)] = -\,\delta_{\mu\nu}\cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}), \tag{172}$$

$$a_\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[u_{\mu,+}(k) + u^*_{\mu,-}(k)], \qquad a^*_\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[u^*_{\mu,+}(k) + u_{\mu,-}(k)]. \tag{173}$$

Эти выражения надо подставить в гамильтониан (150), (152) (члены, в H_0, содержащие перекрестные произведения $u^*_{\mu,+}$ и $u_{\mu,-}$, или $u_{\mu,+}$ и $u^*_{\mu,-}$, сокращаются благодаря наличию дополнительного поля, см. разд. 5); дополнительное условие (154) расщепляется следующим образом:

$$X_+(k)\Psi = 0, \qquad X_-(k)\Psi = 0, \qquad X_+^*(k)\Psi = 0, \qquad X_-^*(k)\Psi = 0,$$

где

$$X_+(k) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_+(k) - k_0 u_{0,+}(k) - \left(\frac{\pi}{Vk_0}\right)^{1/2} e\sum_n \exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)]\cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}),$$

$$X_-(k) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_-(k) - k_0 u_{0,-}(k) - \left(\frac{\pi}{Vk_0}\right)^{1/2} e\sum_n \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n)]\cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}). \tag{155'}$$

Аналогичные выражения получаются для сопряженных величин. Для поперечной части поля вместо (158) находим соотношения:

$$[u^T_{i,+}(k),\, u^{*T}_{j,+}(k)] = -\,[u^T_{i,-}(k),\, u^{*T}_{j,-}(k)] = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k_0^2}\right)\cos(k_0\lambda_0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\lambda}). \tag{158'}$$

В гамильтониан H' необходимо просто подставить выражения (173).

Первую часть гамильтониана H', обусловленную только полем излучения, удобно исключить с помощью известного канонического преобразования

$$\tilde{f} = \exp(iH_0x_0)f\exp(-iH_0x_0)$$

для каждой наблюдаемой или оператора. Эта подстановка соответствует

преобразованию волновой функции [14]

$$\widetilde{\Psi} = \exp\,(iH_0x_0)\Psi.$$

Полагая

$$H' = H_0 + H_1,$$

мы получаем теперь

$$\partial\widetilde{\Psi}/\partial x_0 = -i\widetilde{H}_1\widetilde{\Psi}.$$

В нашем частном случае имеем:

$$\widetilde{u}_{\mu,+}\,(k) = u_{\mu,+}\,(k)\exp(-k_0x_0), \qquad \widetilde{u_{\mu,-}}\,(k) = u_{\mu,-}\,(k)\exp(ik_0x_0).$$

Таким образом, учитывая равенства (166), (168а), получаем из выражения (161) (снова опуская знак $\sim$)

$$-\frac{1}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial x_0} = H_1\Psi = \Big\{\sum_n[(\boldsymbol{\alpha}^{(n)}\cdot\mathbf{p}^{(n)}) + m\beta^{(n)}] +$$
$$+\left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2}e\sum_k(2k_0)^{-1/2}\sum_n\boldsymbol{\alpha}^{(n)}\cdot\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\{\mathbf{U}_+^T(k)+\mathbf{U}_-^{*T}(k)\}\exp\{i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n-k_0x_0)\}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\{\mathbf{U}_+^{*T}(k)+\mathbf{U}_-^T(k)\}\exp\{i\,(-\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_n+k_0x_0)\}\Big]+\sum_{n<m}\frac{e^2}{r_{nm}}\Big\}\,\Psi. \qquad (174)$$

Величины $U_\mu\,(k)$ аналогичны величинам, определенным в формуле (76) и в отсутствие H_1 постоянным.

Теперь особо рассмотрим собственную энергию, т. е. энергию в одночастичной задаче одного тела, и вычислим ее с помощью теории возмущений до порядка e^2. Здесь мы имеем

$$\Omega = \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2}e\sum_k(2k_0)^{-1/2}\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\Big[\frac{1}{2}\{\mathbf{U}_+^T(k)+\mathbf{U}_-^{*T}(k)\}\exp\{i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}-k_0x_0)\}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\{\mathbf{U}_+^{*T}(k)+\mathbf{U}_-^T(k)\}\exp\{i\,(-\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}+k_0x_0)\}\Big], \qquad (175)$$

$$p_0\Psi = \{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}) + m\beta + \Omega\}\Psi, \qquad (176)$$

где

$$p_0 = -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad \mathbf{p} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}. \qquad (177)$$

В духе теории возмущений напишем

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \ldots$$

Здесь член Ψ_n имеет порядок величины e^n. Мы получаем:

$$(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - m\beta)\Psi_0 = 0,$$
$$(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - m\beta)\Psi_1 = \Omega\Psi_0, \qquad (178)$$
$$(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - m\beta)\Psi_2 = \Omega\Psi_1.$$

---

[14] См. *P. A. M. Dirac.* Quantum Mechanics. 2 ed. Oxford, 1935, p. 387. (Русск. пер.: *П. А. М. Дирак.* Принципы квантовой механики. М.— Л., ОНТИ, 1937.— *Ред.*).

Выберем начальное состояние, в котором $N_+(k) = N_-(k) = 0$. Обозначим соответствующую собственную функцию фотона через ω_0, находим

$$\Psi_0 = u_0\omega_0, \tag{179}$$

где u_0 — решение уравнения Дирака, имеющее вид

$$u_0 = a \exp[i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{z} - q_0x_0)]. \tag{180}$$

Для энергии и импульса в начальном состоянии здесь введено обозначение q_0, $\mathbf{q}$, чтобы отличать эти величины от операторов p_0, $\mathbf{p}$. Очевидно, имеем $q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m^2 = 0$. Мы не пишем явно спиновый индекс, от которого зависят u_0 и a. Существенно, что в силу формул (16), (16′) получаем

$$\mathbf{U}_+^T(k)\Psi_0 = \mathbf{U}_-^T(k)\Psi_0 = 0, \tag{181}$$

где оба оператора являются операторами поглощения. Это обстоятельство позволяет упрощать вычисления, так как каждое выражение, в правой части которого содержится величина $U(k)$, а не $U^*(k)$, обращается в нуль. Функция Ψ_1 содержит только те состояния, в которых находится один фотон, тогда как Ψ_2 содержит состояния без фотонов и с двумя фотонами. Вводя для собственных функций этих состояний обозначения Ψ_{20} и Ψ_{22} соответственно, можем положить:

$$\Psi_2 = \Psi_{20} + \Psi_{22}, \qquad \Psi_{20} = u_{20}\omega_0.$$

При вычислении собственной энергии во втором приближении существенным является только первое слагаемое.

Учитывая (181), получаем из уравнений (178)

$$(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - m\beta)\Psi_1 = \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e\sum_k (2k_0)^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\,[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{U}_+^{*T}(k))\exp i\{(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{z} - (q_0 - k_0)x_0\} + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{U}_-^{*T}(k))\exp i\{(\mathbf{q}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{z} - (q_0+k_0)x_0\}]\,a\omega_0.$$

Для вычисления Ψ_1 мы используем важное соотношение

$$(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - m\beta)^{-1} = \frac{p_0 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2}. \tag{182}$$

Оно показывает, что оператор, обратный оператору в левой части уравнений (178), можно выразить рационально через p_0 и $\mathbf{p}$. Используя это соотношение, имеем

$$\Psi_1 = \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} e\sum_k (2k_0)^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{(q_0-k_0) + \boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{k}) + m\beta}{(q_0-k_0)^2 - (\mathbf{q}-\mathbf{k})^2 - m^2}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{U}_+^{*T}(k)) \times \exp i\{(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{z} - (q_0-k_0)x_0\} + \frac{(q_0+k_0) + \boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{q}+\mathbf{k}) + m\beta}{(q_0+k_0)^2 - (\mathbf{q}+\mathbf{k})^2 - m^2} \times (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{U}_-^{*T}(k))\exp i\{(\mathbf{q}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{z} - (q_0+k_0)x_0\}\right] a\omega_0. \tag{183}$$

Теперь мы должны применить третье уравнение (178) для Ψ_2. В нем представляет интерес только часть Ψ_2, а именно $\Psi_{20} = u_{20}\omega_0$, которая получается из членов вида $U(k)U^*(k)$, тогда как Ψ_{22} возникает из членов вида $U^*(k)U^*(k)$. Мы можем еще упростить уравнения (181), учитывая соотношение (158'):

$$U^T_{i,+}(k')\,U^{*T}_{j,-}(k)\Psi_0 = U^T_{i,-}(k')\,U^{*T}_{j,+}(k)\,\Psi_0 = 0,$$

$$U^T_{i,+}(k)\,U^{*T}_{j,+}(k')\,\Psi_0 = [U^T_{i,+}(k),\,U^{*T}_{j,+}(k')]_+\,\Psi_0 =$$
$$= \left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k_0^2}\right)\cos(\lambda_0k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k})\,\delta_{kk'}\Psi_0.$$

Аналогично

$$U^T_{i,-}(k)\,U^T_{j,-}(k')\,\Psi_0 = -\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k_0^2}\right)\delta_{kk'}\cos(\lambda_0k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k})\,\Psi_0.$$

Используя этот результат, находим

$$(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - m\beta)\,u_{20} = \frac{\pi e^2}{V}\sum_k\frac{1}{k_0}\sum_{i,\,j=1}^{3}\alpha_i\left[\frac{q_0 - k_0 + \boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{k}) + m\beta}{(q_0-k_0)^2 - (\mathbf{q}-\mathbf{k})^2 - m^2} -\right.$$
$$\left.- \frac{q_0 + k_0 + \boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{q}+\mathbf{k}) + m\beta}{(q_0+k_0)^2 - (\mathbf{q}+\mathbf{k})^2 - m^2}\right]\alpha_j\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k_0^2}\right)\cos(k_0\lambda_0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\lambda})\,u_0. \qquad (184)$$

Заметим, что второй член можно получить из первого, просто заменяя k_0, $\mathbf{k}$ на $-k_0$, $-\mathbf{k}$. Перенесем теперь α_i в правую часть с помощью соотношения

$$\alpha_i\,\{\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{k}) + m\beta\} = -\{\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{k}) + m\beta\}\,\alpha_i - 2\,(q_i - k_i).$$

Кроме того, имеем

$$\sum_{i,j}\alpha_i\alpha_j\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k_0^2}\right) = 2,$$

и в соответствии с волновым уравнением для u_0

$$(q_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{q} - m\beta)u_0 = 0.$$

Наконец, знаменатели можно упростить с помощью равенства $q_0^2 - \mathbf{q}^2 = m^2$; мы получаем

$$(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - m\beta)\,u_{20} = \frac{\pi e^2}{V}\sum_k\left[\frac{-k_0 + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k}) + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{q}) - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k})\,(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})/k_0^2}{k_0(-q_0k_0 + \mathbf{q}\cdot\mathbf{k})} -\right.$$
$$\left.- \frac{k_0 - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k}) + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{q}) - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k})\,(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})/k_0^2}{k_0(q_0k_0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{k})}\right]\cos(k_0\lambda_0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\lambda})\,u_0. \qquad (185)$$

Для наших целей удобно применить к этому уравнению оператор $(p_0 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta)$ слева. Используя равенство

$$(q_0 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{q} + m\beta)\,[-k_0 + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k}) + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{q}) - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k})\,(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})/k_0^2] =$$
$$= [-k_0 - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k}) - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{q}) + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k})\,(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})/k_0^2]\,(-q_0 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{q} + m\beta) +$$
$$+ 2\,[-q_0k_0 + \mathbf{q}^2 + (\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}) - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2/k_0^2],$$

мы находим этим способом

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) u_{20} = \frac{2\pi e^2}{V} \sum_k \left[\frac{q_0 k_0 - \mathbf{q}^2 - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}) - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2/k_0^2}{k_0 (q_0 k_0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{k})} - \right.$$
$$\left. - \frac{-q_0 k_0 - \mathbf{q}^2 + (\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}) - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2/k_0^2}{k_0(-q_0 k_0 + \mathbf{q}\cdot\mathbf{k})} \right] \cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}) u_0. \quad (186)$$

Это уравнение имеет вид

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) u_{20} = c u_0.$$

В приближении e^2 членом cu_{20} можно пренебречь, и сумма $u_0 + u_{20}$ будет удовлетворять уравнению

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 - c)(u_0 + u_{20}) = 0.$$

Таким образом, c есть просто поправка к квадрату массы покоя частицы во втором порядке теории возмущений. Производя замену

$$V^{-1} \sum_k \to \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k},$$

получаем

$$\Delta m^2 = 2m\Delta m = \frac{e^2}{2\pi^2} \int \frac{1}{2} [f(k_0, \mathbf{k}) + f(-k_0, -\mathbf{k})] \cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k})\, d\mathbf{k},$$

где

$$f(k_0, \mathbf{k}) = \frac{q_0 k_0 - \mathbf{q}^2 - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}) + (\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2/k_0^2}{k_0 (q_0 k_0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{k})} = \frac{1}{k_0} \left[1 + \frac{q_0^2 - q^2}{q_0 k_0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{k}} - \frac{q_0}{k_0} - \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})}{k_0^2} \right].$$

Полагая для простоты $\boldsymbol{\lambda} = 0$ и интегрируя по всем направлениям вектора $\mathbf{k}$ при $q = |\mathbf{q}|$, имеем

$$\frac{1}{2}\Delta m^2 = m\Delta m = \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{2} \left[\left\{ k_0 + \left(\frac{m^2}{2q} \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q} - q_0 \right) \right\} + \right.$$
$$\left. + \left\{ -k_0 + \left(\frac{m^2}{2q} \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q} - q_0 \right) \right\} \right] \cos \lambda_0 k_0\, dk_0. \quad (187)$$

Сравним с этим результатом старый результат Валлера [15] для собственной энергии одноэлектронной задачи, который мы представим в виде

$$\frac{1}{2}\Delta m^2 = m\Delta m = \frac{e^2}{\pi} \int_0^{k_m} k_0 dk_0 + \frac{e^2}{\pi} \left(\frac{m^2}{2q} \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q} - q_0 \right) \int_0^{k_m} dk_0. \quad (187')$$

При этом мы учитываем, что для данного импульса электрона $\mathbf{q}$ справедливо равенство $q_0 \Delta q_0 = m\Delta m$. В старой форме теории для устранения бесконечностей приходилось ограничивать интегралы произвольно. Здесь мы устраняем бесконечности, применяя два различных метода одновре-

[15] *I. Waller.* Z. Phys., 1930, 62, 673.

менно, а именно метод предельного λ-процесса и метод фотонов с отрицательной энергией. Первый метод приводит к исчезновению второго интеграла вследствие равенства

$$\int_0^\infty dk \cos \lambda_0 k_0 = 0. \tag{188}$$

Это полностью аналогично устранению электростатической собственной энергии. Действительно, множитель перед вторым интегралом обращается в нуль, если электрон первоначально покоится ($\mathbf{q} = 0$, $q_0 = m$); в этом случае вычисления можно существенно упростить. В общем случае второй член выражает электромагнитную энергию электрона, обусловленную его движением, и в релятивистски-инвариантной теории он имеется во всех случаях, когда существует электростатическая собственная энергия. С другой стороны, первый член в выражении (187), обусловленный флуктуациями поля в вакууме, отражает типично квантовый эффект. Он непосредственно компенсируется вкладом фотонов с отрицательной энергией, в чем можно убедиться, рассматривая подынтегральное выражение в формуле (187). Таким образом, в приближении e^2 окончательным результатом оказывается

$$\Delta m = 0. \tag{189}$$

Теперь мы обобщим оба замечания. Прежде всего заметим, что в формуле (188) используется обобщение обычного понятия интеграла, полезное для осциллирующих подынтегральных функций. Вводится множитель $g(\varepsilon x)$, где $g(x)$ убывает при больших x достаточно быстро, так что по меньшей мере $g'(x) \to 0$ для $x \to \infty$; однако для некоторых подынтегральных выражений требуется убывание нескольких высших производных функций $g(x)$. Кроме того, $g(0) = 1$, и мы предполагаем, что функция $g(x)$ имеет только конечное число максимумов и минимумов между нулем и бесконечностью. Далее, определим интеграл

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\infty f(x)\,g(\varepsilon x)\,dx. \tag{190}$$

Если предел существует, то он не зависит от частного вида функции $g(x)$; например, функция $g(x) = e^{-x}$ удовлетворяет всем требованиям [16].

---

[16] Альтернативой определению (189) может быть следующее: возьмем сначала

$$\int_0^x f(x)\,dx = F(x)$$

и затем вместо $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$ построим, используя среднее значение

$$F_1(x) = \frac{1}{x}\int_0^x F(x)\,dx,$$

Таким способом мы находим:

$$\int_0^\infty x^{2n}\cos x\,dx = 0, \qquad \int_0^\infty x^{2n+1}\sin x\,dx = 0,$$
$$\int_0^\infty x^{2n}\sin x\,dx = (2n)!\,(-1)^n, \qquad \int_0^\infty x^{2n+1}\cos x\,dx = (2n+1)!\,(-1)^{n+1} \tag{188'}$$

при

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Используя предельный λ-процесс, но не вводя фотоны с отрицательной энергией, мы получили бы вместо (187) равенство, полученное ранее Дираком:

$$m\Delta m = (e^2/\pi m)\int_0^\infty k_0\cos\lambda_0 k_0\,dk_0 = -(e^2/\pi m\lambda_0^2).$$

Исключение членов подынтегрального выражения, линейных по k_0, с помощью фотонов с отрицательной энергией также может быть обобщено. Если в старой теории (включая предельный λ-процесс) подынтегральное выражение содержит импульсы фотонов $\mathbf{k}$ для промежуточных состояний в виде $f(\mathbf{k}, k_0)$, то в новой теории подынтегральное выражение имеет вид $^1/_2\,[f(\mathbf{k}, k_0) + f(-\mathbf{k}, -k_0)]$. Это эквивалентно требованию, что после интегрирования по направлениям мы должны брать

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(k_0)\,dk_0 \ \text{ вместо } \int_0^\infty f(k_0)\,dk_0.$$

Это справедливо и для высших приближений, где появляются кратные интегралы, в которых интегрирование проводится по импульсам фотонов в промежуточных состояниях $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \ldots$ и в которых по новой теории следует брать часть подынтегрального выражения, четную по вектору k, каждого фотона. Доказывается это довольно просто, но доказательство становится более ясным, если вместо $U_+(k)$, $U_-(k)$ мы введем новые пере-

---

другой предел $\lim\limits_{x\to\infty} F_1(x)$. Если $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ существует, то значение $\lim\limits_{x\to\infty} F_1(x)$ совпадает с прежним, как легко доказать. Процесс можно повторять, образуя

$$F_2(x) = \frac{1}{x}\int_0^x F_1(x)\,dx.$$

Если после конечного числа шагов $\lim\limits_{x\to\infty} F_n(x)$ существует, то его можно взять в качестве значения $\int_0^\infty f(x)\,dx$. Можно показать, что при весьма общих условиях это определение совпадает с определением (190).

менные $\varphi_+(k)$, $\varphi_-(k)$ и им сопряженные, благодаря чему квадратный корень $k_0^{-1/2}$ в выражении (176) исчезает. Мы полагаем:

$$\varphi_+(k) = (k_0)^{1/2} U_+(k), \qquad \varphi_-(k) = -(k_0)^{1/2} U_-(k),$$
$$\varphi_+^*(k) = (k_0)^{1/2} U_+^*(k), \qquad \varphi_-^*(k) = -(k_0)^{1/2} U_-^*(k),$$
$$[\varphi_+(k), \varphi_+^*(k)] = k_0 \cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}),$$
$$[\varphi_-(k), \varphi_-^*(k)] = -k_0 \cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}),$$
$$U(x) = (2V)^{-1/2} \sum_k \left[\frac{1}{k_0} \varphi_+(k) \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 x_0) - \frac{1}{k_0} \varphi_-(k) \exp i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + k_0 x_0)\right].$$

После этого мы сразу получаем в каждом уравнении вклад частиц с отрицательной энергией, просто подставляя $\varphi_-(k)$, $\varphi_-^*(k)$, $-\mathbf{k}$, $-k_0$ вместо $\varphi_+(k)$, $\varphi_+^*(k)$, $\mathbf{k}$, k_0; такая подстановка оправдывает себя и в конечных результатах. Мы применяем здесь те же обозначения, что и в статье А.

Теперь легко видеть, что, как было указано Дираком, каждый интеграл (простой или кратный), *подынтегральная функция в котором рациональна*, можно сделать сходящимся при больших $\mathbf{k}$, применяя предельный λ-процесс и одновременно вводя фотоны с отрицательной энергией. Введение последних оставляет от подынтегральной функции ее четную относительно k_0 часть (заметим, что всегда можно заменять $\mathbf{k}$ на $-\mathbf{k}$, не изменяя результат интегрирования по направлениям вектора $\mathbf{k}$), а эта четная часть сводится к сходящемуся интегралу с помощью разложения рационального выражения на части с последующим использованием первой строки формул (188′). При повторном применении операции (182) получаются, конечно, рациональные функции векторов k_ν, k'_ν, . . . для различных фотонов в промежуточных состояниях. Следовательно, мы можем ожидать, что в применении к одночастичной проблеме новая теория будет сходящейся даже в высших приближениях. Совершенно такая же ситуация, как и для электронов со спином $1/2$, имеет место и для электронов со спином 0, если к последним применяется тот вариант теории, в котором число частиц во внешнем электромагнитном поле остается постоянным [см. соотношения (119), (120) и (121)]. Для этих электронов собственная энергия также обращается в нуль в приближении e^2. (Дают ли высшие приближения нулевую или же ненулевую, но конечную собственную энергию, пока еще неизвестно, как в случае электронов со спином 0, так и в случае электронов с обычным спином $1/2$.) Помимо трудностей, касающихся вопроса о сходимости собственной энергии при высоких частотах промежуточных фотонов, могут возникать и другие трудности в связи с тем, что в новой теории при наличии частицы строго стационарного решения не существует вследствие спонтанных переходов, происходящих в том случае, когда в качестве исходного начального состояния берется «вакуум» $N_+(k) = N_-(k) = 0$. Эта проблема имеет непосредственное отношение к вопросу о физической интерпретации теории, рассматриваемому в следующем разделе.

Сделаем несколько замечаний относительно проблемы собственной энергии в теории дырок, проблемы, детально рассмотренной Вайскопфом [17]. Для простоты мы ограничимся случаем, когда электрон вначале покоится, и рассмотрим разницу между собственной энергией в случае, когда имеется один электрон, и собственной энергией вакуума. Применяя предельный λ-процесс, но не вводя еще фотонов с отрицательной энергией, получаем для электростатической части собственной энергии интеграл

$$E^{\text{ст}} = \frac{e^2 m}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda_0 k_0}{(k_0^2 + m^2)^{1/2}}\, dk_0, \tag{191}$$

а для электродинамической части — интеграл

$$E^{\text{дн}} = \frac{e^2}{\pi m} \int_0^\infty k_0 \frac{(k_0^2 + m^2)^{1/2} - k_0}{(k_0^2 + m^2)^{1/2}} \cos \lambda_0 k_0\, dk_0 =$$

$$= \frac{e^2 m}{\pi} \int_0^\infty \frac{k_0 \cos \lambda_0 k_0}{k_0^2 + m^2 + k_0 (k_0^2 + m^2)^{1/2}}\, dk_0. \tag{192}$$

Мы полагаем здесь $\lambda = 0$, что возможно. Оба интеграла при малых λ_0 пропорциональны $\ln \lambda_0$ и потому обращаются в бесконечность в пределе $\lambda_0 \to 0$. Действительно, в этом случае имеем (γ — постоянная Эйлера):

$$E^{\text{ст}} \sim -\frac{e^2 m}{\pi}\left[\ln \frac{\lambda_0 m}{2} + \gamma\right], \tag{191'}$$

$$E^{\text{дн}} \sim -\frac{e^2 m}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left\{\ln \frac{\lambda_0 m}{2} + \gamma\right\} + \frac{1}{4}\right]. \tag{192'}$$

Этот результат не улучшается при введении дираковских фотонов с отрицательной энергией, когда мы опять должны заменять подынтегральную функцию $f(k_0)$ на $^1/_2\,[f(k_0) + f(-k_0)]$. Этот процесс не изменяет электростатической части собственной энергии, а для электродинамической части мы получаем [18] интеграл

$$E^{\text{дн}} = -\frac{e^2}{\pi m} \int_0^\infty \frac{k_0^2}{(k_0^2 + m^2)^{1/2}} \cos \lambda_0 k_0\, dk_0, \tag{193}$$

обладающий при малых λ_0 даже еще более сильной сингулярностью:

$$E^{\text{дн}} = \frac{e^2 m}{\pi}\left[\frac{1}{(\lambda_0 m)^2} - \frac{1}{2}\left\{\ln \frac{\lambda_0 m}{2} + \gamma\right\} - \frac{1}{4}\right]. \tag{193'}$$

Кроме того, собственная энергия «античастиц», описываемых вторым

---

[17] *V. Weisskopf*. Z. Phys., 1934, 89, 27, 90; Phys. Rev., 1939, 56, 72.

[18] Вайскопф разлагает $E^{\text{дн}}$ на две части: $E^{\text{дн}}_{\text{спин}}$ и $E^{\text{дн}}_{\text{флукт}}$. Первая часть дается формулой (193), тогда как вторая часть компенсируется фотонами с отрицательной энергией.

спинорным полем $u_n(x)$, которое мы ввели в соотношениях (140)—(142), в точности совпадает с собственной энергией частиц, описываемых полем спиноров $u_p(x)$.

Аналогичные результаты получаются для электронов без спина, если применить второй вариант теории [соотношения (130)—(139)]. При введении фотонов с отрицательной энергией выделенная Вайскопфом [19] часть $E^{\text{дн}}_{\text{флукт}}$ исключается, и для покоящихся частиц мы имеем

$$E^{\text{дн}} = 0, \tag{194}$$

но

$$E^{\text{ст}} = \frac{\pi e^2}{4m}\int\limits_0^\infty \frac{k_0^2+2m^2}{(k_0^2+m^2)^{1/2}}\cos\lambda_0 k_0\, dk_0. \tag{195}$$

Для малых λ_0 последний интеграл дается выражением

$$E^{\text{ст}} = \frac{\pi e^2 m}{4}\left[-\frac{1}{(\lambda_0 m)^2} - \frac{3}{2}\left\{\ln\frac{\lambda_0 m}{2}+\gamma\right\}+\frac{1}{4}\right]. \tag{195'}$$

Если мы применим λ-процесс к перестановочным соотношениям для поля электрона, а не для электромагнитного поля, то в выражениях для различных частей энергии получается в точности такая же особенность.

Мы видим, что для электронов как со спином $^1/_2$, так и со спином 0 неудача теорий, разрешающих явно рождение и аннигиляцию пар, формально связана с наличием в подынтегральном выражении квадратного корня, вследствие чего теорема о сходимости, правильная для четных рациональных подынтегральных функций, становится уже неприменимой. Физически неудача λ-процесса связана с появлением пар в непосредственной окрестности рассматриваемой частицы, что приводит к сингулярности типа r^{-2} в среднем значении произведения плотностей заряда $\langle s_0(x),\ s_0(x')\rangle_{\text{ср}}$ при малых расстояниях между двумя точками $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ [20]. Поэтому эта неудача тесно связана с тем, что для заданного значения λ_0 вклад всех частиц с $r > \lambda_0$ в электростатическую энергию не изменяется. Поэтому в будущей квантовой теории, которая будет учитывать рождение и аннигиляцию пар, придется, вероятно, заменить классический предельный λ-процесс каким-то совершенно новым методом.

7. ПРОБЛЕМА ФИЗИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТЕОРИИ

Применяя к новой теории обычные правила интерпретации, мы получаем, конечно, результаты, в чем-то противоречащие опыту. Если мы будем исходить из состояния, в котором $N_+ = N_- = 0$, то теория приводит к следствию, что должен происходить процесс спонтанного испускания фотонов с отрицательной энергией. Легко видеть, что вероятность перехода в единицу времени A_s^- для процесса спонтанного испускания одного

---

[19] *V. Weisskopf.* Phys. Rev., 1939, 56, 72, Sect. V.
[20] *V. Weisskopf.* Phys. Rev., 1939, 56, 72, Sect. II.

фотона в собственном состоянии s поля осцилляторов (индекс s обозначает направление испущенных фотонов, их поляризацию и частоту) связана с коэффициентом вероятности поглощения B_s фотонов в состоянии s формулами обычной теории. Коэффициент вероятности поглощения определяется таким образом, чтобы вероятность поглощения за единицу времени была равна $B_s N_s^0$, где N_s^0 — фактическое число фотонов собственного состояния s, существующее в начальном состоянии. Связь между A_s^- и B_s дается соотношением

$$A_s^- = -\frac{1}{2} B_s. \tag{196}$$

Здесь множитель $^1/_2$ получается потому, что в выражении для $A_\mu(x)$ через $U_\mu(x)$ и $U_\mu^*(x)$, входящем в энергию взаимодействия, имеется множитель $1/\sqrt{2}$. В присутствии внешнего силового поля (например, в атоме водорода) по новой теории также должны происходить процессы спонтанного испускания фотонов с положительной энергией, причем вероятность перехода A_s^+ опять равна половине соответствующей вероятности A_s в обычной теории:

$$A_s^+ = \frac{1}{2} A_s. \tag{196'}$$

Этот процесс должен происходить также в отсутствие внешнего поля, если электрон в конечном состоянии обладает отрицательной энергией. Дирак предлагает интерпретировать процессы спонтанного испускания фотонов с положительной (отрицательной) энергией как действительно происходящие процессы излучения (поглощения). Условия, при которых процессы происходят в природе, сильно отличаются от теоретических. Дирак предлагает всегда начинать с исходного состояния $N_+ = N_- = 0$, а зависимость вероятностей действительно происходящих процессов от числа фотонов, действительно существующих в начальном состоянии (вероятностные законы Эйнштейна), брать из опыта, не пытаясь выводить теоретически.

Эту ситуацию можно несколько улучшить, рассматривая более общие начальные состояния. Возможны два альтернативных пути, приводящих к одному результату.

а) Рассмотрим для действительного процесса испускания (поглощения) в математической схеме («гипотетическом мире») начальное состояние, когда в некотором собственном состоянии поля s присутствуют $N_{s,+}^0$ фотонов с положительной и $N_{s,-}^0$ фотонов с отрицательной энергией; пусть в конечном состоянии число $N_{s,+}^0$ ($N_{s,-}^0$) изменяется на $+1$, а число $N_{s,-}^0$ $(N)_{s,+}^0$ не изменяется. Вероятности переходов для этих процессов в гипотетическом мире имеют вид

$$a_s (N_{s,+}^0 + 1) \text{ или } -a_s (N_{s,-}^0 + 1). \tag{197}$$

Тогда вероятности действительных процессов испускания (поглощения), если n_s означает число действительно существующих в начальном

состоянии фотонов, даются соответственно формулами:

$$2a_s(n_s+1) \text{ или } 2a_s n_s. \qquad (197')$$

Мы видим, что для данного собственного состояния s, для которого мы хотим рассматривать процессы испускания и поглощения, необходимо положить соответственно [21]

$$n_s = N^0_{s,+} \text{ или } n_s = -N^0_{s,-} - 1. \qquad (198)$$

Для чисел фотонов в других собственных состояниях мы обязаны полагать $N_+ = N_- = 0$ как в начальном, так и в конечном состояниях. Мы могли бы выбрать таким же образом процессы, в которых одно из чисел N_+, N_- уменьшается на 1, тогда как второе число сохраняется, и тогда поглощение фотонов с положительной (отрицательной) энергией можно было бы интерпретировать как действительно происходящий процесс поглощения (испускания), используя снова соотношение (198). Существует также простая возможность объединить эти два пути следующим образом.

б) Возьмем для физической интерпретации только те состояния гипотетического мира, в которых $N_- = 0$ как в начальном, так и в конечном состояниях, но в собственном состоянии, для которого мы рассматриваем испускание или поглощение фотона, находится произвольное число фотонов с положительной энергией N_+. В этом случае нужно только отождествить с N_+ действительное число фотонов.

Однако последняя возможность крайне несимметрична, и мы предпочитаем интерпретацию а). Во всяком случае, множество возможных состояний и процессов в гипотетическом мире, по сравнению с таким же множеством в действительном мире, прямо связано с введением в гипотетический мир лишних переменных [22]. Тот факт, что в то же время физическую интерпретацию допускает лишь часть процессов в гипотетическом мире, тем более не может быть признан удовлетворительным, что закон сохранения для полной суммы вероятностей в гипотетическом мире не имеет простой физической интерпретации; последнее связано с тем, что одно и то же начальное состояние в гипотетическом мире в общем случае соответствует, в согласии с соотношением (198), разным состояниям действительного мира, если мы рассматриваем разные процессы (обратное утверждение также справедливо). Ценность новой теории заключается в том, что она дает возможность вычислять коэффициенты вероятности для различных процессов излучения не только в первом приближении, где они получаются в виде разложений в ряды по степеням электрического

---

[21] Это надо рассматривать как формальное алгебраическое преобразование, несмотря на то, что в гипотетическом мире $N^0_{s,-}$ — число неотрицательное, тогда как в реальном мире n_s также неотрицательное число.

[22] Дирак получил множитель 2 в соотношении (197′), используя переменные N_a, N_b вместо N_+ и N_-. Это, однако, не изменяет того факта, что для корректной физической интепретации здесь требуется новое правило.

заряда e, но и строго, поскольку новая теория приводит к сходящимся результатам в высших приближениях.

Обобщенное правило вычисления коэффициентов вероятности для более сложных процессов в действительном мире не приводит к новым трудностям и может быть сформулировано таким образом.

Взяв начальное состояние, где в некотором собственном состоянии s, которое мы хотим изучать, находится $N^0_{s,+}$ фотонов с положительной и $N^0_{s,-}$ фотонов с отрицательной энергией (тогда как при достаточно высоких частотах всегда $N^0_{s,+} = N^0_{s,-} = 0$), мы рассмотрим процесс, когда в конечном состоянии числа $N_{s,+}$, $N_{s,-}$ равны:

$$N_{s,+} = N^0_{s,+} + p_{s,+}, \quad N_{s,-} = N^0_{s,-} + p_{s,-}.$$

Мы интерпретируем только такие процессы, в которых числа $p_{s,+}$, $p_{s,-}$ положительны или нули, а при достаточно высоких частотах $p_{s,+} = p_{s,-} = 0$. Чтобы найти фактическую вероятность процесса с испусканием $p_{s,+}$, . . . фотонов в состояниях s, . . . и поглощением $p_{s,-}$, . . . фотонов в состояниях s, . . . в действительном мире [23], в математическое выражение для вероятностей перехода в процессе, характеризуемом заданными числами $p_{s,+}$, $p_{s,-}$ фотонов с положительной и отрицательной энергией в их зависимости от $N^0_{s,+}$, $N^0_{s,-}$, необходимо ввести формальную подстановку (198) для этой выбранной группы состояний s, а конечный результат надо умножить на

$$2^{\sum\limits_s (p_{s,+}+p_{s,-})}.$$

Подстановка (198) вместе с тем делает результат положительным, тогда как первоначальное выражение имеет знак $(-1)^{\sum\limits_s p_{s,-}}$.

В качестве примера рассмотрим процесс рассеяния фотона, в результате которого он переходит из состояния s в состояние s' в действительном мире; в гипотетическом мире этот процесс описывается как одновременное испускание фотона с положительной энергией в состоянии s' и фотона с отрицательной энергией в состоянии s.

Едва ли есть необходимость подчеркивать проблематичный и временный характер этого правила для перевода результатов, полученных первоначально в «гипотетическом мире», в результаты «действительного мира». Однако интересно, что это правило имеет сходство с другим, хорошо уже известным правилом для перевода результатов, относящихся к состояниям вещества с отрицательной энергией, в действительный мир.

---

[23] Проф. Дирак в письме ко мне указал, что случаи, когда отличны от нуля оба числа $p_{s,+}$, $p_{s,-}$ при одном s, физически невозможно отличать от случаев с таким же значением разности $p_{s,+} - p_{s,-}$. Однако для физической интерпретации используется зависимость вероятности перехода от n_s, которая оказывается другой в случае, когда одно из чисел $p_{s,+}$ или $p_{s,-}$ равно нулю.

Для того чтобы получить фактическую вероятность перехода, в дираковской теории позитронов число $M_{s,-}$ электронов (n) в данном состоянии с отрицательной энергией (в соответствии с принципом запрета это число может быть только нулем или единицей) следует заменять на фактическое число $m_{s,p}$ позитронов (p) с положительной энергией, которое дается соотношениями:

$$m_{s,p} = 1 - M_{s,-},\ m_{s,n} = M_{s,+}. \tag{199}$$

Эти соотношения полностью аналогичны соотношениям (198) для статистики Бозе. Как указал Дирак, добавляя это правило интерпретации к первоначальной форме теории (в которой число частиц сохраняется в «гипотетическом мире»), мы полностью пренебрегаем кулоновским взаимодействием между рожденными парами. Это пренебрежение неслучайное: оно устраняет трудности в вопросе о сходимости. В другой, альтернативной форме теории, где вводится дополнительно второе спинорное поле [соотношения (140 — (142)], кулоновское взаимодействие между парами может быть учтено. Мы должны рассматривать только те процессы, в которых числа $M_{n,-}$ и $M_{p,-}$ либо уменьшаются, либо остаются неизменными, а числа $M_{n,+}$, $M_{p,-}$ либо возрастают, либо не изменяются. В гипотетическом мире используются p-частицы для описания рождения пар и n-частицы — для описания испускания радиации; поглощение радиации описывается с помощью фотонов с отрицательной энергией. Но, как мы видели, эта вторая альтернативная форма теории приводит к расходимости собственной энергии.

Совершенно аналогичная ситуация возникает при физической интерпретации бесспиновых заряженных частиц, подчиняющихся статистике Бозе. Для физической интерпретации варианта теории, в котором число частиц сохраняется [соотношения (117) — (121)], вообще нет необходимости использовать поле $U_n(x)$, $U_n^*(x)$ (введенное из соображений симметрии с целью компенсировать заряд вакуума). В этом случае в гипотетическом мире (возможно, при наличии внешнего электромагнитного поля) будут происходить переходы из состояния с положительной энергией s в состояния с отрицательной энергией s' с вероятностью

$$-a_{ss'}N_{s',+}(1 + N_{s',-}),$$

а обратные переходы — с вероятностью

$$-a_{ss'}N_{s',-}(1 + N_{s,+}).$$

Для интерпретации в действительном мире мы должны положить

$$m_{s,p} = N_{s,+},\ m_{s,n} = -(1 + N_{s,-}). \tag{200}$$

Таким образом, первый процесс интерпретируется как аннигиляция пар с вероятностью

$$+a_{ss'}m_{s,p}m_{s',n},$$

и второй процесс — как рождение пар с вероятностью

$$+a_{ss'}(1 + m_{s,p})(1 + m_{s',n}).$$

Если при физической интерпретации поле $U_n(x)$ не используется, то добавлять сюда множитель 2 не следует, в отличие от случая фотонов. В этом варианте теории также приходится пренебрегать кулоновским взаимодействием между рожденными парами, чтобы этой ценой добиться сходимости.

В другом альтернативном варианте теории заряженных частиц без спина [соотношения (135) — (139)], в котором переходы из состояний с положительной энергией в состояния с отрицательной энергией запрещены, состояния с положительной энергией можно использовать для описания рождения пар, а состояния с отрицательной энергией — для описания аннигиляции пар; но, как мы видели, собственная энергия при этом становится бесконечной.

Произвольный и неоднозначный характер правил для перехода от результатов в гипотетическом мире к результатам, относящимся к действительному миру, свидетельствует, по-видимому, о том, что для построения удовлетворительной квантовой теории электромагнитного поля требуются новые идеи и более радикальные изменения в изложенном здесь формальном аппарате.

О ПРИМЕНЕНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО λ-ПРОЦЕССА К ТЕОРИИ МЕЗОННОГО ПОЛЯ *

Предельный λ-процесс, введенный Вентцелем и Дираком для взаимодействия электрона с электромагнитным полем, применяется к взаимодействию тяжелой частицы (нуклона) с мезонным полем. В результате получается более точная, релятивистски-инвариантная форма теории, в которой, в соответствии с классической интерпретацией, отсутствуют все расходимости, связанные с точечными источниками. Показано, что псевдоскалярная и векторная теории с константой связи f, имеющей размерность длины, приобретают в этом случае форму теории слабой связи без стабильных изобаров при $\mu f \ll 1$. Исследованы на примере смеси Мёллера — Розенфельда высшие приближения для взаимодействия между нуклонами и показано, что они конечны для покоящихся нуклонов и малы по сравнению с приближением f^2, если расстояние между нуклонами заметно больше f.

1. Введение

Существовавшая до сих пор форма теории взаимодействия мезонного поля с тяжелыми частицами (протонами и нейтронами, для которых применяется также общее название «нуклоны») имеет тот фундаментальный недостаток, что в рамках теории возмущений по отношению к константе этого взаимодействия приходится вводить новые предположения о размере нуклонов. Так как для точечных источников высшие приближения расходятся, то сначала делались попытки вводить протяженные источники, имеющие некоторый конечный радиус a. Однако выяснилось, что в случае псевдоскалярной и векторной теорий — единственных теорий, правильно воспроизводящих зависимость ядерных сил от спина,— теория возмущений оказывается неприменимой при требуемых опытом значениях a и константы связи f, имеющей размерность длины [1]. Напротив, для источников, размер которых мал по сравнению с комптоновской длиной волны мезона μ^{-1}, и для $a \ll f$ следует прибегать к различного рода приближениям сильной связи. Однако эти теории сильной связи дают следствия, противоречащие опыту [2]. Ввиду существования стабильных изобаров с более высокими значениями спина и заряда ядра с большим зарядом должны были бы быть неустойчивыми; кроме того, магнитные моменты протона и свободного нейтрона должны бы быть почти равными по величине и противоположными по знаку, так что в дейтроне они должны взаимно компенсироваться, в противоречии с экспериментальными фактами.

---

* *On applications of the λ-limiting process to the theory of the meson field.*— Phys. Rev., 1943, 64, 332—344.

[1] В дальнейшем мы используем естественные единицы и полагаем $\hbar = c = 1$.

[2] *W. Pauli, S. Kusaka.* Phys. Rev., 1943, 63, 400. (Русск. пер. см. с. 467.— *Ред.*). В этой же статье приведены ссылки на другие работы.

Создается впечатление, что теория возмущений в действительности применима в более широкой области, чем это допускается моделью протяженных источников. В настоящей статье [3] показано, что это обстоятельство можно понять и сформулировать более точно с помощью так называемого «предельного λ-процесса», примененного Вентцелем и Дираком к случаю электромагнитного поля для того, чтобы устранить релятивистски-инвариантным образом классическую расходимость собственной энергии точечного электрона [4]. В разд. 2 показано, что этот предельный процесс можно рассматривать как результат естественного обобщения модели протяженного источника с учетом условий вещественности переменных поля в пространстве импульсов и что главное физическое содержание этого формального процесса, к достоинствам которого следует также отнести сохранение релятивистской инвариантности в конечных результатах [5], заключается в приравнивании нулю констант инерции для степеней свободы, соответствующих спину и изотопическому спину нуклона. Эти константы определил Баба [6] в классической теории нейтральных векторных мезонов; для действительно существующих в природе частиц он также предложил приравнять их нулю [7]. Обсуждение классической модели показывает, что в этой теории не существует возбужденных состояний нуклона при условии $\mu f \ll 1$, которое заведомо выполняется в природе. Это условие характеризует рассматриваемую здесь теорию как теорию слабой связи в уточненной форме.

Гамильтонианы взаимодействия между мезонным полем и нуклонами, приведенные в разд. 4, не содержат ничего нового и служат только для подготовки исследования взаимодействия разных нуклонов в высших приближениях в разд. 5. Используя там предложенный Штюкельбергом и Патри [8] метод последовательных канонических преобразований, мы особенно будем интересоваться введенной Розенфельдом и Мёллером [9] специальной смесью псевдоскалярного и векторного мезонного полей, которая, повидимому, лучше, чем любое другое предположение, согласуется с эмпирическими данными о ядерных силах. В то время как сами Розенфельд

[3] Краткий реферат настоящей статьи был опубликован ранее (Phys. Rev., 1943, 63, 221A).

[4] См. литературу в обзоре автора: Rev. Mod. Phys., 1943, 15, 175. (Русск. пер. см. с. 498.— *Ред.*).

[5] Мы не будем приводить здесь доказательства этой релятивистской инвариантности. В случае гамильтонианов того типа, который рассматривается в разд. 3, для такого доказательства можно применить формальный метод Дирака с несколькими временными координатами аналогично тому, как это сделал Дирак в случае электродинамики. Ср. также *J. M. Jauch.* Phys. Rev., 1943, 63, 334, где обсуждается применение предельного λ-процесса к проблеме магнитного момента нуклонов.

[6] *H. J. Bhabha.* Proc. Roy. Soc. London, 1941, A178, 314.

[7] Существует интересный вопрос, можно ли обобщить предельный λ-процесс релятивистски-инвариантным образом так, чтобы придать этим константам произвольное, отличное от нуля значение и в то же время избежать появления в теории расходимостей. Мои попытки найти такое обобщение оказались безуспешными.

[8] *E. C. G. Stueckelberg, J. F. C. Patry.* Helv. phys. acta, 1940, 13, 167.

[9] *C. Møller, L. Rosenfeld.* Kgl. Danske vid. selskab. Mat.-fys. medd., 1940, 17, N 8.

и Мёллер только высказали догадку о том, что высшие приближения для ядерных сил должны быть сравнительно малыми, если расстояние между нуклонами r больше упомянутой выше константы связи f, Штюкельберг [10] показал, что для модели точечного источника высшие приближения при всех значениях r расходятся, так как они содержат члены, пропорциональные a^{-1}, где a — радиус нуклона. Этот результат подтверждается позднейшими исследованиями с точки зрения теорий сильной связи [11], где существенную роль играют стабильные изобары нуклонов.

В разд. 4 мы резюмируем проведенные Штюкельбергом исследования смеси Мёллера — Розенфельда с целью применить к этой проблеме предельный λ-процесс. Для этого при описании переменных поля вместо обычного пространства удобно ввести пространство импульсов, что одновременно упрощает вычисления. В результате опять получается первоначальное условие Мёллера — Розенфельда $r \gg f$, определяющее область применимости теории возмущений, по меньшей мере, по порядку величины. Правда, численные множители в высших приближениях, по-видимому, сужают область применимости f^2-приближения; но следует напомнить, что использованное в этих вычислениях предположение о неподвижности нуклона ограничивает справедливость результатов условием $r \gg M^{-1}$, где M^{-1} означает комптоновскую длину волны протона, по порядку величины практически совпадающую с f. Поэтому сомнительно, чтобы точная форма высших приближений относительно f^2 имела какой-либо смысл, и мы приводим их только по порядку величины, подчеркивая, что, пока нуклоны предполагаются неподвижными, с помощью предельного λ-процесса все эти приближения можно сделать конечными.

2. Предельный λ-процесс как обобщение модели протяженного источника

Взяв в качестве простейшего примера взаимодействие нейтрального псевдоскалярного мезона с тяжелой частицей (нуклоном), покоящейся в начале координат, мы напишем известный гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\int [\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + \mu^2\varphi^2]\, d\mathbf{x} + (4\pi)^{1/2} f \int U(x)\, \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi\, d\mathbf{x}. \qquad (1)$$

Здесь вещественные функции $\pi(x)$, $\varphi(x)$ описывают канонически-сопряженные псевдоскалярные поля; применяются естественные единицы, где $\hbar = c = 1$; μ — масса покоя мезона в этих единицах; f — константа связи, имеющая размерность длины; $^1/_2\sigma$ — спин нуклона; $U(x)$ — функция источника, нормированная условием

$$\int U(x)\, dV = 1. \qquad (2)$$

Обозначая квадратными скобками скобки Пуассона в классической интерпретации и умноженные на мнимую единицу i коммутаторы в

[10] *E. C. G. Stueckelberg*. Helv. phys. acta, 1940, 13, 347.
[11] *R. Serber, S. M. Dancoff*. Phys. Rev., 1942, 62, 85.

квантовомеханической интерпретации, мы имеем в обоих случаях:

$$[\varphi(x),\ \varphi(x')] = [\pi(x),\ \pi(x')] = 0,$$
$$[\pi(x),\ \varphi(x')] = \delta(x - x'), \tag{3}$$

$$[\sigma_i,\ \sigma_j] = -2\sigma_k. \tag{4}$$

($i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3$ с циклической перестановкой).

Для производной по времени $\dot{F}$ всякой наблюдаемой F выполняется уравнение движения

$$\dot{F} = [H,\ F]. \tag{5}$$

В квантовой теории величинами σ_1, σ_2, σ_3 являются известные спиновые матрицы, тогда как в классической теории σ можно считать единичным вектором.

Для нашей цели удобно перейти от обычного пространства к пространству импульсов с помощью преобразования Фурье

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int q(k)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d\mathbf{k},$$
$$\pi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int p(k)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d\mathbf{k}, \tag{6а}$$

$$q(k) = (2\pi)^{-3/2} \int \varphi(x)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d\mathbf{x},$$
$$p(k) = (2\pi)^{-3/2} \int \pi(x)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d\mathbf{x}. \tag{6б}$$

Тогда правило (3) для скобок будет эквивалентно соотношениям:

$$[q(k),\ q(k')] = [p(k),\ p(k')] = 0,$$
$$[p(k),\ q(k')] = \delta(k - k'). \tag{7}$$

Далее мы введем фурье-образ $v(k)$ функции $U(x)$ по формулам:

$$U(x) = 2(\pi)^{-3} \int v(k)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d\mathbf{k},$$
$$v(k) = \int U(x)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d\mathbf{x}. \tag{8}$$

Выбор разных нормировочных множителей в формулах (8) удобен тем, что условие (2) в этом случае эквивалентно простому соотношению

$$v(0) = 1. \tag{9}$$

Гамильтониан в импульсном пространстве имеет вид

$$H = {}^1/_2 \int [p(k)\, p(-k) + k_0^2\, q(k)\, q(-k)]\, d\mathbf{k} + \frac{if}{\sqrt{2}} \int v(-k)\, \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}\, q(k)\, d\mathbf{k}, \tag{10}$$

где

$$k_0 = +(k^2 + \mu^2)^{1/2}. \tag{11}$$

Чтобы функции $U(x)$, $\pi(x)$, $\varphi(x)$ были вещественными, на величины $p(k)$, $q(k)$, $v(k)$ следует наложить условия вещественности

$$q(-k) = q^*(k), \qquad p(-k) = p^*(k), \qquad v(-k) = v^*(k), \tag{12}$$

где звездочкой обозначаются комплексно-сопряженные величины. Заметим, однако, что гамильтониан (а значит, и полный импульс) вещественен,

если выполняются более слабые условия:

$$\begin{aligned} v(k)\,q(-k) &= v^*(-k)\,q^*(k),\\ v(k)\,p(k) &= v^*(-k)\,p^*(-k),\\ p(k)\,p(-k) &= p^*(k)\,p^*(-k),\\ q(k)\,q(-k) &= q^*(k)\,q^*(-k),\\ v(k)\,v(-k) &= v^*(k)\,v^*(-k). \end{aligned} \tag{13}$$

Эти условия можно упростить, если ввести новые переменные:

$$\tilde{q}(k) = q(k)\,v(-k),\ \tilde{p}(k) = p(k)\,v(k), \tag{14}$$

удовлетворяющие условиям вещественности, аналогичным (13):

$$\tilde{q}(-k) = \tilde{q}^*(k),\ \tilde{p}(-k) = \tilde{p}^*(k),$$

и использовать вещественную величину

$$G(k) = G^*(k) = v(k)\,v(-k). \tag{14a}$$

В новых переменных гамильтониан приобретает вид

$$H = \frac{1}{2}\int [G(k)]^{-1}\,[\tilde{p}(k)\,\tilde{p}(-k) + k_0^2\tilde{q}(k)\,\tilde{q}(-k)]\,d\mathbf{k} + \frac{if}{\pi\sqrt{2}}\int \sigma\cdot\mathbf{k}\tilde{q}(k)\,d\mathbf{k}. \tag{15}$$

Значение скобок дается формулой

$$[\tilde{p}(k),\ \tilde{q}(k')] = G(k)\,\delta(k-k'). \tag{16}$$

Из гамильтониана в новых переменных с очевидностью следует, что модели с разными функциями источника $v(k)$, принадлежащими одной функции $G(k)$, являются эквивалентными и что физический смысл имеет только функция $G(k)$. В соответствии с формулой (9) мы имеем всегда

$$G(0) = 1. \tag{17}$$

Частный случай $G(k) = \text{const} = 1$ соответствует точечному источнику.

В то время как согласно более сильному условию вещественности (13) для обычной модели протяженного источника функция $G(k)$ должна быть положительной, требование вещественности переменных поля в обычном пространстве приводит к более слабому условию, что функция $G(k)$ обязана быть только вещественной.

Можно показать, что при специальном выборе

$$G(k) = \cos(\lambda_0 k_0 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}) \tag{18}$$

теория, обладавшая первоначально лоренц-инвариантностью, сохраняет это свойство, если величины λ_0, $\boldsymbol{\lambda}$ одновременно преобразуются как 4-вектор. Наконец, следует осуществить так называемый «предельный λ-процесс», именно $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) \to 0$. Этот процесс исключает из конечных ре-

зультатов частный выбор вектора λ и устраняет расходимости классической модели при условии, что 4-вектор λ_0, λ всегда временноподобен, т. е. если

$$\lambda_0^2 > \lambda^2. \tag{19}$$

Пока мы имеем дело с одной-единственной системой координат, можно полагать $\lambda = 0$; тогда

$$G(k) = \cos \lambda_0 k_0 = \cos [\lambda_0 (k^2 + \mu^2)^{1/2}]. \tag{18a}$$

С помощью предельного λ-процесса мы устраняем (классические) расходимости модели точечного источника, не вводя в окончательные результаты конечных размеров источника и не нарушая релятивистской инвариантности теории.

В более ранних работах мы определили в модели протяженного источника обратную величину его радиуса a равенством

$$a^{-1} = \iint \frac{U(x)\,U(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\, d\mathbf{x} d\mathbf{x}',$$

которое в пространстве импульсов записывается следующим образом:

$$a^{-1} = \frac{1}{2\pi^2} \int G(k) \frac{d\mathbf{k}}{k^2}. \tag{20}$$

Сохраняя это определение a^{-1} также в случае неположительной функции $G(k)$ и уже не связывая a с размером источника, находим при специальном выборе $G(k)$ в виде (18a) [12]

$$a^{-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos [\lambda_0 (k^2 + \mu^2)^{1/2}]\, dk = \mu J_1(\lambda_0 \mu). \tag{21}$$

Примечательно, что предельный процесс в применении к величине a^{-1} дает нуль:

$$\lim_{\lambda_0 \to 0} a^{-1} = 0, \tag{21a}$$

в то время как для первоначальной модели протяженного источника переход к точечному источнику, именно переход $G(k) \to 1$, всегда дает $a^{-1} \to \infty$. Некоторые физические следствия результата (21a) приведены в следующем разделе.

3. Применение к классической теории протонных изобаров (свободное вращение)

Как известно, в классической интерпретации теории при определенных условиях, налагаемых на значения констант связи и на функцию источника, существует возможность непрерывного спектра значений энергии

[12] По поводу вычисления интеграла см. *J. M. Jauch*. Phys. Rev., 1943, 63, 334, Appendix.

тяжелой частицы, окруженной своим собственным мезонным полем. Эта возможность возникает вследствие свободного вращения поля при наличии у тяжелой частицы спина или изотопического спина. Периодическому движению подобного типа Оппенгеймер и Швингер [13] поставили в соответствие дискретные уровни энергии в квантовомеханическом рассмотрении, в котором полный заряд и полный момент импульса системы принимают дискретные значения, выражаемые в соответствующих единицах соответственно целыми и полуцелыми числами. Они доказали также, что в случае сильной связи рассмотрение на основе принципа соответствия согласуется с более строгим квантовомеханическим подходом в заряженной скалярной и нейтральной псевдоскалярной теориях [14]. Цель следующих ниже вычислений состоит в том, чтобы исследовать условия существования таких возбужденных состояний (изобаров) тяжелой частицы с помощью предельного λ-процесса. Для этого достаточно рассмотреть классическую трактовку нейтральной псевдоскалярной теории, так как результаты для этого случая оказываются типичными и в более общих случаях.

Мы начнем с уравнений движения, которые получаются при применении общего правила (5) к гамильтониану (15), если вместо F подставлять поочередно величины $\tilde{\varphi}(k)$, $\tilde{q}(k)$ и компоненты спина тяжелой частицы σ_1, σ_2, σ_3. Используя также скобочные выражения (4) и (16), получаем:

$$\frac{\partial \tilde{q}(k)}{\partial t} = \tilde{p}(-k),$$

$$\frac{\partial \tilde{p}(k)}{\partial t} = -k_0^2 \tilde{q}(-k) - \frac{if}{\pi\sqrt{2}} G(k)\, \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \tilde{q}(k)}{\partial t^2} + k_0^2 \tilde{q}(k) = \frac{if}{\pi\sqrt{2}} G(k)\, \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k} \tag{22}$$

и

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{\sqrt{2}if}{\pi}\int [\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{k}]\, \tilde{q}(k)\, d\mathbf{k}. \tag{23}$$

Мы предполагаем, что спин свободно прецессирует вокруг оси x_3 в соответствии с уравнениями:

$$\sigma_1 = (1 - C^2)^{1/2}\cos\omega t,\quad \sigma_2 = (1 - C^2)^{1/2}\sin\omega t,\quad \sigma_3 = C. \tag{24}$$

Здесь C — постоянная, значения которой могут лежать в пределах от $+1$ до -1. Подставляя это в уравнение (22), находим

$$\tilde{q}(k) = \frac{if}{\pi\sqrt{2}} G(k)\left\{\frac{(1-C^2)^{1/2}}{k^2+\mu^2-\omega^2}(k_1\cos\omega t + k_2\sin\omega t) + \frac{C}{k^2+\mu^2}k_3\right\}. \tag{25}$$

---

[13] *J. R. Oppenheimer, J. Schwinger*. Phys. Rev., 1942, 60, 150.

[14] Квантовомеханическое рассмотрение в случае заряженной и симметричной псевдоскалярной теории проведено Данковым и Паули (*W. Pauli, S. M. Dancoff*. Phys. Rev., 1942, 62, 85). (Русск. пер. см. с. 424.— *Ред.*).

В случае

$$\omega^2 < \mu^2 \tag{26}$$

знаменатель в выражении (25) никогда в нуль не обращается и поле $\varphi(x)$ в x-пространстве на достаточно больших расстояниях от тяжелой частицы исчезает. В случае же $\omega^2 > \mu^2$ поле на больших расстояниях принимает вид сферической волны и описывает свободные мезоны, не связанные с тяжелой частицей. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что условие (26) выполняется.

Подставляя в правую часть уравнения (23) выражение (25) для $\tilde{q}(k)$, мы можем упростить интегралы в случае, когда функция $G(k)$ сферически-симметрична; это значит, что она зависит только от абсолютной величины вектора **k**. В этом случае мы получаем следующее выражение, связывающее частоту ω с постоянной C:

$$\omega = \frac{4}{3\pi} f^2 C \int_0^\infty G(k) \left(\frac{1}{k^2 + \mu^2 - \omega^2} - \frac{1}{k^2 + \mu^2} \right) k^4 dk. \tag{27}$$

Прежде чем приступить к обсуждению этого выражения, приведем аналогичные формулы для энергии и момента импульса. Последний выражается формулой

$$\mathbf{L} = -\pi \int [\mathbf{x} \times \nabla\varphi]\, d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$$

или, в импульсном пространстве,

$$\mathbf{L} = \int [G(k)]^{-1} \tilde{p}(k) \left[\frac{\partial \tilde{q}(k)}{\partial \mathbf{k}} \times \mathbf{k} \right] d\mathbf{k} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}. \tag{28}$$

Два упомянутых выше случая различаются интегралами движения при сферически-симметричном $G(k)$. Подставляя в выражение (15) для гамильтониана и в формулу (28) для момента импульса значение (24) для $\boldsymbol{\sigma}$, (25) для $\tilde{q}(k)$ и $\partial\tilde{q}(-k)/\partial t$ для $\tilde{p}(k)$, получаем для энергии

$$E = E_0 - \frac{f^2}{3\pi} \int G(k)(1 - C^2) \left(\frac{1}{k^2 + \mu^2 - \omega^2} - \frac{1}{k^2 + \mu^2} - \frac{2\omega^2}{(k^2 + \mu^2 - \omega^2)^2} \right) k^4 dk, \tag{29}$$

где

$$E_0 = -\frac{f^2}{3\pi} \int_0^\infty G(k) \frac{k^4}{k^2 + \mu^2} dk \tag{29a}$$

есть собственная энергия нуклона, соответствующая обычному статическому решению ($C = 1$, $\omega = 0$). Соответствующее выражение для момента, который в нашей проблеме направлен по оси x_3 ($L_1 = L_2 = 0$, $L_3 = L$), имеет вид

$$L = \frac{2f^2}{3\pi} \omega (1 - C^2) \int_0^\infty G(k) \frac{k^4}{(k^2 + \mu^2 - \omega^2)^2} dk + \frac{1}{2} C. \tag{30}$$

Интегралы в формулах (27), (29), (30) можно вычислить следующим образом. Выделим в подынтегральной функции одну часть без знаменателя, содержащую интегралы

$$N = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(k)\,k^2 dk, \qquad a^{-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(k)\,dk, \tag{31}$$

и вторую часть, которая для точечного источника $[G(k)\to 1]$ сходится. В последнем случае положим $G(k) = 1$, что возможно как для предельного λ-процесса, так и для протяженного источника [когда функция $G(k)$ положительна], размеры которого малы по сравнению с μ^{-1}, т. е. $\mu \ll 1$. Ограничимся этими двумя случаями. Однако следует подчеркнуть, что в предыдущем случае, для которого наши формулы остаются верными, произведение μa не мало́. Используя равенства

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{k^2+\mu^2-\omega^2} = (\mu^2-\omega^2)^{-1/2},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{(k^2+\mu^2-\omega^2)^2} = \frac{1}{2}(\mu^2-\omega^2)^{-3/2}$$

и их частные случаи при $\omega = 0$, указанным выше методом находим:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(k)\frac{k^4}{k^2+\mu^2}\,dk = N - \frac{\mu^2}{a} + \mu^3,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(k)\frac{k^4}{k^2+\mu^2-\omega^2}\,dk = N - \frac{\mu^2-\omega^2}{a} + (\mu^2-\omega^2)^{3/2},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(k)\frac{k^4}{(k^2+\mu^2-\omega^2)^2}\,dk = \frac{1}{a} - \frac{3}{2}(\mu^2-\omega^2)^{1/2}.$$

Соотношения (27), (29), (30) приобретают при этом окончательный вид:

$$\omega = \frac{2}{3}f^2C\left\{\frac{\omega^2}{a} - \left[\mu^3-(\mu^2-\omega^2)^{3/2}\right]\right\}, \tag{32}$$

$$E = E_0 + \frac{f^2}{6}(1-C^2)\left[\frac{\omega^2}{a}+\mu^3-(\mu^2-\omega^2)^{3/2}-3\omega^2(\mu^2-\omega^2)^{1/2}\right], \tag{33}$$

$$E_0 = -\frac{f^2}{6}\left(N-\frac{\mu^2}{a}+\mu^3\right), \tag{33a}$$

$$L = \frac{1}{3}f^2\omega(1-C^2)\left[\frac{1}{a}-\frac{3}{2}(\mu^2-\omega^2)^{1/2}\right]+\frac{1}{2}C. \tag{34}$$

Для периодических движений, энергия которых зависит только от величины результирующего момента, частота ω определяется общим

соотношением механики

$$\omega = dE/dL. \tag{35}$$

Вводя вспомогательную функцию частоты

$$W = \omega L - (E - E_0), \tag{36}$$

находим, что соотношение (35) эквивалентно следующему:

$$dW/d\omega = L. \tag{37}$$

Последнее соотношение в нашем случае можно вычислить без труда. Мы получаем сначала

$$W = \frac{1}{2}\omega C + \frac{f^2}{6}(1 - C^2)\left[\frac{\omega^2}{a} - \mu^3 + (\mu^2 - \omega^2)^{3/2}\right]. \tag{38}$$

Заметим, что в соответствии с равенством (32) это соотношение можно также записать в виде

$$W = \frac{1}{2}\omega\left(C + \frac{1 - C^2}{2C}\right) = \frac{\omega}{4C}. \tag{38a}$$

Из (38) имеем

$$dW = dC\frac{1}{2}\left\{\omega - \frac{2}{3}f^2C\left[\frac{\omega^2}{a} - \mu^3 + (\mu^2 - \omega^2)^{3/2}\right]\right\} + \\ + d\omega\left\{\frac{1}{2}C + \frac{1}{3}f^2\omega(1 - C^2)\left[\frac{1}{a} - \frac{3}{2}(\mu^2 - \omega^2)^{1/2}\right]\right\}.$$

Множитель при dC в соответствии с равенством (32) обращается в нуль, тогда как множитель при $d\omega$ в соответствии с (34) равен L; тем самым соотношение (37) доказано.

Пропорциональные $1/a$ члены в условии для частоты (32) легко интерпретировать. Подставляя (25) в формулы (24), можно показать, что в уравнение движения для σ входит следующий член, пропорциональный $1/a$:

$$\dot{\sigma} = -\frac{2}{3}f^2a^{-1}[\sigma, \ddot{\sigma}] + \ldots \tag{39}$$

Так как связь между $\tilde{q}$ (k) и σ [уравнение (22)] линейна, уравнение (39) будет справедливо не только для периодического движения, как могло бы показаться при его выводе, но и в общем случае. Баба́ [15] в своей классической теории нейтральных векторных мезонов назвал правую часть уравнения (39) инерцией механического спина. Поэтому $a^{-1} = 0$ как результат предельного λ-процесса означает, что этот процесс приводит к исчезновению инерции спина; следовательно, этот процесс удовлетворяет требованию Баба́, чтобы для реально существующих в природе частиц выражение для инерции спина всегда обращалось в нуль.

[15] См. прим. 6. В наших единицах константа K, которую ввел Баба́, связана с нашей постоянной a^{-1} равенством $K/I = {}^2/_3 f^2a^{-1}$.

Сделаем еще одно замечание. Для $G(k) = \cos \lambda_0 k_0$ при стремлении λ_0 к нулю исчезает не только a^{-1}, но также интеграл N, определенный равенствами (31), и в соответствии с формулой (33а) собственная энергия нуклона будет тогда равна $E_0 = -{}^1/_6 f^2\mu^3$, т. е. будет малой по сравнению с массой протона при фактическом значении константы связи $(f\mu)^2 \sim$ $\sim 1/10$.

Обратимся теперь к вопросу о том, имеет ли уравнение (32) для ω решение при $-1 \lesseqgtr C \lesseqgtr 1$ и $\omega < \mu$. Рассмотрим два случая. Сначала возьмем небольшой протяженный источник, соответствующий положительно-определенной функции $G(k)$ и условию $\mu a \ll 1$. В этом случае достаточно сохранить члены, пропорциональные a^{-1}, и мы получаем для частоты соотношение

$$\omega = \frac{3}{2f^2}\frac{a}{C},$$

которое справедливо в указанных выше интервалах при условии

$$(f\mu)^2 > \frac{3}{2}(\mu a). \tag{40}$$

В том же приближении из формул (33), (34), (38) имеем:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\omega L = E - E_0, \qquad L = \frac{1}{2C}, \\ \omega &= \frac{3a}{f^2} L, \qquad E - E_0 = \frac{3a}{2f^2} L^2. \end{aligned} \tag{41}$$

Условие $\omega < \mu$ дает верхнюю границу L. Этот старый результат Оппенгеймера и Швингера в случае сильной связи, $(f\mu)^2 \gg \mu a$, согласуется с квантовомеханическим результатом, если мы положим $L^2 = l(l+1)$, где l — не очень большое полуцелое число.

| Второй случай, который мы хотим рассмотреть, это результат предельного λ-процесса при $a^{-1} = 0$. Уравнение (32), после введения переменной $x = \omega/\mu$ приобретающее вид

$$-1 = \frac{2}{3}(f\mu)^2 C \frac{1-(1-x^2)^{3/2}}{x},$$

имеет решения при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant C \leqslant 1$ только при условии

$$\gamma \frac{2}{3}(f\mu)^2 > 1; \tag{42}$$

здесь γ означает максимум функции $[1-(1-x^2)^{3/2}]x^{-1}$ в интервале $0 \leqslant$ $\leqslant x \leqslant 1$, величина которого чуть больше единицы. Это в действительности не выполняется, так как $(f\mu)^2 \sim 1/10$. Таким образом, мы получаем результат, указанный во введении: в теории, основанной на использовании предельного λ-процесса, при фактическом значении константы связи не существует свободного вращения, соответствующего стабильному возбужденному состоянию нуклона.

В рассмотренной классической модели совершенно аналогичным образом можно исследовать рассеяние свободного мезона. Мы не будем здесь это делать, поскольку такое рассмотрение не содержит ничего нового по сравнению с вычислениями в статье Баба́ [16]. Квантовая теория рассеяния мезонов, в особенности сравнение результатов теории, основанной на предельном λ-процессе, и теории Гайтлера и Пенга [17], нуждается в дальнейшем исследовании.

4. Гамильтониан для смешанного псевдоскалярно-векторного поля при взаимодействии с несколькими мезонами

Обобщим теперь наш гамильтониан путем включения изотопического спина, предполагая наличие нескольких тяжелых частиц и рассматривая смесь псевдоскалярных и векторных мезонов. Ниже мы описываем нуклоны не в обычном пространстве с помощью вторично квантованного волнового поля, а в конфигурационном пространстве. Координаты нуклона будут обозначаться $\mathbf{z}_A$, где большие латинские буквы в индексе нумеруют нуклоны и принимают значения от 1 до N, если число нуклонов равно N. Как и в предыдущем разделе, введем в энергию взаимодействия нуклонов с мезонным полем сначала общую функцию источника $U(x)$, вырождающуюся для точечного источника в δ-функцию; позднее мы установим ее конкретный вид в соответствии с предельным λ-процессом, восстанавливающим релятивистскую инвариантность теории.

Полный гамильтониан системы состоит из трех частей: H_S, H_V, H_M, которые описывают соответственно псевдоскалярные мезоны, векторные мезоны и нуклоны. Для простоты мы пренебрегаем взаимодействием нуклонов с продольным векторным мезонным полем и сохраняем только взаимодействие с поперечным векторным и с псевдоскалярным мезонным полями. Вводя матрицы Дирака $\boldsymbol{\alpha}$, β и полагая, как обычно,

$$\boldsymbol{\gamma} = -i\,\beta\boldsymbol{\alpha}, \qquad s_1 = i\alpha_2\alpha_3, \;\ldots, \qquad \gamma_5 = -\,i\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \tag{43}$$

а также вводя компоненты изотопического спина τ_α ($\breve{\alpha} = 1, 2, 3$), мы, согласно Кеммеру [18] и Баба́ [19], находим для «симметричной» теории:

---

[16] *H. J. Bhabha*. Proc. Roy. Soc. London, 1941, **A178**, 314; см. с. 333 и далее. Его постоянную g^2/I следует отождествить с нашей постоянной f^2, а его постоянную β — с нашей a^{-1}. Предельный λ-процесс приводит к равенству $\beta = 0$. Полное сечение рассеяния мезона на нуклоне совпадает с выражением (82) работы Баба́, с. 337, если заменить $\sin^2\theta$ его средним значением $^2/_3$ и добавить множитель 2, учитывающий различие между рассматриваемой здесь псевдоскалярной теорией и векторной теорией Баба́.

[17] *W. Heitler, H. W. Peng*. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1942, **38**, 296; *W. Heitler*. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1941, **37**, 291.

[18] *N. Kemmer*. Proc. Roy. Soc. London, 1938, **A166**, 127; мы имеем в виду его случаи (c) и (d) и взаимодействия, пропорциональные константам Кеммера f_b и g_d.

[19] *H. J. Bhabha*. Proc. Roy. Soc. London, 1938, **A166**, 501.

$$H_S = \frac{1}{2}\int\sum_{\alpha}[\pi_{\alpha}^2 + (\nabla\varphi_{\alpha})^2 + \mu^2\varphi_{\alpha}^2]\,d\mathbf{x} +$$
$$+ (4\pi)^{1/2} f_S \int \sum_{A,\alpha} U(x - z_A)\,\tau_{\alpha}^A (\mathbf{s}^A\nabla\varphi_{\alpha} - \gamma_5^A\pi_{\alpha})\,d\mathbf{x} +$$
$$+ 2\pi f_S^2 \int \sum_{A,B,\alpha} U(x - z_A)\,U(x - z_B)\,\tau_{\alpha}^A\tau_{\alpha}^B\gamma_5^A\gamma_5^B\,d\mathbf{x}, \tag{44}$$

$$H_V = \frac{1}{2}\int\sum_{\alpha}\left[\pi_{\alpha}^2 + \frac{1}{\mu^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}_{\alpha})^2 + (\nabla\times\boldsymbol{\varphi}_{\alpha})^2 + \mu^2\boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^2\right]d\mathbf{x} +$$
$$+ (4\pi)^{1/2} f_V \int \sum_{A,\alpha} U(x - z_A)\,\tau_{\alpha}^A \{\mathbf{s}^A\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\varphi}_{\alpha}) - \boldsymbol{\gamma}^A\cdot\boldsymbol{\pi}_{\alpha}\}\,d\mathbf{x} +$$
$$+ 2\pi f_V^2 \int \sum_{A,B,\alpha} U(x - z_A)\,U(x - z_B)\,\tau_{\alpha}^A\tau_{\alpha}^B\beta^A\beta^B(\mathbf{s}^A\cdot\mathbf{s}^B)\,d\mathbf{x}, \tag{45}$$

$$H_M = \sum_A\left[\boldsymbol{\alpha}^A\cdot\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}^A} + M\beta^A\right]. \tag{46}$$

В предельном случае точечного источника теория является релятивистски-инвариантной, причем φ означает псевдоскаляр, а вектор $\boldsymbol{\varphi}$ вместе с $\varphi_0 = \mu^{-2}\nabla\cdot\pi$ образует четырехмерный вектор. Переменная π канонически сопряжена φ, а вектор $\boldsymbol{\pi}$ канонически сопряжен вектору $\boldsymbol{\varphi}$ в соответствии со скобочными выражениями (α, β,$=$ 1, 2, 3; i, k = 1, 2, 3):

$$\begin{aligned}[\pi_{\alpha}(x),\ \varphi_{\beta}(x')] &= \delta_{\alpha\beta}\delta(x - x'),\\ [\pi_{\alpha i}(x),\ \varphi_{\beta k}(x')] &= \delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta(x - x').\end{aligned} \tag{47}$$

Кроме того, компоненты изотопического спина удовлетворяют таким же правилам коммутации, что и компоненты обычного спина, а именно:

$$[\tau_1,\ \tau_2] = -2\tau_3,\ \ldots \tag{48}$$

Скобочные выражения для всех величин, относящихся к разным нуклонам, равны нулю. С помощью этих соотношений, применяя общее правило (5), получаем уравнения движения для всех рассматриваемых величин.

Как было показано Кеммером, члены в гамильтониане, квадратичные по константам связи, можно выбрать не одним-единственным, а двумя разными способами:

$$2\pi f_S^2 \int \sum_{A,B,\alpha} U(x - z_A)\,U(x - z_B)\,\tau_{\alpha}^A\tau_{\alpha}^B\gamma_5^A\gamma_5^B\,d\mathbf{x}$$

или

$$2\pi f_S^2 \int \sum_{A,B,\alpha} U(x - z_A)\,U(x - z_B)\,\tau_{\alpha}^A\tau_{\alpha}^B(\mathbf{s}^A\cdot\mathbf{s}^B)\,d\mathbf{x}$$

для псевдоскалярного мезона и

$$2\pi f_V^2 \int \sum_{A,B,\alpha} U(x - z_A)\,U(x - z_B)\,\tau_{\alpha}^A\tau_{\alpha}^B(\boldsymbol{\gamma}^A\cdot\boldsymbol{\gamma}^B)\,d\mathbf{x}$$

или

$$2\pi f_V^2 \int \sum_{A,B,\alpha} U(x - z_A)\, U(x - z_B)\, \tau_\alpha^A \tau_\alpha^B \beta^A \beta^B (\mathbf{s}^A \cdot \mathbf{s}^B)\, d\mathbf{x}$$

для векторного мезона. Разности этих альтернативных выражений в пределе точечных источников являются релятивистски-инвариантными [20]. Априорных оснований для выбора между той или другой возможностью не существует, так как оба они могут быть выведены из лагранжиана, не содержащего в явном виде членов второго порядка по константе связи при соответствующем подборе независимых переменных. Конкретный выбор этих членов в выражениях (44) и (45) можно оправдать только тем, что они приводят к более простому выражению для потенциальной энергии двух медленно движущихся нуклонов, которое в этом случае не содержит членов типа $\delta(z_A - z_B)$. Такая ситуация, уже замеченная разными авторами, выглядит не вполне удовлетворительной.

Гамильтонианы H_S и H_V, выраженные в виде интегралов по пространству импульсов, имеют следующий вид:

$$H_S = \frac{1}{2} \int \sum_\alpha [p_\alpha(k)\, p_\alpha(-k) + k_0^2\, q_\alpha(k)\, q_\alpha(-k)]\, d\mathbf{k} +$$
$$+ \frac{f_S}{\pi\sqrt{2}} \int \sum_{A,\alpha} v(-k) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_A)\, \tau_\alpha^A [i(\mathbf{s}^A\cdot\mathbf{k})\, q_\alpha(k) - \gamma_5^A p_\alpha(k)]\, d\mathbf{k} +$$
$$+ \frac{f_S^2}{4\pi^2} \int \sum_{A,B,\alpha} \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_A - \mathbf{z}_B)]\, G(k)\, \tau_\alpha^A \tau_\alpha^B \gamma_5^A \gamma_5^B\, d\mathbf{k}, \tag{49}$$

$$H_V = \frac{1}{2} \int \sum_\alpha \{\mathbf{p}_\alpha(k)\cdot\mathbf{p}_\alpha(-k) + \frac{1}{\mu^2} [\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_\alpha(k)]\, [\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_\alpha(-k)] +$$
$$+ k_0^2 q_\alpha(k)\, q_\alpha(-k) - [\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_\alpha(k)]\, [\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_\alpha(-k)]\}\, d\mathbf{k} +$$
$$+ \frac{f_V}{\pi\sqrt{2}} \int \sum_{A,\alpha} v(-k) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_A)\, \tau_\alpha^A \{i\mathbf{s}^A\cdot[\mathbf{k}\times\mathbf{q}_\alpha(k)] - \gamma^A\cdot\mathbf{p}_\alpha(k)\}\, d\mathbf{k} +$$
$$+ \frac{f_V^2}{4\pi^2} \int \sum_{A,B,\alpha} \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_A - \mathbf{z}_B)]\, G(k)\, \tau_\alpha^A \tau_\alpha^B \beta^A \beta^B (\mathbf{s}^A\cdot\mathbf{s}^B)\, d\mathbf{k}. \tag{50}$$

Функции $p_\alpha(k)$, $q_\alpha(k)$ и $\mathbf{p}_\alpha(k)$, $\mathbf{q}_\alpha(k)$ определены здесь так же, как формулами (6); они удовлетворяют условиям вещественности, аналогичным (13), и каноническим перестановочным соотношениям:

$$[p_\alpha(k), q_\beta(k')] = \delta_{\alpha\beta}\delta(k - k'),$$
$$[p_{\alpha i}(k), p_{\beta j}(k')] = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta(k - k'). \tag{51}$$

---

[20] С помощью квантованных волновых функций $\psi(z)$ и $\psi^\dagger = \psi^*\beta$, $\mu, \nu = 1, \ldots, 4$, $z_4 = ix_0$ эти инварианты можно записать соответственно в виде:

$$\sum_\mu [\psi^\dagger i\gamma_5\gamma_\mu\psi]^2 \text{ и } \sum_{\mu<\nu} [\psi^\dagger i\gamma_\mu\gamma_\nu\psi]^2.$$

Функции $v(k)$ и $G(k)$ определяются опять формулами (8) и (15). Разумеется, можно найти также новые величины, аналогичные переменным (14) в предыдущих разделах; тогда станет очевидно, что физический смысл имеет только функция $G(k)$. Однако для дальнейшего в этом нет необходимости.

Часть гамильтониана H_V, описывающую свободные мезоны, можно упростить с помощью канонических преобразований:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \frac{1}{k^2}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}) + \frac{\mu}{k^2}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}),$$
$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} - \frac{1}{k^2}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}) - \frac{1}{\mu k^2}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}), \qquad (52)$$

имеющих обратные преобразования:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' - \frac{1}{k^2}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}') - \frac{\mu}{k^2}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}'),$$
$$\mathbf{q} = \mathbf{q}' - \frac{1}{k^2}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}') - \frac{1}{\mu k^2}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}'). \qquad (52a)$$

Этим путем находим

$$H_V = \frac{1}{2}\int\sum_{\alpha}[\mathbf{p}_\alpha'(k)\cdot\mathbf{p}_\alpha'(-k) + k_0^2\mathbf{q}_\alpha'(k)\cdot\mathbf{q}_\alpha'(-k)]\,d\mathbf{k} +$$
$$+ \frac{f_V}{\pi\sqrt{2}}\int\sum_{A,\alpha} v(-k)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_A)\,\tau_\alpha^A\Big\{i\mathbf{s}^A\cdot[\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_\alpha'(k)] -$$
$$- \gamma^A\cdot\Big[\mathbf{p}'(k) - \frac{1}{k^2}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}'(k)) - \frac{\mu}{k^2}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}'(k))\Big]\Big\}\,d\mathbf{k} +$$
$$+ \frac{f_V^2}{4\pi^2}\int\sum_{A,B,\alpha}\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_A - \mathbf{z}_B)]\,G(k)\,\tau_\alpha^A\tau_\alpha^B\beta^A\beta^B(\mathbf{s}^A\cdot\mathbf{s}^B)\,d\mathbf{k} + \ldots \qquad (50')$$

В этой статье мы рассматриваем частный случай ядерных сил, получаемый из так называемой смеси Мёллера — Розенфельда, состоящей из псевдоскалярных и векторных мезонов с одинаковыми константами связи. Для простоты будем предполагать, что эти два вида мезонов обладают равными массами покоя. Возможно, это не соответствует действительности, но цель вычислений в следующем разделе заключаются не в том, чтобы получить точную форму ядерных сил, а только в том, чтобы указать условия, при которых высшие приближения теории возмущений дают относительно малый вклад в ядерные силы. Для этого достаточно взять модель более простую, чем может быть в действительности. Дальнейшие упрощения связаны с приближением, согласно которому масса нуклона бесконечно велика по сравнению с массой мезона, или, другими словами, с приближением, в котором можно пренебречь энергией отдачи нуклона во всех промежуточных состояниях. В этом случае четырехкомпонентная волновая функция нуклона сводится к двухкомпонентной волновой функ-

ции в том представлении матриц Дирака, в котором матрица β диагональна, так как двумя малыми компонентами можно пренебречь. Всеми матрицами, которые антикоммутируют с β, например матрицами γ_5 и $\boldsymbol{\gamma}$, можно пренебречь. Четырехкомпонентную спиновую матрицу s можно заменить двукомпонентной матрицей σ, а матрицу β — единицей. Тогда часть гамильтониана H_M будет ненужной, и, полагая в этом случае

$$f_s = f_V = g/\mu \tag{53}$$

с безразмерной постоянной g, имеем

$$\begin{aligned} H = H_S^s + H_V = \frac{1}{2}\sum_\alpha \{p_\alpha(k)\,p_\alpha(-k) + \mathbf{p}'_\alpha(k)\cdot\mathbf{p}'_\alpha(-k) + \\ + k_0^2\,[q_\alpha(k)\,q_\alpha(-k) + \mathbf{q}'_\alpha(k)\cdot\mathbf{q}'_\alpha(-k)]\}\,d\mathbf{k} + \\ + \frac{g}{\pi\sqrt{2\mu}}\int\sum_{A,\alpha} v(-k)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_A)\,\tau_\alpha^A i\mathrm{s}^A\cdot\{\mathbf{k}q_\alpha(k) + \\ + [\mathbf{k}\times\mathbf{q}'_\alpha(k)]\}\,d\mathbf{k} + \frac{g^2}{4\pi^2\mu^2}\int\sum_{A,B,\alpha}\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_A - \mathbf{z}_B)]\times \\ \times G(k)\,\tau_\alpha^A\tau_\alpha^B\,(\mathrm{s}^A\cdot\mathrm{s}^B)\,d\mathbf{k} + \ldots \end{aligned} \tag{54}$$

Как показал Штюкельберг[21], простые свойства смеси этого частного вида становятся более наглядными, если применить каноническое преобразование

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'' &= (i/\mu)\{[\mathbf{k}\times\mathbf{q}'] + \mathbf{k}q\}, \\ \mathbf{p}'' &= -i\,(\mu/k^2)\{[\mathbf{k}\times\mathbf{p}'] + \mathbf{k}p\}, \\ q'' &= -(i/\mu)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}'), \\ p'' &= i\,(\mu/k^2)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}') \end{aligned} \tag{55}$$

с обратным преобразованием

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' &= -i\,(\mu/k^2)\{[\mathbf{k}\times\mathbf{q}''] + \mathbf{k}q''\}, \\ \mathbf{p}' &= (i/\mu)\{[\mathbf{k}\times\mathbf{p}''] + \mathbf{k}p''\}, \\ q &= i\,(\mu/k^2)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}''), \\ p &= -(i/\mu)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}''). \end{aligned} \tag{55a}$$

Кроме того, новые функции удовлетворяют тем же условиям вещественности, что и старые. Это преобразование удобно потому, что энергия взаимодействия зависит только от $\mathbf{q}''$ и не зависит от q''. Вследствие соот-

[21] *E. C. G. Stueckelberg.* Helv. phys. acta, 1940, 13, 347; преобразование здесь производится в обычном x-пространстве.

ношения

$$p_\alpha(k)\,p_\alpha(-k)+\mathbf{p}'_\alpha(k)\cdot\mathbf{p}'_\alpha(-k)+k_0^2\,[q_\alpha(k)\,q_\alpha(-k)+\mathbf{q}'_\alpha(k)\cdot\mathbf{q}'_\alpha(-k)]=$$
$$=\frac{k^2}{\mu^2}\,[\mathbf{p}''_\alpha(k)\cdot\mathbf{p}''_\alpha(-k)+p''_\alpha(k)\,p''_\alpha(-k)]+$$
$$+\frac{k_0^2\mu^2}{k^2}\,[\mathbf{q}''_\alpha(k)\cdot\mathbf{q}''_\alpha(-k)+q''_\alpha(k)\,q''_\alpha(-k)]$$

поле, описываемое новыми скалярами p''_α, q''_α, не взаимодействует с нуклоном и может быть отброшено. Мы не будем больше выписывать его и в конечном результате снова опустим двойные штрихи при переменных:

$$H=\frac{1}{2}\int\sum_\alpha\left\{\frac{k^2}{\mu^2}\,\mathbf{p}_\alpha(k)\cdot\mathbf{p}_\alpha(-k)+\frac{k_0^2\mu^2}{k^2}\,\mathbf{q}_\alpha(k)\cdot\mathbf{q}_\alpha(-k)\right\}d\mathbf{k}+$$
$$+\frac{g}{\pi\sqrt{2}}\int\sum_{A,\,\alpha}v(-k)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_A)\,\tau_\alpha^A\sigma^A\cdot\mathbf{q}_\alpha(k)\,d\mathbf{k}+$$
$$+\frac{g^2}{4\pi^2\mu^2}\int\sum_{A,\,B,\,\alpha}\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_A-\mathbf{z}_B)]\,G(k)\,\tau_\alpha^A\tau_\alpha^B\,(\sigma^A\cdot\sigma^B)\,d\mathbf{k}. \qquad (56)$$

5. Ядерные силы между покоящимися нуклонами в высших приближениях для смеси мезонов Мёллера — Розенфельда

Метод Штюкельберга для нахождения энергии взаимодействия между нуклонами заключается в применении последовательных канонических преобразований, исключающих шаг за шагом переменные поля. Пренебрежение движением нуклонов (энергией отдачи в промежуточных состояниях) допустимо, пока расстояние между нуклонами больше их комптоновской длины волны M^{-1}.

Написав, чтобы показать зависимость от константы связи, следующее выражение для гамильтониана:

$$H=H_0+gH_1+g^2H_2, \qquad (57)$$

произведем сначала каноническое преобразование

$$H'=e^{iW}He^{-iW}=H+[W,H]+\frac{1}{2!}[W,[W,H]]+\ \ldots, \qquad (58)$$

где H' — гамильтониан, выраженный в новых переменных. В то время как промежуточное выражение $e^{iW}He^{-iW}$ справедливо только в квантовой механике, последняя форма одинаково пригодна и для классической, и для квантовой механики. Мы сначала предположим, что функция W пропорциональна g в соответствии с формулой $W=gW_1$, и перегруппируем результат по степеням g:

$$H'=H_0+g\,\{[W,H_0]+H_1\}+g^2\left\{\frac{1}{2!}\,[W_1,[W_1,H_0]]+[W_1,H_1]+H_2\right\}+$$
$$+g^3\left\{\frac{1}{3!}\,[W_1,[W_1,[W_1,H_0]]]+\frac{1}{2!}\,[W_1,[W_1,H_1]]+[W_1,H_2]\right\}+\ldots \qquad (59)$$

Выберем W_1 так, чтобы обратить в нуль H_1, а именно:

$$[W_1, H_0] = -H_1, \tag{60}$$

и получим

$$H' = H_0 + g^2\left\{\frac{1}{2}[W_1, H_1] + H_2\right\} + g^3\left\{\frac{1}{3}[W_1, [W_1, H_1]] + [W_1, H_2]\right\} + \ldots \tag{61}$$

Для гамильтониана смеси Мёллера — Розенфельда (56) условие (60) выполняется, если

$$W_1 = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int \sum_{A,\alpha} v(k)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}_A)\frac{k^2}{k_0^2\mu^2}\tau_\alpha^A\boldsymbol{\sigma}^A\cdot\mathbf{p}_\alpha(k)\,d\mathbf{k}.$$

Выражение $1/2\,[W_1, H_1]$ в H_2' состоит из двух частей, одна из которых не зависит от переменных поля, а вторая билинейна по этим переменным. Находим

$$\frac{g^2}{2}[W_1, H_1] = -\frac{g^2}{4\pi^2}\sum_{A,B,\alpha,\beta,i,j}\left\{\tau_\alpha^A\tau_\alpha^B\boldsymbol{\sigma}^A\cdot\boldsymbol{\sigma}^B\int\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_A-\mathbf{z}_B)]\,G(k)\,\times\right.$$
$$\times\frac{k^2}{k_0^2\mu^2}\,d\mathbf{k} + \begin{bmatrix} A \\ \alpha i, \beta j\end{bmatrix}\iint v(k')\,v(-k)\exp[i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{z}_A]\frac{k'^2}{k_0'^2\mu^2}\,\times$$
$$\left.\times\,p_{\alpha i}(k')\,q_{\beta j}(k)\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'\right\}. \tag{62}$$

Здесь коэффициент $\begin{bmatrix} A \\ \alpha i, \beta j\end{bmatrix}$ представляет собой сокращенное обозначение:

$$\begin{bmatrix} A \\ \alpha i, \beta j\end{bmatrix} = [\tau_\alpha^A\sigma_i^A, \tau_\beta^A\sigma_j^A] = -2\sigma_{ij}^A\delta_{\alpha\beta} - 2\delta_{ij}\tau_{\alpha\beta}^A \tag{63}$$

(причем $\tau_{12} = -\tau_{21} \equiv \tau_3, \ldots; \sigma_{12} = -\sigma_{21} \equiv \sigma_3, \ldots$). Вследствие частного выбора H_2 некоторая часть последнего члена в формуле (62) сокращается с H_2, поскольку

$$\frac{1}{\mu^2} - \frac{k^2}{k_0^2\mu^2} = \frac{1}{k_0^2}.$$

Отсюда следует, что в пределе точечных источников, $G(k) \to 1$, в конечном результате не возникает взаимодействия типа $\delta(z_A - z_B)$. Для части гамильтониана $H_{2,0}'$, не зависящей от переменных поля — вообще в символе $H_{m,n}'$ первый индекс равен степени g, на которую умножается этот символ, а второй индекс означает степень переменной поля,— мы окончательно получаем

$$g^2H_{2,0}' = \frac{g^2}{4\pi^2}\sum_{A,B,\alpha}\tau_\alpha^A\tau_\alpha^B\boldsymbol{\sigma}^A\cdot\boldsymbol{\sigma}^B\int\frac{G(k)}{k^2+\mu^2}\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_A-\mathbf{z}_B)]\,d\mathbf{k}.$$

Для $A \neq B$ всегда можно положить $G(k) = 1$. Используя равенство

$$\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_A-\mathbf{z}_B)]}{k^2+\mu^2}\,d\mathbf{k} = \frac{\exp(-\mu r_{AB})}{r_{AB}}, \tag{64}$$

где $r_{AB} = |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|$ — расстояние между двумя нуклонами, и принимая во внимание, что каждая пара значений A, B встречается в сумме дважды, находим для части потенциала между двумя разными нуклонами A, B, пропорциональной g^2, хорошо известный результат

$$V_{AB} = g^2 \sum_{\alpha} \tau_\alpha^A \tau_\alpha^B \boldsymbol{\sigma}^A \cdot \boldsymbol{\sigma}^B \left[\exp(-\mu r_{AB})/r_{AB}\right]. \tag{65}$$

Для $A = B$ получаем собственную энергию, значение которой в пределе $G(k) \to 1$, если подставить в соответствии с квантовой теорией $\Sigma_\alpha \tau_\alpha^2 = (\sigma^A)^2 = 3$, дается выражением

$$V_{AA} = \frac{9}{2} g^2 \left(\frac{1}{a} - \mu\right). \tag{66}$$

В случае предельного λ-процесса мы должны положить $a^{-1} = 0$; отсюда

$$V_{AA} = -\frac{9}{2} g^2 \mu. \tag{66a}$$

При обсуждении приближений высших порядков по g наибольший интерес для нас представляют линейные по переменным поля члены, самый низший порядок которых равен трем. В соответствии с формулами (61) и (62) эти члены даются выражением

$$g^3 H'_{3,1} = -\frac{g^2}{(2\pi^2)^{3/2}} \sum_{A,B,\alpha,i} \begin{bmatrix} A\,B \\ \alpha\ i \end{bmatrix} \int \frac{G(k)}{k_0^2} \exp\left[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_A - \mathbf{z}_B)\right] d\mathbf{k} \times$$
$$\times \int \exp(-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{z}_A) \frac{k'^2}{k_0'^2 \mu^2} v(k')\, p_{\alpha i}(k') d\mathbf{k}',$$

где

$$\begin{bmatrix} A\,B \\ \alpha\ i \end{bmatrix} \equiv \sum_{\beta, j} \begin{bmatrix} A \\ \alpha i, \beta j \end{bmatrix} \tau_\beta^B \sigma_j^B. \tag{67}$$

В случае $A = B$ следует провести эрмитизацию правой части, взяв арифметическое среднее двух произведений, отличающихся порядком сомножителей $\begin{bmatrix} A \\ \alpha i,\ \beta j \end{bmatrix}$ и $\tau_\beta^A\ \sigma_j^A$. Этим способом мы находим для $A = B$

$$\begin{bmatrix} A\,A \\ \alpha\ i \end{bmatrix} = 0, \tag{67a}$$

а для $A \neq B$

$$\begin{bmatrix} A\,B \\ \alpha\ i \end{bmatrix} = 2\left[(\sigma_k^A \sigma_j^B - \sigma_j^A \sigma_k^B)\,\tau_\alpha^B + \sigma_i^B (\tau_\beta^A \tau_\gamma^B - \tau_\gamma^A \tau_\beta^B)\right], \tag{67б}$$

причем (i, j, k) и (α, β, γ) принимают значения 1, 2, 3 с циклической перестановкой.

Теперь мы исключим эти новые линейные относительно поля члены с помощью нового канонического преобразования типа (58), для чего

положим $W = g^3 W_3$, где функция W_3 удовлетворяет условию

$$[W_3, H_0] = -H'_{3,1}$$

и определяется равенством

$$W_3 = -\frac{1}{(2\pi^2)^{3/2}} \sum_{A, B, \alpha, i} \begin{bmatrix} A & B \\ \alpha & i \end{bmatrix} \int \frac{G(k)}{k_0^2} \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_A - \mathbf{z}_B)]\, d\mathbf{k} \times$$
$$\times \int \exp(i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{z}_A) \frac{k'^2}{k_0'^2\mu^2} v(-k') q_{\alpha i}(k')\, d\mathbf{k}'. \qquad (68)$$

Это преобразование дает часть нового гамильтониана $H''_{6,0}$, содержащуюся в слагаемом $H''_6 = 1/2\,[W_3, H'_{3,1}]$. Имеем [22]

$$g^6 H''_{6,0} = \sum_{A, B, C, D, \alpha, i} \begin{bmatrix} A & B \\ \alpha & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ \alpha & i \end{bmatrix} F_{CA} f_{AB} f_{CD}. \qquad (69)$$

Здесь введены определения:

$$f_{AB} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{G(k)}{k_0^2} \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_A - \mathbf{z}_B)]\, d\mathbf{k}, \qquad (70)$$

$$F_{AB} = -\frac{1}{2\pi^2} \int G(k) \frac{k^2}{k_0^4\mu^2} \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}_A - \mathbf{z}_B)]\, d\mathbf{k}. \qquad (71)$$

Для предельного случая точечного источника интеграл f_{AB} был вычислен выше и оказался равным:

$$f_{AB} = \exp(-\mu r_{AB})/r_{AB} \quad \text{при} \quad A \neq B,$$
$$f_{AA} = a^{-1} - \mu. \qquad (72)$$

Подобным же образом находим

$$F_{AB} = \frac{1}{2\mu}\left(1 - \frac{2}{\mu r_{AB}}\right) \exp(-\mu r_{AB}) \quad \text{при} \quad A \neq B,$$
$$F_{AA} = \frac{1}{2\mu}\left(3 - \frac{2}{\mu a}\right). \qquad (73)$$

Результат (69) означает, что в общем случае наряду с двухчастичными взаимодействиями появляются также трех- и четырехчастичные взаимодействия. В случае, когда имеются только две частицы, выражение (69) дает дополнительную потенциальную энергию

$$V''_{AB} = \frac{g^6}{2\mu}\left[c_{AB} \frac{3\exp(-2\mu r_{AB})}{r_{AB}^2} + d_{AB}\left(1 - \frac{2}{\mu r_{AB}}\right) \frac{\exp(-3\mu r_{AB})}{r_{AB}^2}\right], \qquad (74)$$

где $A \neq B$ и

$$c_{AB} = \sum_{\alpha, i} \begin{bmatrix} A & B \\ \alpha & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ \alpha & i \end{bmatrix}, \qquad d_{AB} = \sum_{\alpha, i} \begin{bmatrix} A & B \\ \alpha & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & A \\ \alpha & i \end{bmatrix}, \qquad (75)$$

---

[22] Ср. *E. C. G. Stueckelberg*. Helv. phys. acta, 1940, 13, 347, формулы (2.10) и (2.11).

причем в соответствии с предельным λ-процессом мы опять положили $a^{-1} = 0$.

При вычислении коэффициентов c_{AB} и d_{AB} с помощью выражения (67) получается, если ввести обычные сокращенные обозначения $s_{AB} \equiv (\sigma_A \sigma_B)$, $\quad \tau_{AB} \equiv \sum_\alpha \tau_\alpha^A \tau_\alpha^B$:

$$c_{AB} = 8\,[3\,(3 - s_{AB}) + 3\,(3 - \tau_{AB}) + 4 s_{AB} \tau_{AB}], \tag{76}$$

$$d_{AB} = -\,8\,[(3 - s_{AB})\,\tau_{AB} + s_{AB}\,(3 - \tau_{AB}) - 4 s_{AB} \tau_{AB}]^{23}. \tag{77}$$

Для основного состояния дейтрона имеем $\tau_{AB} = -3$, $s_{AB} = 1$, $c_{AB} = 3{,}32$, $d_{AB} = -3{,}32$; поэтому отношение V''/V мало́ при $3\,(2g)^4/(\mu r)^2 \ll 1$, как указано во введении.

В классической теории взаимодействие между нуклонами описывается в окончательном гамильтониане только теми членами, которые не зависят от мезонного поля. В квантовой теории это не так. Здесь уже нельзя приравнивать нулю $p_\alpha\,(k)$ и $q_\alpha\,(k)$ одновременно, и в общем случае билинейные относительно $p_\alpha\,(k)$ или $q_\alpha\,(k)$ члены окончательного гамильтониана вносят во взаимодействие между нуклонами конечный вклад, обусловленный нулевой энергией осцилляторов поля. Такими членами, в частности, являются вычисленные различными авторами члены порядка g^4, возникающие из слагаемого $g^2 W_2$ при исключении величины $g^2 H'_{2,2}$ в формуле (62). Интересно заметить, что, согласно новой теории Дирака, в которой для промежуточных состояний вводятся мезоны с отрицательной энергией, энергия взаимодействия порядка g^4 должна обращаться в нуль. Эта новая теория оказывается более похожей на классическую теорию, чем старая квантовая теория, так как в новой теории все эффекты, обусловленные нулевыми колебаниями, исчезают. Проверить новую теорию можно было бы с помощью экспериментов, которые дали бы ответ на вопрос, существуют или нет в энергии взаимодействия члены четвертого порядка?

С другой стороны, для сходимости теории в приближении, в котором тяжелые частицы предполагаются нерелятивистскими, новая гипотеза о мезонах с отрицательной энергией совсем не обязательна. В этом приближении сходимость может быть достигнута с помощью одного лишь предельного λ-процесса.

---

[23] Штюкельберг (см. предыдущее примечание) в своих формулах (3.12) для c_{AB} и d_{AB} дает дополнительное слагаемое $-64\,(3 - s_{AB})\,(3 - \tau_{AB})$, которое я не смог получить и которое, по-видимому, является ошибочным. Это дополнительное слагаемое привело Штюкельберга также к завышенному численному значению V''_{AB}.

ТРУДНОСТИ ТЕОРИЙ ПОЛЯ И КВАНТОВАНИЯ ПОЛЯ *

§ 1

Передо мною стоит сложная задача: говорить о трудностях, особенно о трудностях теорий поля и квантования поля. Принципиальных успехов в этой проблеме за последние годы не было, хотя некоторые аспекты ее стали яснее. В проблеме взаимодействия точечного электрона с электромагнитным полем (включая собственное его поле) оказалось возможным четко выделить [1,2] сингулярности двух различных типов: а) сингулярности точечной модели, содержавшиеся и в классической теории, и б) флуктуационные сингулярности, присущие только квантовой теории. Последние всегда появляются в системе с бесконечным числом степеней свободы, и притом потому, что вследствие обычных правил квантования поля конечное значение имеют только полевые величины, усредненные по конечной области пространства-времени, тогда как средние значения других флуктуаций этих полевых величин (например, квадратов напряженностей поля, входящих в гамильтониан теории Максвелла) обращаются в бесконечность. Оказалось, что в квантовомеханической теории возмущений эти два типа сингулярностей можно легко различать, применяя следующий критерий: сингулярности типа а) и б) возникают при интегрировании функций, соответственно четных и нечетных относительно частоты фотонов в промежуточных состояниях.

В то время как для устранения сингулярностей типа а) были придуманы релятивистски-инвариантные формальные приемы — к наиболее изящным из них принадлежит так называемый «предельный λ-процесс» Вентцеля и Дирака,— успехи в проблеме сингулярностей второго типа оказались намного скромнее. Интересную попытку исключения этих сингулярностей предпринял недавно Дирак, предложивший ввести в «гипотетическом мире» «отрицательные вероятности» (что означает *индефинитность* фундаментальной квадратичной формы в пространстве квантовых состояний) с тем, чтобы позднее переносить математические результаты опять в реальный физический мир по соответственно подобранным правилам. Хотя в «гипотетическом мире», получаемом при объединении этого нового предположения и предельного λ-процесса, расходимости действительно исчезают, физическая интерпретация результатов в реальном мире является, по-видимому, в основном неверной. Мы еще вернемся к этому позднее.

---

* *Difficulties of Field Theories and of Field Quantization.*— Phys. Soc. Cambridge Conf. Rept, 1947, p. 5—10.

[1] *V. Weisskopf.* Phys. Rev., 1939, 56, 72.

[2] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc. London, 1942, **A180**, 1.

Ситуация, в математическом отношении очень похожая на ту, которая имеет место в теории взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем, складывается в случае взаимодействия нуклонов (протонов и нейтронов) с мезонным полем. Различие между сингулярностями двух типов сохраняется и в этом случае. Однако следует подчеркнуть, что в мезонной теории, в противоположность классической электродинамике, мы не можем быть уверены в правильности предположений, касающихся физической модели, даже в том предельном случае, когда мезонное поле можно рассматривать классически. Например, полученный недавно результат, что предельный λ-процесс дает неправильный знак для вклада мезонного поля в магнитные моменты нуклонов, может быть обусловлен либо несостоятельностью λ-процесса как метода вычислений, либо недостаточностью положенных в основу теории физических предположений относительно простых свойств нуклонов.

Что касается сингулярностей типа б), чуждых классической теории, то, по мнению автора, устранение этих расходимостей является существенно квантовотеоретической проблемой. Поэтому классические нелинейные теории поля, в которых, в отличие от теории Максвелла, точечные особенности обладают конечной полевой энергией, не ведут здесь к успеху, так как при квантовании поля немедленно появляются сингулярности второго типа. Вообще, хорошие виды на успех будут иметь, по-видимому, только такие попытки решения проблемы, в которых квантование поля производится не после чисто классического рассмотрения, а напротив, в самом начале.

§ 2

Недавно была предпринята попытка рассмотреть проблему с чисто квантовомеханических позиций, с помощью математического аппарата так называемой «матрицы рассеяния», или «S-матрицы». Эта матрица впервые была определена и применена Уилером [3]. Элементами этой матрицы являются амплитуды волновых функций рассеянных или испущенных частиц (в конечном состоянии) для данных импульсов налетающих частиц (в начальном состоянии). Квадраты абсолютных величин этих матричных элементов, соответствующие, по определению, всегда паре состояний с одинаковыми значениями полной энергии и импульса системы, определяют непосредственно наблюдаемые сечения процессов рассеяния, испускания и поглощения. Значение S-матрицы было особенно подчеркнуто Гейзенбергом [4], который дал общую формулировку не только свойства унитарности, но и ее трансформационных свойств по отношению к группе Лоренца. Более того, Гейзенберг считает, что S-матрица, поскольку она связана прямо с «наблюдаемыми величинами», будет играть

---

[3] *J. A. Wheeler.* Phys. Rev., 1937, 52, 1107.
[4] *W. Heisenberg.* Z. Phys., 1943, **120**, 513, 673.

важную роль в будущей теории, даже если понятие гамильтониана будет в такой теории отвергнуто или изменено. Однако Гейзенберг не дает какого-либо закона или правила, определяющего математически S-матрицу в области, где обычная теория терпит неудачу вследствие известных расходимостей. Поэтому его предложение пока остается чисто схематическим.

Теперь мы приведем краткий вывод общего выражения для S-матрицы, предполагая справедливость обычной волновой механики. Далее обсудим возможные модификации конечного результата в случаях, когда обычная теория ведет к расходимости.

Символы k, l, . . . будут обозначать все переменные, необходимые для определения состояния системы, включая энергию. Кроме того, большими латинскими буквами A, B, . . . мы будем обозначать все переменные, определяющие состояние k, за исключением энергии; другими словами, этими буквами характеризуются все состояния с одинаковой энергией. В этих обозначениях матричный элемент между двумя состояниями можно записать в виде

$$(k' \mid \Phi \mid k'') = (E',\ A' \mid \Phi \mid E'',\ A'') \tag{1}$$

и сумму по всем состояниям — в виде

$$\sum_k \int dE \int_A, \tag{2}$$

где $\int_A$ — либо сумма, либо интеграл, либо и сумма и интеграл по всем состояниям A, имеющим одинаковую энергию (как говорят, расположенных на одной «энергетической оболочке»). Матрицы, определенные только на энергетической оболочке, обозначаются далее жирным шрифтом. В частности, матрица $(A \mid \mathbf{1} \mid B)$ определяется формулой

$$\int_B F(B)(A \mid \mathbf{1} \mid B) = F(A). \tag{3}$$

В соответствии с формулой (2) δ-функция $\delta_{k0} \equiv (k \mid \delta \mid 0)$ расщепляется на два множителя:

$$(k \mid \delta \mid 0) = (A \mid \mathbf{1} \mid 0)\, \delta\,(E_k - E_0). \tag{4}$$

Гамильтониан нашей системы состоит из двух частей: гамильтониана H_0 всех присутствующих частиц в свободном состоянии и энергии взаимодействия H. Энергия E, о которой говорилось выше, определяется как собственное значение свободного гамильтониана H_0, который предполагается диагональным по состояниям k. В качестве переменных состояния k можно использовать, например, моменты всех частиц, которые, однако, могут численно отличаться в различных состояниях с одинаковой энергией. Мы рассматриваем здесь, в частности, стационарные решения волно-

вого уравнения, так что время не входит в S-матрицу явно [5]. Уравнение Шредингера для некоторого собственного значения λ полного гамильтониана $H_0 + H$ можно записать в виде

$$(H_0 + H - \lambda)\,\Phi = 0, \tag{5}$$

или, если мы введем в качестве переменных волновой функции Φ состояния k, для которых гамильтониан H_0 диагонален, и применим матричное представление $(k \mid H \mid l)$ энергии взаимодействия в этих состояниях,

$$(\lambda - E_k)\,\Phi_k = \sum_l (k \mid H \mid l)\,\Phi_l. \tag{6}$$

Мы ограничимся здесь непрерывным спектром энергии [6] и рассмотрим решение, описывающее падающие волны (соответствующие начальному состоянию, обозначенному индексом 0) и расходящиеся сферические волны (числа частиц в обоих состояниях не заданы). Зависимость волновой функции Φ_k от начального состояния будем указывать, подставляя вместо Φ_k матрицу $(k \mid \Phi \mid 0)$. Решение всегда имеет вид

$$(k \mid \Phi \mid 0) = (k \mid \delta \mid 0) + (k \mid f \mid 0)\left[\frac{1}{E_0 - E_k} - i\pi\delta\,(E_0 - E_k)\right], \tag{7}$$

где E_0 — собственное значение H_0 в начальном состоянии 0, а знак в последней скобке отвечает отсутствию сходящихся сферических волн [7]. Гейзенберг ввел для характеристики расходящейся и сходящейся частей волновой функции следующие функции:

$$\delta_+(x) = \frac{1}{2}\,\delta\,(x) - \frac{1}{2\pi i x}, \tag{8а}$$

$$\delta_-(x) = \frac{1}{2}\,\delta\,(x) + \frac{1}{2\pi i x}, \tag{8б}$$

причем

$$\delta_+(x) + \delta_-(x) = \delta\,(x), \quad \delta_-(x) = \delta_+^*(x) = \delta_+(-x). \tag{8в}$$

---

[5] Это не единственно возможная точка зрения. По поводу матриц, зависящих от времени, см. статью Штюкельберга (*E. C. G. Stueckelberg*. Phys. Soc. Cambridge Conf. Rept, 1947, p. 199).

[6] Относительно распространения S-матрицы на случай дискретного спектра энергии методом аналитического продолжения см. статью Мёллера (*Ch. Møller*. Phys. Soc. Cambridge Conf. Rept, 1947, p. 194).

[7] Это обобщает результат Дирака [см. *P. A. M. Dirac*. Quantum Mechanics. 2 ed. Oxford, 1935, p. 197. (Русск. пер.: *П. А. М. Дирак*. Принципы квантовой механики. М.—Л., ОНТИ, 1937.— *Ред.*)] на случай упругого рассеяния одной частицы. Записывая импульс такой частицы в виде $\mathbf{p} = p\cdot\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, Дирак показал, что волновая функция вида

$$\Phi\,(\mathbf{p}) = f\,(p, \mathbf{n})\left[\frac{1}{E_0 - E} - i\pi\delta\,(E_0 - E)\right],$$

где E — заданная функция p, дает в x-пространстве при больших x волновую функцию

$$\Phi\,(\mathbf{x}) = \Phi\,(r\mathbf{n}) \sim (2\pi)^{1/2} p_0 \frac{dp_0}{dE} f\,(p_0, \mathbf{n})\, e^{ip_0 r}/r.$$

Используя равенство (4), мы можем представить формулу (7) в виде

$$(k \mid \Phi \mid 0) = (A \mid \mathbf{1} \mid 0)\, \delta_{-} (E_0 - E_r) + [(A \mid \mathbf{1} \mid 0) - \\ -2\pi i\, (k \mid f \mid 0)]\, \delta_{+} (E_0 - E_r). \quad (9)$$

Отсюда получается «матрица рассеяния» на «энергетической оболочке» $E_k = E_0$

$$(A \mid \boldsymbol{S} \mid 0) = (A \mid \mathbf{1} \mid 0) - 2\pi i\, (A \mid \boldsymbol{f} \mid 0).$$

В матричных обозначениях этот результат можно записать в виде

$$\boldsymbol{S} = \mathbf{1} - 2\pi i \boldsymbol{f}. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь решение волнового уравнения (6) с помощью функций вида (7). Опуская здесь рассмотрение вопроса о собственной энергии, отождествим λ с энергией начального состояния E_0:

$$\lambda = E_0. \quad (11)$$

Подставляя выражения (7) и (11) в уравнение (6) и используя формулы (1) и (2), получаем

$$(k \mid f \mid 0) = (k \mid H \mid 0) - i\pi \int\limits_A (k \mid H \mid E_0, A)(E_0, A \mid f \mid E_0, 0) + \\ + \sum_l (k \mid T \mid l)(l \mid f \mid 0), \quad (12)$$

где

$$(k \mid T \mid l) = \frac{(k \mid H \mid l)}{E_0 - E_l}. \quad (13)$$

С помощью символов матричного умножения уравнение (12) можно записать просто

$$f = H - i\pi H\boldsymbol{f} + Tf, \quad (14)$$

причем жирным шрифтом опять обозначается матрица на энергетической оболочке.

Это неоднородное уравнение для f можно решать методом последовательных приближений, подставляя выражение (14) для f в последний член Tf. Вначале мы получаем [8]

$$f = H - i\pi H\boldsymbol{f} + T\,(H - i\pi H\boldsymbol{f}) + T^2 f$$

или, полагая $K_1 = H$, $K_2 = TH$,

$$f = \sum_{r=1,\,2} K_r - i\pi \sum_{r=1,\,2} K_r \boldsymbol{f} + T^2 f.$$

Продолжая этот процесс, находим

$$f = \sum_{r=1}^{n} K_r - i\pi \sum_{r=1}^{n} K_r \boldsymbol{f} + T^n f,$$

[8] Степени матрицы T вычисляются всегда путем взятия главных значений там, где знаменатели в формуле (13) обращаются в нуль.

причем

$$K_{r+1} = T^r H = \sum_{n_1 \ldots n_r} \frac{(k \mid H \mid n_1)(n_1 \mid H \mid n_2) \ldots (n_r \mid H \mid l)}{(E_0 - E_{n_1})(E_0 - E_{n_2}) \ldots (E_0 - E_{n_r})}. \tag{15}$$

Из последнего выражения видно, что все матрицы K_r являются эрмитовыми. Предполагая, что $\lim\limits_{n\to\infty} T^n f = 0$, т. е. что процесс сходится, и полагая

$$K = \sum_{r=1}^{\infty} K_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} T^{\nu} H, \tag{16}$$

мы, наконец, находим

$$f = K - i\pi K f. \tag{17}$$

Так как член, содержащий T, теперь исчезает, мы получаем операторное уравнение на энергетической оболочке, просто ограничивая состояние k условием $E = E_0$:

$$\boldsymbol{f} + i\pi \boldsymbol{K} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{K} \tag{17а}$$

или

$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{K}}{1 + i\pi \boldsymbol{K}}. \tag{17б}$$

Подставляя это выражение в определение $\boldsymbol{S}$ (10), имеем

$$\boldsymbol{S} = \frac{1 - i\pi \boldsymbol{K}}{1 + i\pi \boldsymbol{K}}. \tag{18}$$

Из того, что $\boldsymbol{K}$ — эрмитова матрица, сразу следует, что матрица $\boldsymbol{S}$ унитарна. Примечательно, что из волновой механики для матрицы $\boldsymbol{S}$ получается выражение (18) с относительно простыми формулами для $\boldsymbol{K}$, тогда как Гейзенберг предпочитает представление $\boldsymbol{S} = e^{i\eta}$, где матрица η эрмитова.

§ 3

Совершенно независимо от недавних исследований Гейзенберга уравнение вида (17) было применено несколькими авторами (обобщившими теорию Вайскопфа и Вигнера для ширины линии) для учета затухания в процессах столкновения. Ясно, однако, что расходимости должны появиться снова, препятствуя применению общих формул этой теории к случаю взаимодействия электронов с фотонами или нуклонов с мезонами, рассмотренному выше. Действительно, в применении к таким случаям выражения (15) для K_ν, в общем, расходятся, если источники поля считать точечными. Однако оказывается, что для заданной пары состояний первый член ряда для K, отличный от нуля, всегда является конечным. Поэтому Гайтлер и Вильсон предложили сохранять в разложении K для данной пары состояний только первый неисчезающий член, заменяя все остальные члены высших порядков просто нулями. Более того, можно доказать,

что это частное правило (правило Гайтлера — Вильсона) согласуется с общими релятивистскими трансформационными свойствами матрицы S. Известно, что применение правила Гайтлера — Вильсона по многим задачам [9] обеспечивает очень хорошее, возможно даже наилучшее при современном состоянии теории, приближение [10]. С другой стороны, это правило, конечно, не является достаточно общим, чтобы давать удовлетворительные результаты во всех физических проблемах или даже для того, чтобы формулировать все проблемы.

(i) В случае присутствия нескольких нуклонов или нескольких электронов это правило дает результаты, не согласующиеся с результатами элементарного рассмотрения взаимодействия этих частиц друг с другом в рамках волновой механики.

(ii) Предельный переход к статическим полям приводит к особым трудностям. С помощью этой теории вообще невозможно сформулировать задачу вычисления вклада мезонного поля в магнитные моменты нуклонов.

(iii) Теория не дает последовательного ответа на вопрос, связанный с проблемой излучения большого числа низкочастотных фотонов при прохождении электрона через поле сил (в частности, на вопрос о поправке к сечению рассеяния электрона, обусловленной радиационной потерей энергии).

Однако следует указать, что в случае проблем (ii) и (iii) для рассмотренной в § 1 теории, которая объединяет λ-процесс с «отрицательными вероятностями», ситуация оказывается нисколько не лучшей. Предельный λ-процесс дает ответ на вопрос (ii), однако этот ответ противоречит опыту, а «отрицательные вероятности» в «гипотетическом мире», переведенные снова в действительный мир, дают на вопрос (iii) ответ, но также неверный. Более того, теория с «отрицательными вероятностями» приводит в действительном мире к S-матрице, в общем случае не унитарной; это тоже следует рассматривать как серьезное принципиальное возражение против такой теории.

По-видимому, усилия теоретиков в будущем должны быть направлены на то, чтобы искать решение проблем (ii) и (iii), которые можно использовать как пробный камень для будущей теории, или на пути улучшения правил вычисления матрицы $\boldsymbol{K}$, или даже на совершенно новом и независимом пути.

---

[9] См. статью Гайтлера (*W. Heitler*. Phys. Soc. Cambridge Conf. Rept, 1947, p. 189).

[10] В случае рассеяния мезонов нуклоном при малых энергиях мезона результат отличается от результата применения λ-процесса, упомянутого в § 1.

1949

ЗАМЕЧАНИЕ ПОСЛЕ КОНФЕРЕНЦИИ ПРОФ. БОРНА *

Существуют два различных метода в статистической интерпретации тенденции приближения системы к состоянию теплового равновесия, отражающих старые методологические различия в подходах Гиббса и Больцмана. Гиббс доказывал возрастание энтропии, связанное с определенными операциями [1], а именно с разделением составной системы на две независимые системы и усреднением плотности по некоторым областям фазового пространства. Понятие времени в описание этой операции не входит; напротив, энтропия, определенная для точной плотности, остается постоянной во времени, даже если плотность зависит от времени [2] . Распространение теоремы Гиббса на квантовую статистику, где место классической функции плотности $P\ (p,\ q)$ в фазовом пространстве занимает матрица плотности $(n \mid P \mid m)$, было произведено Клейном [3]. Он показал также, что энтропия $\frac{1}{k} S = -\mathrm{Sp}\ (P \ln P)$ возрастает, если матрица P в частном представлении (которое может соответствовать представлению определенных наблюдаемых диагональными матрицами) заменяется диагонализованной матрицей [4]

---

* *Note after the Conference of Prof. Born.*— Nuovo cimento, 1949, 6, Suppl., 166—169.

[1] *J. Gibbs.* Principles of Statistical Mechanics, 1902, Ch. 11. (Русск. пер.: *Дж. Гиббс*. Принципы статистической механики. М.—Л., Гостехиздат, 1946.— *Ред.*). Функция $L\ (x,\ y) = x\ (\ln x - \ln y) - x + y$, не принимающая отрицательных значений при $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$ и равная нулю только при $x = y$, оказалась полезным инструментом при доказательстве рассматриваемых теорем.

[2] *P. Ehrenfest*, *T. Ehrenfest*. Encyclopädie der Mathematik, 4, 4; статья 32, с. 62. Соответствующая теорема в квантовой статистике следует немедленно из инвариантности — $S/k = \mathrm{Sp} P \ln P$ относительно унитарных пребразований $P' = UPU^{-1}$, так как матрицы плотности $P\ (t)$ и $P\ (0)$ связаны одна с другой таким преобразованием.

[3] *O. Klein*. Z. Phys., 1931, 72, 767.

[4] Действительно, если P_n — собственные значения первоначальной матрицы, то можно положить

$$P(\lambda, \lambda') = \sum_n U(\lambda, n) P_n U^*(\lambda', n),$$

откуда

$$\overline{P}_\lambda = P(\lambda, \lambda) = \sum_n |U(\lambda, n)|^2 P_n.$$

Поскольку $\mathrm{Sp}\, \overline{P} = \mathrm{Sp}\, P = \sum_n P_n$, легко видеть, что

$$-\mathrm{Sp}\, \overline{P} \ln \overline{P} + \mathrm{Sp}\, P \ln P = \sum_{\lambda, n} |U(\lambda, n)|^2 L(P_n, \overline{P}_\lambda),$$

где функция $L\ (x,\ y)$ определена в прим. 1.

$$\bar{P}(\lambda, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} P(\lambda, \lambda).$$

В этой теореме Клейна содержатся результаты Борна и Грина о возрастании энтропии, так как они предполагали, что матрица $P(\lambda, \lambda')$ диагональна в этом представлении при $t = 0$, и определяли энтропию для всего времени равенством

$$+\ln\frac{1}{k} S(t) = -\sum_{\lambda} P(\lambda, \lambda; t) \ln P(\lambda, \lambda; t).$$

Упомянутая теорема показывает тогда, что $S(t) > S(0)$. Однако я хочу подчеркнуть, что о знаке разности $S(t_1) - S(t_2)$ при $t_1 > t_2 > 0$ ничего сказать нельзя, так как начальный момент $t = 0$ выделен предпосылкой, что матрица $P(\lambda, \lambda')$ диагональна при $t = 0$. Поэтому мне представляется более правильным выразить результат таким образом, что энтропия всегда определяется равенством $\frac{1}{k} S = -\mathrm{Sp}\, P \ln P$ и что возрастание энтропии обусловливается не возрастанием времени, а заменой первоначальной матрицы P на диагональную матрицу $\bar{P}$; это можно интерпретировать как описание соответствующим образом подобранного внешнего воздействия на рассматриваемую систему.

Больцман, в противоположность Гиббсу, рассматривал замкнутые системы в течение больших промежутков времени. Для этих систем он должен был ввести дополнительные предположения о том, что статистическое среднее по микроканоническому ансамблю равно среднему по времени для всех «макроскопических» величин, а также что среднее по времени значение энтропии лишь немного меньше ее микроканонического максимального значения (это означает, что энтропия почти всегда будет иметь близкое к этому значение). Разумеется, эти предположения (составляющие физическое содержание «эргодической гипотезы») должны выполняться только для систем с достаточно большим числом степеней свободы, причем допускается небольшая область исключительных начальных условий. Эренфест [2] в связи с этим указал, что зависимость энтропии от времени не может быть такой, как постулировал Больцман, если энтропия определяется с помощью точной «тонкой» функции плотности ансамбля $P(p, q)$ в фазовом пространстве, и предложил заменить эту функцию усредненной («грубой») функцией плотности. В то время как в классической механике эту «эргодическую гипотезу» не удалось доказать для систем, фактически встречающихся в статистической механике, существенный прогресс в этом направлении при рассмотрении замкнутых систем был достигнут фон Нейманом [5]. С помощью соответствующего определения макроскопических переменных и макроскопической энтропии он сумел доказать, что средние по времени значения этих переменных действи-

---

[5] *J. v. Neumann.* Z. Phys., 1929, 57, 30. Ср. также *W. Pauli, M. Fierz.* Z. Phys., 1937, 106, 572 (русск. пер. см. с. 257.— *Ред.*), где результат Неймана был улучшен (там же приведена библиография предыдущих работ).

тельно ведут себя так, как постулируется эргодической теоремой, даже в отсутствие вмешательства извне.

Для этой цели недостаточно использовать диагонализованную матрицу плотности P, а необходимо еще сделать с помощью усреднения одинаковыми все ее диагональные элементы для всех подпространств, характеризующих макроскопические наблюдаемые. Эти подпространства всего пространства состояний, содержащие, скажем, Z_1, Z_2, ... состояний, аналогичны фазовым ячейкам в классической статистической механике. К макроскопическим наблюдаемым относится и макроскопическая энергия, которая принимает постоянное значение на «энергетической оболочке», на которой может быть $Z = \sum_r Z_r$ состояний. Энергетическая оболочка в общем случае может содержать много, скажем, N «фазовых ячеек». Главная предпосылка справедливости рассматриваемой теоремы заключается в том, чтобы *среднее число состояний Z/N в «фазовой ячейке» энергетической оболочки было большим*. Аргументируется это тем, что в этом случае крайне маловероятно, чтобы среди макроскопических наблюдаемых встретились точные (микроскопические) значения энергии. Вторая предпосылка заключается в отсутствии вырождения значений энергии и их разностей [6] (это исключает из рассмотрения, например, системы, аналогичные газам, без какого-либо взаимодействия между молекулами, или осцилляторам, совершенно не связанным между собой). Можно показать, что этих предпосылок достаточно для того, чтобы были малы отклонения среднего по времени значения макроскопической наблюдаемой от ее микроканонического среднего, а также — отклонения среднего по времени значения энтропии от ее микроканонического максимального значения.

Однако это справедливо не во всех без исключения случаях, а только для «почти всех» макроскопических наблюдателей (для данных чисел Z_1, Z_2, ... состояний в «фазовой ячейке» и для данного числа фазовых ячеек N в энергетической оболочке). Именно статистическая оценка частоты появления этого исключительного наблюдателя (с нетермодинамическими свойствами) делает доказательства Неймана такими длинными и утомительными. Мне представляется, что с момента открытия квантовой механики этому рассмотрению замкнутых систем в статистической механике не уделялось достаточного внимания. Причина заключается в том, что в квантовой механике наблюдение представляет собой процесс, необратимый в принципе, сопровождаемый неконтролируемым по величине взаимодействием между наблюдаемой системой и измеряющими инструментами. Поэтому часто утверждают, что рассмотрение замкнутых систем в статистической термодинамике лишено смысла и что возрастание энтропии происходит вследствие внешних воздействий, сопровождающих наблюдения. Я не думаю, однако, чтобы такой аргумент можно было поддержать, напротив, я защищаю ту точку зрения, что различие между клас-

---

6 Это означает, что $r_\sigma - r_\rho \neq 0$ при $\sigma \neq \rho$ и $(r_\sigma - r_\rho) - (r_{\sigma'} - r_{\rho'}) \neq 0$ при $\rho \neq \rho'$, $\sigma \neq \sigma'$, где r_σ — уровни точной энергии.

сической и квантовой механикой, имеющее такое большое значение в других вопросах, для термодинамики в принципе несущественно. Действительно, возмущение, вносимое макроскопическими наблюдениями, может быть сделано малым, и одного-единственного макроскопического наблюдения в принципе достаточно для проверки того, достигла система своего теплового равновесия или нет. Кроме того, термодинамика допускает, что после каждого «необратимого» изменения в системе можно восстановить ее начальное состояние, если только в качестве компенсации внешний резервуар снабжается теплотой за счет уменьшения веса. С другой стороны, в квантовой механике наблюдение представляет собой процесс, не описываемый физическими законами, процесс, после которого начальное состояние невозможно восстановить никакими средствами. Поэтому мне представляется, что это фундаментальное различие между квантовой и классической механикой не может быть ответственным за статистическую интерпретацию и основание второго закона термодинамики.

ОБ ИНВАРИАНТНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ*

(Совместно с Ф. Вилларсом)

Формальный метод регуляризации выражений, содержащих суммы произведений δ-функций различного типа, применяется сначала на примере поляризации вакуума. Показано, что только регуляризация всего выражения в целом, без факторизации, дает градиентно-инвариантный результат. Далее показано, что при регуляризации выражения для магнитного момента электрона достаточно ввести одну вспомогательную массу при условии, что различные функции одной и той же частицы (т. е. фотонные функции $\overline{D}$ и $D^{(1)}$) регуляризуются одинаковым образом и что произведения двух электронных функций при регуляризации не факторизуются. Тогда получается такой же результат, как при применении метода Швингера, в котором в аргумент δ-функций в качестве переменных интегрирования вводятся соответствующие параметры без использования вспомогательных масс.

§ 1. Введение

Несмотря на многие достижения нового релятивистски-инвариантного формализма квантовой электродинамики [1], основанного на идее «перенормировки» массы и заряда, здесь все еще остаются нерешенными некоторые проблемы единственности, требующие дальнейшего выяснения. Наиболее важной из них, на наш взгляд, является проблема собственной энергии фотона, возникшая вследствие замечания Вентцеля [2] о том, что формальное применение техники интегрирования Швингера к интегралу для этой собственной энергии дает конечный результат, отличный от нуля. Эта проблема формально сводится к более общей проблеме градиентной инвариантности тока, возникающего при поляризации вакуума произвольным внешним полем (необязательно полем световой волны). Швингер [3] показал, что этот ток задается выражением

$$\langle j_\mu(x)\rangle = \frac{i}{2}\int d^4x' \,\langle [j_\mu(x), j_\nu(x')]\rangle_0\, \varepsilon(x-x')\, A_\nu^{\text{внеш}}(x'),$$

* *On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory.* (With F. Villars). — Rev. Mod. Phys., 1949, **21**, 434—444.

[1] *S. Tomonaga.* Progr. Theor. Phys., 1946, **1**, 27; *J. Schwinger.* Phys. Rev., 1948, 74, 1439; 1949, **75**, 651; 1949, **75**, 1912; эти статьи в дальнейшем цитируются как ШI, ШII, ШIII. Наши обозначения по возможности следуют обозначениям этих статей. Относительно определений и свойств функций Δ, $\mathbf{\Delta}$ ($\mathbf{\Delta}$ идентична $\overline{\Delta}$ в ШIII) и $\Delta^{(1)}$ см., в частности, приложение в ШII. В этой работе всюду применяются естественные единицы $\hbar = c = 1$. *F. J. Dyson.* Phys. Rev., 1949, 75, 486; 1949, **75**, 1736. В дальнейшем цитируются как ДI и ДII. (Русск. пер. статьи Томонаги, первых двух статей Швингера и второй статьи Дайсона см. в кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики. М., ИЛ, 1954, с. 1, 12, 40, 205; русск. пер. первой статьи Дайсона см. в кн.: Сдвиг уровней атомных электронов. М., ИЛ, 1950, с. 94.— *Ред.*).

[2] *G. Wentzel.* Phys. Rev., 1948, **74**, 1070.

[3] ШII, соотношение (2.19).

где $\varepsilon(x) = \pm 1$ для $t \gtrless 0$; $A_\nu^{\text{внеш}}(x)$ — векторный потенциал внешнего поля и $\langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0$ — усредненное по вакууму значение коммутатора $j_\mu(x)$ с $j_\nu(x')$. Условие градиентной инвариантности этого выражения для $\langle j_\mu(x) \rangle$ (которое включает в качестве частного случая исчезновение собственной энергии фотона) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \{ \langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 \, \varepsilon(x - x') \} = 0.$$

Швингер пытался доказать справедливость этого условия после приведения его к виду

$$\langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 \frac{\partial \varepsilon(x - x')}{\partial x_\mu},$$

выдвинув аргумент, что временноподобная компонента тока коммутирует с j_ν во всех точках пространственноподобной поверхности[4]. Однако при конкретизации общей инвариантной формы коммутатора для этого случая получается результат, пропорциональный выражению

$$\delta^{(3)}(x - x') \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\nu}.$$

Этот результат оказывается неопределенным вследствие сингулярности $\partial \Delta^{(1)} / \partial x_\nu$ на световом конусе, имеющей вид $\sim x_\nu / (x_\sigma x_\sigma)$. Поэтому выражение в целом можно написать таким образом

$$\delta^4(x - x') \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\nu}$$

в согласии с непосредственным вычислением (см. § 2).

Для устранения этих неопределенностей будем применять далее метод регуляризации δ-функций (или их произведений) с помощью введения вспомогательных масс. Этот метод уже имеет длинную историю. Много труда было затрачено на то, чтобы компенсировать расходимость собственной энергии электрона с помощью вспомогательных полей, соответствующих другим нейтральным частицам с конечной массой покоя, взаимодействующим с электронами[5]. Некоторые авторы формально вводили отрицательную энергию для свободных вспомогательных частиц, тогда как другие получали необходимую компенсацию без этих искусственных предположений, используя различные знаки собственной энергии электрона при его взаимодействии с различными видами полей (например, со скалярными или векторными полями). Мы будем называть «реалистическими» те теории, в которых вспомогательные частицы с конечной массой и положительной энергией предполагаются принципиально наблюдае-

[4] ШII, соотношение (2.29).

[5] Ср. более старую литературу, включая работы этого автора в кн.: *A. Pais.* The Development of the Theory of the Electron. Princeton Univ. Press, 1948.

мыми и описываются наблюдаемыми переменными, входящими в гамильтониан явно, в противоположность «формалистическим» теориям, в которых вспомогательные массы вводятся просто как математические параметры, которые в конечных результатах могут стремиться к бесконечности. Недавно «реалистическая» точка зрения была распространена на проблему исключения сингулярностей в поляризации вакуума, обусловленной рождением виртуальных электрон-позитронных пар во внешних полях; для этого вводятся вспомогательные пары частиц с противоположными электрическими зарядами и с массами, отличными от массы электрона [6]. Было показано, что знаки эффекта поляризации позволяют компенсировать сингулярности только в том случае, если вспомогательные частицы подчиняются статистике Бозе. До настоящего времени не удавалось провести «реалистическую» точку зрения таким образом, чтобы охватить все возможные эффекты в приближениях высшего порядка по постоянной тонкой структуры; не доказано также, что эта проблема не является переопределенной. Можно предполагать, что последовательная «реалистическая» теория будет возможна только в том случае, если правила коммутации и средние по вакууму значения для всех наблюдаемых, входящих в теорию, с самого начала будут свободны от сингулярностей, т. е. будут отличны от функций Δ и $\Delta^{(1)}$, удовлетворяющих волновому уравнению для данного значения массы. Однако реализовать эту программу до сих пор не удавалось.

Поэтому при современном состоянии наших знаний представляет интерес дальнейшее исследование «формалистического» применения вспомогательных масс в релятивистской квантовой теории. Такое исследование было проведено независимо Фейнманом [7], а также Штюкельбергом и Ривье [8]. Последние авторы вводят (более общим путем) произвольное число вспомогательных масс, тогда как первый использует только одну-единственную большую вспомогательную массу, что достаточно для рассмотренной им частной проблемы регуляризации собственной энергии электрона. Из известных разложений функций Δ и $\Delta^{(1)}$ в ряд в окрестности светового конуса легко видеть (см. § 2), что в линейных комбинациях

$$\Delta_R(x) = \sum_i c_i \Delta(x; M_i)$$

и

$$\Delta_R^{(1)}(x) = \sum_i c_i \Delta^{(1)}(x; M_i)$$

---

[6] *G. Rayski*. Acta phys. polon., 1948, 9, 129 (в этой работе в качестве внешнего электромагнитного поля рассмотрены только световые волны); *H. Umezawa, H. Yukawa, E. Yamada*. Progr. Theor. Phys., 1948, 3, N 3, 317.

[7] *R. P. Feynman*. Pocono Conf., 1948; Phys. Rev., 1948, 74, 1439. Приложения см. *V. Weisskopf, J. B. French*. Phys. Rev., 1949, 75, 1240. (Русск. пер. см. в кн.: Сдвиг уровней атомных электронов. М., 1950, с. 123.— *Ред.*).

[8] *E. C. Stueckelberg, D. Rivier*. Phys. Rev., 1948, 74, 218, 986; *D. Rivier*. Helv. phys. acta, 1949, 22, 265.

наиболее сильные сингулярности компенсируются, если

$$\sum_i c_i = 0,$$

а остальные сингулярности (конечные скачки и логарифмические расходимости) также компенсируются, если выполняется дополнительное условие

$$\sum_i c_i M_i^2 = 0.$$

Если для обеспечения регулярности нашего результата достаточно одного первого условия, то очевидно, что необходима только одна вспомогательная масса M_1 (кроме первоначальной массы электрона $M_0 = m$) при $c_1 = -c_0 = -1$. Не следует, однако, забывать, что успех Фейнмана при использовании одной вспомогательной массы в проблеме собственной энергии электрона обеспечивается предположением, что в соответствующем выражении [9], получаемом из инвариантной теории возмущений, обе фотонные функции $\bar{D}$ и $D^{(1)}$ должны регуляризоваться *одной и той же* вспомогательной массой. (Формальная альтернатива заключалась бы в том, чтобы оставить фотонные функции без изменений, а регуляризовать электронные функции $\bar{\Delta}$ и $\Delta^{(1)}$ с помощью одной вспомогательной массы или чтобы регуляризовать все выражение в целом без расщепления на множители также с помощью одной вспомогательной массы.)

При применении формального метода масс-регуляризации к проблеме поляризации вакуума [10] (см. § 4) оказывается, что здесь уже недостаточно использовать одну-единственную вспомогательную массу и что всякая регуляризация $\bar{\Delta}$- или $\Delta^{(1)}$-функций как отдельных множителей дает результаты, неинвариантные относительно градиентного преобразования. Как было показано Райским [11], в этом случае удовлетворительные результаты получаются только при регуляризации всего выражения для тока в целом (без факторизации). Для иллюстрации связи между различными результатами Вентцеля и Швингера для собственной энергии фотона особенно удобно формальное введение непрерывного распределения масс.

В § 5 с «формалистической» точки зрения регуляризации массы рассматривается поправка к магнитному моменту электрона, представляющая один из главных результатов Швингера. Мы согласны со Швингером, что в этом случае использование вспомогательных масс не является обязательным, если вычисления в пространстве импульсов проводятся с достаточной тщательностью (см. дополнительное замечание А). Во всяком случае

---

[9] ШII, формулы (3.77) и (3.82).

[10] Дайсон (см. ДII) применяет для этой проблемы метод регуляризации без вспомогательных масс, очень похожий на методы, использовавшиеся на ранних стадиях теории позитронов.

[11] Райский выдвинул это предложение летом 1948 г. в ходе своих исследований собственной энергии бозонов (см. прим. 6). С его дружеского согласия мы позднее резюмируем его работу и обобщим метод на случай произвольных внешних полей (необязательно полей световых волн).

(в отличие от ситуации в проблеме поляризации вакуума) использование одной вспомогательной массы оказывается достаточным для того, чтобы устранить всякую неопределенность при условии, что в обеих фотонных функциях $\bar{D}$ и $D^{(1)}$ применяется одна и та же масса, аналогично методу Фейнмана для собственной энергии электрона, или что регуляризации подвергаются произведения двух $\bar{\Delta}$- и $\Delta^{(1)}$-функций без факторизации [12] (см. прим. 22).

Обе группы авторов (Штюкельберг — Ривье [8] и Фейнман — Дайсон [13]), по-видимому, придают существенное или даже фундаментальное значение специальной комбинации Δ-функций, которая описывает расходящиеся волны для будущего и сходящиеся волны для прошедшего. Поскольку для наших целей этот вопрос можно оставить открытым, мы обсудим выражение Дайсона для магнитного момента электрона, в которое входит только функция Δ_c для электрона и D_c для фотона [14], лишь в кратком дополнительном замечании Б к § 5. Мы полагаем, что для исследования области применимости специальной функции Δ_c необходимо рассмотреть более сложные примеры.

Резюмируя, мы должны признать, что дополнительные правила, которые приходится применять в «формалистической» теории (например, использование одинаковых масс для $\bar{\Delta}$- и $\Delta^{(1)}$-функций, отказ от факторизации произведений $\bar{\Delta}$- и $\Delta^{(1)}$-функций, соответствующих парам заряженных частиц), можно немедленно объяснить в «реалистической» теории, и эти правила выглядят как бы заимствованными из последней [15].

[12] Проблема магнитного момента нуклонов, обусловленного мезонным взаимодействием, которая проявляет большое сходство с проблемой магнитного момента электрона, обусловленного электромагнитным взаимодействием, в этой статье не рассматривается. Штюкельберг и Ривье (см. прим. 8) приводят формулу для магнитного момента нейтрона, по их характеристике не дающую определенного численного результата. Это можно объяснить в принципе тем, что в наиболее общей форме регуляризация с помощью вспомогательных масс всегда должна давать для интегралов соответствующего типа произвольные значения. С другой стороны, упомянутая выше общая аналогия между двумя случаями дает основание полагать, что те математические методы, которые приводят к однозначному определению магнитного момента электрона, приведут также к единственному определению теоретических результатов для магнитных моментов нуклонов (по крайней мере для скалярных и псевдоскалярных мезонов). Между тем Кейз (*H. M. Case*. Phys. Rev., 1949, **76**, 1) получил (с помощью инвариантной теории возмущений) однозначный результат для магнитного момента нуклонов, полностью совпадающий с результатом Люттингера (*J. Luttinger*. Helv. phys. acta, 1948, **21**, 483). Он не приводит деталей своего вычисления интегралов, в котором вспомогательные массы не требуются.

[13] Ср. ДI и ДII. Для рассматриваемой функции применяются обозначения: D_c (Штюкельберг — Ривье), D_F (Дайсон), Δ_F (Кейз). Мы применяем обозначения Δ_c и D_c соответственно для электронной и фотонной функций.

[14] ДI, разд. X, формула для L.

[15] Некоторый свет на соотношение между двумя точками зрения проливает, возможно, интересная проблема «самонатяжения» электрона [см. прим. 5; в неопубликованном письме прошлого года Пайс делает вывод, что в теории дырок величина этого самонатяжения конечна, а именно равна $(\alpha/2\pi)\ m$, где α — постоянная тонкой структуры, но не обращается в нуль, как этого требует для полного натяжения замкнутой системы специальная теория относительности]. Детальные вычисления одного из нас

Весьма вероятно, что «формалистическая» точка зрения, используемая в этой статье и в работах других авторов, послужит для теории лишь переходной ступенькой, а в дальнейшем либо вспомогательные массы будут полностью исключены, либо «реалистическая» точка зрения будет усовершенствована настолько, что теории уже не понадобятся дальнейшие случайные компенсации расходимостей.

§ 2. Основные понятия регуляризации

В инвариантной теории возмущений, например в теории, введенной в квантовую электродинамику Швингером, существенную роль играют две инвариантные функции: Δ и $\Delta^{(1)}$. Усредненные по вакууму значения соответствующим образом симметризованных произведений операторов поля выражаются через $\Delta^{(1)}$, а функция Δ появляется в связи с ковариантной формулировкой правил коммутации.

При обращении с выражениями, содержащими Δ- и $\Delta^{(1)}$-функции, встречаются некоторые характерные трудности, которые можно кратко сформулировать следующим образом.

а) Появление *неопределенных* выражений как следствие совпадения особенности δ-типа для функции $\Delta(x)$ с полюсом $\Delta^{(1)}(x)$ на световом конусе. Определенное значение им можно придать только с помощью соответствующим образом выбранного предельного процесса.

б) Необходимость учитывать в ходе вычислений «ковариантность» некоторых расходящихся (но формально ковариантных) выражений с целью выделить из них конечную часть. Это также можно сделать правильно только после того, как эти выражения будут сделаны конечными с помощью процесса регуляризации.

Поскольку обе трудности связаны с сингулярными свойствами функций Δ и Δ^1 на световом конусе, для устранения этих трудностей может оказаться полезным инвариантное исключение указанных сингулярностей. При поисках такого процесса мы будем исходить из зависимости функций Δ и $\Delta^{(1)}$ от массы покоя соответствующего поля. Эта зависимость выступает в интегральных представлениях:

$$\Delta^{(1)}(x) = -\frac{m^2}{2\pi^2}\int_0^\infty d\alpha \sin[\lambda m^2 \cdot \alpha + (1/4\alpha)], \tag{1а}$$

$$\Delta(x) = \frac{m^2}{4\pi^2}\int_0^\infty d\alpha \cos[\lambda m^2 \cdot \alpha + (1/4\alpha)], \tag{1б}$$

(Ф. В.) дают результат, что формальная регуляризация с помощью вспомогательных масс не изменяет конечного значения, найденного Пайсом для самонатяжения; поэтому необходимо либо считать, что понятие локализации энергии в пространстве и времени лишено физического смысла в квантовой теории и что допускается только вектор энергии-импульса (который уже проинтегрирован по пространству-времени), либо приписывать компенсирующим вспомогательным массам физическую реальность таким образом, что их вклад в натяжение в промежуточных состояниях компенсирует другую часть самонатяжения электрона.

где

$$\lambda = -x_\mu x_\mu \tag{2}$$

(в дальнейшем $x_4 = ix_0 = it$). Эти представления показывают, что обе функции $\Delta^{(1)}$ и Δ имеют вид

$$m^2 \cdot fu\ (\lambda m^2).$$

Отсюда следует, что сингулярности δ-типа (δ/λ) и полюсы первого порядка ($1/\lambda$) не зависят от m, тогда как конечные скачки и логарифмические сингулярности оказываются пропорциональными m^2. Поскольку эти виды сингулярностей являются единственными, которые встречаются в функциях Δ и $\Delta^{(1)}$, то их можно устранить, вводя регуляризованные инвариантные функции Δ_R и $\Delta_R^{(1)}$ по формулам:

$$\Delta_R^{(1)} = \sum_i c_i \Delta^{(1)}(M_i), \qquad \Delta_R = \sum_i c_i \Delta(M_i), \tag{3}$$

причем постоянные c_i удовлетворяют условиям:

$$\sum_i c_i = 0, \tag{I}$$

$$\sum_i c_i M_i^2 = 0. \tag{Ia}$$

Чтобы продемонстрировать более ясно действенность этих условий, приведем разложение функций $\Delta^{(1)}$ и Δ в ряд для малых λ (опуская члены, исчезающие при $\lambda = 0$):

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{-2}{\lambda} + m^2 \cdot \ln\frac{\gamma}{2}\left(|\lambda| m^2\right)^{1/2} - \frac{m^2}{2} + \ldots\right\}, \tag{4}$$

$$\Delta(x) = \frac{1}{4\pi}\left\{\delta(\lambda) + \left(\frac{m^2}{4} + \ldots\right)\theta^+(\lambda)\right\}, \tag{5}$$

где

$$\theta^+(x) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{при} \quad x \gtrless 0.$$

Легко видеть, что Δ_R исчезает при $\lambda = 0$, так что регуляризуется и функция

$$\Delta\ (x) = -2\varepsilon\ (x)\, \Delta\ (x).$$

Однако функция $\Delta_R^{(1)}$ принимает при $\lambda = 0$ значение

$$\frac{1}{4\pi}\sum_i c_i M_i^2 \ln M_i.$$

Смысл правил регуляризации и состоит в том, что первый член рядов (3) представляет саму нерегуляризованную функцию, т. е. что

$$c_0 = 1,\ M_0 = m,$$

и что все M_i $(i > 0)$ в конечном результате должны устремляться к ∞ (согласно «формалистической» точке зрения, проводимой в дальнейшем). При этом коэффициенты c_i необязательно должны оставаться конечными. Однако мы должны наложить на них условие

$$\sum_i{}' \left(|c_i|/M_i^2\right) \to 0, \tag{6}$$

которое гарантирует, что $\sum_i{}' c_i F(M_i^2) \to 0$ только в том случае, если $|M_i^2 F(M_i^2)| < A$ для всех $i > 0$.

Для общности иногда выгодно заменять дискретный спектр вспомогательных масс непрерывным спектром (включающим в себя, разумеется, дискретный спектр в качестве частного случая):

$$\Delta_R(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\varkappa \rho(\varkappa) \Delta(x; \varkappa) \text{ и т. д.} \tag{7}$$

Здесь $\varkappa$ имеет смысл квадрата массы.

Условия (I), (Ia) теперь имеют вид:

$$\int d\varkappa \rho(\varkappa) = 0, \tag{I'}$$

$$\int d\varkappa\, \varkappa \rho(\varkappa) = 0. \tag{Ia'}$$

Если мы запишем $\rho(\varkappa)$ как $\delta(\varkappa - m^2) + \rho_1(\varkappa)$, то условие (6) примет вид

$$\int\limits_a^\infty d\varkappa \left(|\rho_1(\varkappa)|/\varkappa\right) \to 0, \qquad a > 0. \tag{8}$$

Альтернативная возможность регуляризации представляется правилом

$$F_R = \int d\varkappa \rho(\varkappa) F(\Delta^{(1)}(\varkappa), \boldsymbol{\Delta}(\varkappa)), \tag{9}$$

где F — некая (билинейная или более высокого порядка) форма относительно функций Δ, $\Delta^{(1)}$, $d\Delta/d\lambda$, $d\Delta^{(1)}/d\lambda$.

Применение правила (9) требует дальнейшего разъяснения: форма F может содержать как Δ-функции (электронные), так и D-функции (фотонные). Тогда можно регуляризовать форму F в целом (без факторизации обеих функций Δ и D)

$$F_R = \int d\varkappa\, \rho(\varkappa) F(\Delta^{(1)}(\varkappa'), D^{(1)}(\varkappa); \Delta(\varkappa'), \bar{D}(\varkappa)), \; \varkappa' = (m^2 + \varkappa)^{1/2}$$

или же можно регуляризовать F только по отношению к D-функции поля одного типа, т. е.

$$F_R = \int d\varkappa\, \rho(\varkappa) F(\Delta^{(1)}(m), D^{(1)}(\varkappa); \Delta(m), \bar{D}(\varkappa)).$$

Всякий раз, когда в этом последнем случае форма F линейна относительно D-функции, правило (9) сводится к правилу (3) (т. е. к введению ин-

дивидуально регуляризованных D-функций), но с тем существенным дополнительным условием, что к обеим функциям $\overline{D}$ и $D^{(1)}$ должен применяться один и тот же регуляризующий множитель $\rho(\varkappa)$. Если же, напротив, форма F билинейна относительно рассматриваемого поля, то все билинейные члены должны подвергаться регуляризации без факторизации, но с одним и тем же регуляризующим множителем. В этом последнем случае условия (I′), (I′а) оказываются, вообще говоря, уже недостаточными для удаления из выражения (9) всех сингулярностей. Однако эти условия исключают наиболее сильные сингулярности, в частности особенности типа $\delta(\lambda)/\lambda$.

В дальнейшем всюду будет применяться правило (9), интерпретируемое в смысле, указанном выше. Именно это правило обеспечивает градиентную инвариантность поляризационного тока в проблеме поляризации вакуума — в противоположность следствиям из правила (3).

Можно возразить, что это правило является неоднозначным; но этот кажущийся недостаток отражается только на перенормировке массы и заряда. Точнее, под этим мы подразумеваем, что после перенормировки массы и заряда все дополнительные поправочные члены *не должны зависеть от способа их регуляризации и, естественно, не должны зависеть от параметров c_i и M_i в пределе $M_i \to \infty$ (или $\rho_1(\varkappa) \to 0$ для любых конечных $\varkappa$)*. Это условие не будет выполнено, если каждые слагаемые формы F (9) будут подвергаться независимой и различной регуляризации:

$$F = F_1 + F_2, \quad F_R = \int d\varkappa\, \rho_a(\varkappa)\, F_1(\varkappa) + \int d\varkappa\, \rho_b(\varkappa)\, F_2(\varkappa).$$

Здесь, как будет показано позднее (см. § 5, дополнительное замечание В), может получиться совершенно произвольный результат. Однако члены, описывающие массу и заряд, сами будут зависеть от способа регуляризации, поскольку они содержат величины

$$\sum_i c_i \ln M_i \quad \text{или} \quad \int d\varkappa \rho(\varkappa) \ln \varkappa. \tag{10}$$

В связи с использованием при вычислениях представления функций Δ и $\Delta^{(1)}$ в виде интегралов Фурье [как в выражениях (1а), (1б)] условия (I′), (I′а) удобно выразить через фурье-образ для $\rho(\varkappa)$

$$R(a) = \int d\varkappa\, \rho(\varkappa) e^{-ia\varkappa}. \tag{11}$$

Тогда условия (I′), (I′а) принимают вид:

$$R(0) = 0, \tag{I″}$$

$$R'(0) = 0. \tag{I″а}$$

Интеграл (10) при этом преобразуется в

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-8}^{+\infty} \frac{da}{a}\, \varepsilon(a) R(a),$$
$$\varepsilon(a) = \pm 1 \text{ при } a \gtrless 0. \tag{10′}$$

§ 3. Инвариантная теория возмущений

Пусть $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x) = \psi^*(x)\beta$ — квантованные операторы электронного поля и $A_\mu(x)$ — четырехмерный потенциал поля излучения. Предположим, что ψ, $\bar{\psi}$ и A_μ удовлетворяют уравнениям для невзаимодействующих полей

$$[\gamma_\nu(\partial/\partial x_\nu) + m]\psi = 0, \tag{12}$$

$$(\partial\bar{\psi}/\partial x_\nu)\gamma^\nu - m\bar{\psi} = 0, \tag{12a}$$

$$\Box^2 A_\mu = 0, \tag{13}$$

$$(\partial A_\mu/\partial x_\mu)\,\Psi(t) = 0 \tag{14}$$

и соответственно подчиняются перестановочным соотношениям:

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(x')] = i\delta_{\mu\nu} D(x - x'), \tag{15}$$

$$[\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')] = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}(x - x') = \frac{1}{i}\left(\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - m\right)_{\alpha\beta} \Delta(x - x') \tag{16}$$

(здесь $[A, B] = AB - BA$, $\{A, B\} = AB + BA$). Вспомогательное условие (14) включает вектор состояния системы Ψ, удовлетворяющий уравнению движения

$$i(\partial\Psi/\partial t) = H\Psi, \tag{17}$$

где H — энергия взаимодействия:

$$H = -\int d^3x j_\mu(x) A_\mu(x) = -ie\int d^3x \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x). \tag{18}$$

Решение уравнения (17) может быть получено методом последовательных приближений с помощью системы унитарных преобразований

$$\Psi = e^{-iS_1(t)}\Psi_1 = e^{-iS_1(t)} e^{-iS_2(t)}\Psi_2 = \ldots = U(t)\Psi_K. \tag{19}$$

Здесь вектор Ψ_K в требуемом приближении не зависит от времени и, таким образом, представляет некоторое состояние «свободных частиц».

Изменение свойств оператора Ω, относящегося, скажем, к полю a, при взаимодействии a с вакуумом поля b выражается тогда средним по вакууму (поля b) преобразованного оператора Ω:

$$\langle\Omega\rangle_{\text{вак}(b)} = \langle U^{-1}\Omega U\rangle_{\text{вак}(b)}. \tag{20}$$

Иногда может оказаться удобным выделить электромагнитное поле (вместе с его источниками) из рассматриваемой системы и трактовать его как заданное (c-числовое) поле $A_\mu^{\text{внеш}}(x)$, удовлетворяющее уравнению

$$\Box^2 A_\mu^{\text{внеш}}(x) = -J_\mu^{\text{внеш}}(x). \tag{21}$$

Как и прежде, «состояния» описываются не зависящим от времени вектором состояния Ψ_K, и преобразование, формально аналогичное преоб-

разованию (19), определяющему Ψ_K, показывает изменение среднего значения оператора Ω, производимое полем $A_\mu^{\text{внеш}}$.

Преобразование U по формуле (19) более точно можно записать в виде

$$U\ (t) = e^{-iS_1(t)}\ N_1 e^{-iS_2(t)}\ N_2 \ldots, \qquad (22)$$

где подразумевается, что $S_1\ (t)$ устраняет связь первого порядка, $S_2\,(t)$ — оставшееся взаимодействие второго порядка и т. д. Между этими шагами могут производиться перенормировочные преобразования N, определяющие новые операторы поля материальных частиц, удовлетворяющие уравнениям с подобранной массой.

В соответствии с этой программой S_1 определяется уравнением

$$\dot{S}_1 = H.$$

Для Ψ_1 остается уравнение движения

$$i\,(\partial\Psi_1/\partial t) = \left(\frac{i}{2}[S_1, H] + \ldots\right)\Psi_1. \qquad (23)$$

Тогда уравнение

$$\dot{S}_2 = \frac{i}{2}[S_1, H] - H_{\text{собств}} \qquad (24)$$

приводит к постоянному во времени вектору состояния Ψ_2, содержащему члены с e^2, которые после перенормировки массы исключают $H_{\text{собств}}$ из $i/2[S_1,\ H]$.

Ограничиваясь приближением этого порядка, мы можем в соответствии с выражением (20) записать преобразованный оператор $\mathbf{\Omega}$ в виде

$$\mathbf{\Omega} = \Omega + i\,[S_1, \Omega] - \frac{1}{2}[S_1[S_1, \Omega]] + i\,[S_2, \Omega],$$

$$\mathbf{\Omega}\,(t) = \Omega\ (t) + i\int^t dt'\,[H\,(t'), \Omega\,(t)] - \frac{1}{2}\int^t dt' \int^{t'} dt''\,[H\,(t')[H\,(t''), \Omega\,(t)]] + $$
$$+\ i\int^t dt'\left[\frac{i}{2}[S_1\,(t'), H\,(t')] - H_s\,(t'), \Omega\,(t)\right]$$

или

$$\mathbf{\Omega}\,(t) = \Omega\,(t) + i\int^t dt'\,[H\,(t'), \Omega\ (t)] - \int^t dt' \int^{t'} dt''\,[H\,(t'')[H\,(t'),\Omega\,(t)]] -$$
$$-\ i\int^t dt'\,[H_s\,(t'), \Omega\,(t)]. \qquad (25)^{16}$$

Преобразованный оператор $\mathbf{\Omega}$ легко вычисляется с помощью коммутаторов (15), (16) и полученного из них соотношения

$$[\bar\psi\,(x)\,\gamma^\mu\psi\,(x), \bar\psi\,(x')\,\gamma^\nu\psi\,(x')] =$$
$$= \frac{1}{i}\{\bar\psi\,(x)\,\gamma^\mu S\,(x - x')\,\gamma^\nu\psi\,(x') - \bar\psi\,(x')\gamma^\nu S\,(x' - x)\,\gamma^\mu\psi\,(x)\}. \qquad (26)$$

---

[16] При выводе последней формы оператора был применен упрощающий прием Швингера, основанный на тождестве Якоби.

Чтобы вычислить его среднее значение для определенного состояния (например, для вакуума по отношению к одному из рассматриваемых полей), необходимо еще знать средние по вакууму от соответствующим образом симметризованных произведений:

$$\langle\{A_\mu(x),\ A_\nu(x')\}\rangle_0 = \delta_{\mu\nu}\, D^{(1)}(x - x'), \tag{27}$$

$$\langle[\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(x')]\rangle_0 = -S^{(1)}_{\alpha\beta}(x - x'). \tag{28}$$

В качестве примеров, которые будут рассмотрены позднее, мы приведем следующие.

а) Ток, индуцированный в вакууме (материальных частиц) внешним электромагнитным полем $A_\mu^{\text{внеш}}$ или его источником $J_\mu^{\text{внеш}}$. Требуемое приближение достигается с помощью оператора S_1 и немедленно дает

$$\langle j_\mu(x)\rangle = i\int^{t} dt'\,\langle[H^{\text{внеш}}(t'), j_\mu(x)]\rangle_0 = -4e^2\int d^4x' K_{\mu\nu}(x - x')\, A_\nu^{\text{внеш}}(x'), \tag{29}$$

где

$$K_{\mu\nu}(x - x') = \frac{1}{8ie^2}\langle[j_\mu(x), j_\nu(x')]\rangle_0\, \varepsilon(x - x'). \tag{30}$$ [17]

б) Радиационная поправка порядка e^2 к выражению для тока, ассоциированного с полем материальных частиц. В соответствии с формулой (25) эта поправка содержится в выражении

$$\Delta j_\mu(x) = -\int^{t} dt' \int^{t'} dt''\,\langle[H(t''),[H(t'), j_\mu(x)]]\rangle_{\text{фот. вак}} - i\int^{t} dt'[H_{\text{собств}}(t'), j_\mu(x)]. \tag{31}$$

Одночастичная часть (определение понятия одночастичной части оператора см. ШII, стр. 671) тока $\Delta j_\mu(x)$ содержит член вида

$$i_\mu^{(s)}(x) = \text{const}\,\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\bar{\psi}(x)\,\sigma^{\mu\nu}\psi(x)), \tag{32}$$

описывающий аномальный множитель g для электрона.

---

[17] Множитель $\varepsilon(x - x')$ вводится следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{t} dt' = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\varepsilon(t - t') + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt'.$$

В отсутствие реальных переходов под действием внешнего поля второй интеграл обращается в нуль.

§ 4. Поляризация вакуума и собственная энергия фотона

В этом параграфе мы будем изучать тензор $K_{\mu\nu}(x - x')$, определяемый равенством (30). Из инвариантности индуцированного тока относительно градиентного преобразования $A_\mu \to A_\mu + (\partial\Lambda/\partial x_\mu)$ следует

$$0 = \int d^4x' \, K_{\mu\nu}(x - x') \, (\partial\Lambda/\partial x'_\nu).$$

Отсюда вытекает условие

$$\frac{\partial K_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = 0. \tag{33}$$

В пространстве импульсов, где формула (29) принимает вид

$$\langle j_\mu(p)\rangle = -4e^2 K_{\mu\nu}(p) \, A_\nu(p), \tag{34}$$

условие (33) эквивалентно следующему:

$$K_{\mu\nu}(p)\cdot p_\nu = 0. \tag{33'}$$

Напишем

$$K_{\mu\nu}(p) = K_1 p_\mu p_\nu + K_2 \delta_{\mu\nu} p_\lambda p_\lambda. \tag{35}$$

Тогда условие (33′) эквивалентно требованию

$$K_1 = -K_2 \tag{36}$$

(здесь и K_1, и K_2 являются еще функциями инварианта $p_\lambda p_\lambda$). В силу того что поле $A_\mu^{\text{внеш}}$ и ток $J_\mu^{\text{внеш}}$, порождающий это внешнее поле, связаны уравнением

$$J_\mu^{\text{внеш}}(p) = (\delta_{\mu\nu} p_\lambda p_\lambda - p_\mu p_\nu) \, A_\mu^{\text{внеш}}(p),$$

условие (36) утверждает, что

$$\langle j_\mu(p)\rangle = 4e^2 K_1 J_\mu^{\text{внеш}}(p). \tag{37}$$

Вычисляя $K_{\mu\nu}$ с помощью соотношений (26) и (28), получаем

$$K_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial\Delta}{\partial x_\mu}\frac{\partial\Delta^{(1)}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\Delta}{\partial x_\nu}\frac{\partial\Delta^{(1)}}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\Delta^{(1)}}{\partial x_\lambda} + m^2\Delta^{(1)}\Delta\right). \tag{38а}$$

Из разложений в ряды (4), (5) следует, что это выражение на световом конусе является неопределенным из-за членов типа $\delta(\lambda)/\lambda$, и соотношение (33) вследствие уравнений

$$(\Box^2 - m^2)\Delta^{(1)} = 0, \qquad (\Box^2 - m^2)\,\Delta = -\delta(x)$$

дает также неопределенный результат

$$\frac{\partial K_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = -\frac{\partial\Delta^{(1)}}{\partial x_\mu}\delta(x).$$

В пространстве импульсов, где тензор $K_{\mu\nu}$ имеет вид

$$K_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4K \, \frac{\delta(k_\lambda k_\lambda + m^2)}{(k_\lambda - p_\lambda)^2 + m^2}\{2k_\mu k_\nu - k_\mu p_\nu - k_\nu p_\mu -$$

$$- \delta_{\mu\nu}(-k_\lambda p_\lambda + k_\lambda k_\lambda + m^2)\}, \tag{38б}$$

эта неопределенность менее очевидна, поскольку выражение

$$K_{\mu\nu}(p)\,p_\nu = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k k_\mu \delta(k_\lambda k_\lambda + m^2) \quad (39)$$

может быть приравнено нулю по соображениям симметрии [при этом члены вида $\delta(k_\lambda k_\lambda + m^2)(k_\lambda k_\lambda + m^2)$ опущены]. Однако, поскольку $K_{\mu\nu}(p)$ выражается расходящимся интегралом Фурье, это свойство может быть утеряно в ходе вычисления $K_{\mu\nu}$. Заметим, что условия (I), (Ia) как раз необходимы для того, чтобы сделать интеграл (39) сходящимся!

Вычисление $K_{\mu\nu}$ удобно производить с помощью интегральных представлений Фурье [18]:

$$\Delta^{(1)}(k) = 2\pi\delta(k_\lambda k_\lambda + m^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \exp[i\alpha(k_\lambda k_\lambda + m^2)], \quad (40)$$

$$\Delta(k) = \mathrm{P}\frac{1}{k_\lambda k_\lambda + m^2} = \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\beta\varepsilon(\beta)\exp[i\beta(k_\lambda k_\lambda + m^2)] \quad (41)$$

---

[18] Ма (*S. T. Ma.* Phys. Rev., 1949, 75, 1264) вычислил $K_{\mu\nu}(p)$ посредством элементарного интегрирования в пространстве импульсов, использовав метод Паули и Роуза (*W. Pauli, M. Rose.* Phys. Rev., 1936, 49, 462). Его результаты неинвариантны и по отношению к градиентному, и по отношению к лоренцеву преобразованиям вследствие присутствия в выражении для K_{ii} $(i = 1, 2, 3)$ дополнительного постоянного члена Г. В результате этот член появляется также в следе тензора $K_{\mu\nu}$:

$$K_{\mu\mu} = -3\,p_\mu p_\mu K_1 + 3\Gamma,$$

тогда как в соответствии с соотношениями (35) и (36) след $K_{\mu\mu}$ должен быть пропорционален $(p_\mu p_\mu)$. Однако легко показать, что введение регуляризатора обращает дополнительный член Г в нуль. Действительно, имеем

$$(K_{\lambda\lambda})_R = (2\pi)^{-3}\sum_i c_i \int d^4k\delta(k_\lambda k_\lambda + M_i^2)\left(\frac{p_\lambda p_\lambda - 2M_i^2}{p_\lambda p_\lambda - 2k_\lambda p_\lambda} - 1\right),$$

Для временноподобного вектора $(p_\lambda = 0, ip_0)$ отсюда следует

$$(K_{\lambda\lambda})_R = p_0^2(2\pi)^{-3}\sum_i c_i \int\limits_0^\infty \frac{dkk^2}{\Omega_i(k)}\frac{2\Omega_i^2 - M_i^2}{\Omega_i^2(p_0^2 - 4\Omega_i^2)} - 2(2\pi)^{-3}\sum_i c_i \int\limits_0^\infty \frac{k^2\,dk}{\Omega_i},$$

$$[\Omega_i = (k^2 + M_i^2)^{1/2}].$$

Именно этот второй член и нарушает ковариантность и градиентную инвариантность; но, поскольку он может быть написан в виде

$$-(1/2\pi)^3\sum_i c_i\left(K^2 - \frac{1}{2}M_i^2\right)_{K\to\infty},$$

мы видим, что он исчезает в силу двух условий (I), (Ia).

(здесь P — главное значение). Вводя новую переменную

$$k' = k - (\beta/\alpha + \beta)\, p$$

и представления

$$\int d^4k \exp(iak_\lambda k_\lambda) = (i\pi^2/a^2)\,\varepsilon(a),$$

$$\int d^4k k_\mu k_\nu \exp(iak_\lambda k_\lambda) = -\delta_{\mu\nu}(\pi^2/a^2)\varepsilon(a),$$

получаем (после симметризации подынтегрального выражения по α и β)

$$K_{\mu\nu}(p) = \frac{\pi^2}{4(2\pi)^4}\iint d\alpha\, d\beta\,(\varepsilon(\alpha)+\varepsilon(\beta))\frac{\varepsilon(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2}\times$$
$$\times\exp\left[i\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}p_\lambda p_\lambda + i(\alpha+\beta)m^2\right]\left\{\frac{-2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}p_\mu p_\nu + \right.$$
$$\left. + \delta_{\mu\nu}\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}p_\lambda p_\lambda - m^2 - \frac{i}{\alpha+\beta}\right)\right\}. \qquad (42)$$

И только теперь мы вводим в действие наш рецепт регуляризации, заменяя $\exp[i(\alpha+\beta)m^2]$ на $R(\alpha+\beta)$ в соответствии с формулами (9) и (11) и $m^2\exp[i(\alpha+\beta)m^2]$ на $(1/i)\;R'(\alpha+\beta)$ [19]. Тогда регуляризованное выражение (42) приобретает вид

$$K_{R(\mu\nu)} = \frac{\pi^2}{4(2\pi)^4}\iint d\alpha\, d\beta\left(\varepsilon(\alpha)+\varepsilon(\beta)\frac{\varepsilon(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2}\right)\exp\left(i\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}p_\lambda p_\lambda\right)\times$$
$$\times\left\{\frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}R(\alpha+\beta)(-p_\mu p_\nu + \delta_{\mu\nu}p_\lambda p_\lambda) - \right.$$
$$\left. - \delta_{\mu\nu}\left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}p_\lambda p_\lambda R(\alpha+\beta) + i\frac{R(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} - iR'(\alpha+\beta)\right]\right\}.$$

После замены переменных

$$z = \alpha+\beta, \qquad y = 1/z\,(\alpha-\beta),$$

для которых

$$\varepsilon(\alpha)+\varepsilon(\beta) = 2\varepsilon(z) \qquad \text{для } |y| \leqslant 1$$

и 0 вне этой области, а также

$$d\alpha\, d\beta = \frac{1}{2}|z|\,dz\,dy,$$

---

[19] Вероятно, полезно показать, как факторизованный регуляризатор разрушает градиентную инвариантность. Беря дискретный спектр вспомогательных масс, имеем

$$\frac{\partial K_{R(\mu\nu)}}{\partial x_\nu} = \sum_{ij} c_i c_j\left\{\frac{\partial \Delta_i}{\partial x_\mu}M_i^2\Delta_j^{(1)} + M_i^2\Delta_j\frac{\partial\Delta_j^{(1)}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}(M_iM_j\Delta_i\Delta_j^{(1)}) - \delta(x)\frac{\partial\Delta_j^{(1)}}{\partial x_\mu}\right\} =$$
$$= \sum_{ij} c_i c_j (M_j - M_i)\left\{M_j\frac{\partial\Delta_i}{\partial x_\mu}\Delta_j^{(1)} - M_i\Delta_i\frac{\partial\Delta_j^{(1)}}{\partial x_\mu}\right\}.$$

Это выражение никогда не обращается в нуль тождественно.

тензор $K_{R(\mu\nu)}$ принимает вид

$$K_{R(\mu\nu)} = \frac{\pi^2}{4(2\pi)^4} \int_{-1}^{+1} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z} \varepsilon(z) \exp\left[i \frac{z}{4}(1-y^2) p_\lambda p_\lambda\right] \times$$
$$\times \left\{R(z) \frac{1-y^2}{2}(-p_\mu p_\nu + \delta_{\mu\nu} p_\lambda p_\lambda) - \right.$$
$$\left. - \delta_{\mu\nu}\left[R(z) \frac{1-y^2}{4} p_\lambda p_\lambda + \frac{i}{z} R(z) - iR'(z)\right]\right\}. \quad (43)$$

Вклад последнего члена в скобках можно представить в виде

$$\frac{\pi^2}{4(2\pi)^4} \delta_{\mu\nu} \int_{-1}^{+1} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \varepsilon(z) \frac{d}{dz}\left\{\frac{R(z)}{z} i \exp\left[i \frac{z}{4}(1-y^2) p_\lambda p_\lambda\right]\right\} =$$
$$= \frac{-2i\pi^2}{4(2\pi)^4} \delta_{\mu\nu} \int_{-1}^{+1} dy \left(\frac{R(z)}{z}\right)_{z=0} = \frac{-i\pi^2}{(2\pi)^4} R'(0). \quad (44)$$

В соответствии с нашим условием регуляризации (I″a) этот член равен нулю, и поэтому нам остается выражение, имеющее требуемый вид [ср. соотношения (35) и (36)]:

$$K_{R(\mu\nu)}(p) = K_1(p_\lambda p_\lambda)\{p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p_\lambda p_\lambda\},$$

где K_1 определяется интегралом

$$K_1(p_\lambda p_\lambda) = \frac{-\pi^2}{4(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z} \varepsilon(z) R(z) \int_{-1}^{+1} dy \frac{1-y^2}{2} \exp\left[i \frac{z}{4}(1-y^2) p_\lambda p_\lambda\right]. \quad (45)$$

Первый член в разложении интеграла (45) в ряд по степеням $p_\lambda p_\lambda$

$$K_1(p_\lambda p_\lambda) = K_1^{(0)} + p_\lambda p_\lambda K_1^{(1)} + \ldots$$

дает перенормировку заряда [ср. (37)]

$$\delta e = 4e^2 K_1^{(0)} = \frac{-1}{3} \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z} \varepsilon(z) R(z). \quad (46)$$

В соответствии с формулами (10) и (10′) это выражение можно представить в виде

$$\delta e = \frac{\alpha}{3\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varkappa \rho(\varkappa) \ln|\varkappa|. \quad (46')$$

Теперь очень легко устанавливается связь с результатом Вентцеля для собственной энергии фотона. Поскольку поле световой волны не связано с каким-либо током, $\langle j_\mu(x)\rangle_{\text{индуц}}$ в соответствии с формулой (37) об-

ращается в нуль, если тензор $K_{\mu\nu}$ не имеет требуемого вида (35), (36). Из выражений (43) и (44) следует, что в этом случае индуцированный ток определяется выражением

$$\langle j_\mu(x)\rangle_{\text{индуц}} = -4e^2\frac{-i\pi^2}{(2\pi)^4}R'(0)\,A_\mu^{\text{рад}}(x).$$

Таким образом, собственная энергия фотона

$$H_{\text{собств}}^{\text{фот}} = -\frac{1}{2}\int d^3x\,[\langle j_\mu(x)\rangle_{\text{индуц}}A_\mu^{\text{рад}}(x)]_{1\text{фот}-0\text{фот}}$$

тановится равной

$$H_{\text{собств}}^{\text{фот}} = \frac{e^2}{8\pi^2}(-iR'(0))\int d^3x\,[A_\mu^{\text{рад}}(x)\,A_\mu^{\text{рад}}(x)]_{1\text{фот}-0\text{фот}}.$$

Поскольку $R'(0) = 0$, регуляризованная собственная энергия фотона исчезает, как и должно быть; без регуляризации $R'(0) = im^2$, что вместе с равенством

$$\int d^3x[A_\mu(x)\,A_\mu(x)]_{1\text{фот}-0\text{фот}} = 1/|k|$$

дает для фотона с импульсом k в точности результат Вентцеля

$$H_{\text{собст}}^{(\rho)} = \alpha/2\pi m^2/|k|.$$

Дополнительные замечания

А. В формуле (38б) можно попытаться опустить член

$$I(p) = \int d^4k\frac{\delta(k_\lambda k_\lambda + m^2)}{(k_\lambda - p_\lambda)^2 + m^2}(k_\lambda k_\lambda + m^2),$$

что означает приравнивание нулю выражения $\Delta(x)(-\square^2\Delta^{(1)}(x) + m^2\cdot\Delta^{(1)}(x))$ или его регуляризованного аналога

$$\int d\varkappa\,\rho(\varkappa)\;\Delta(x;\varkappa)[-\square^2\Delta^{(1)}(x;\varkappa) + \varkappa\Delta^{(1)}(x,\varkappa)] = 0. \qquad (47)$$

Вычисление интеграла $I_R(p)$ по изложенным выше правилам дает

$$I_R(p) = \sim\int_{-1}^{+1}dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{dz}\varepsilon(z)\exp\left[i\frac{z}{4}(1-y^2)\,p_\lambda p_\lambda\right]\times$$

$$\times\left[\left(\frac{-2}{z} + i\frac{1+y^2}{4}p_\lambda p_\lambda\right)R(z) + R'(z)\right] +$$

$$+ ip_\lambda p_\lambda\int_1^\infty dyy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{z}\varepsilon(z)R(z)\exp\left[i\frac{z}{4}(1-y^2)\,p_\lambda p_\lambda\right] =$$

$$= \int_{-1}^{+1}dy\int_{-\infty}^{+\infty}dz\varepsilon(z)\frac{d}{dz}\left\{\frac{R(z)}{z}\exp\left[i\frac{z}{4}(1-y^2)\,p_\lambda p_\lambda\right]\right\} +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{z^2}\varepsilon(z)R(z)\int_{-1}^{+1}dy\frac{d}{\partial y}\left\{y\left(1-\exp\left[-\frac{iz}{4}(1-y^2)p_\lambda p_\lambda\right]\right)\right\}=$$
$$=2R'(0)+0=0 \qquad (48)$$

вследствие условия (II″а). Таким образом, можно видеть, что тождество (47) выполняется только вследствие нашего *более сильного условия регуляризации*. Особенно интересно упомянуть, что оно выполняется для нулевого вектора ($p_\lambda p_\lambda=0$) только в том случае, если переход к пределу $p_\lambda p_\lambda\to 0$ осуществляется после интегрирования. Полагая $p_\lambda p_\lambda=0$ в интеграле $I(p)$ (48) с самого начала, мы получили бы дополнительный член

$$\sim\int_{-\infty}^{+\infty}(dz/z^2)\,\varepsilon(z)\,R(z).$$

Вследствие этого нерегуляризованное выражение $I(0)$ становится *бесконечным*, тогда как $I_R(0)$ обращается в нуль только при условии

$$\int(dz/z^2)\,\varepsilon(z)\,R(z)=0 \qquad (49)$$

или

$$\int d\varkappa\rho(\varkappa)\,\varkappa\ln|\varkappa|=0. \qquad (49')$$

Следовательно, Вентцель с таким же успехом мог бы получить и бесконечный результат. Однако с физической точки зрения представляется более естественным рассматривать $p_\lambda p_\lambda=0$ как предельный случай ненулевого вектора, не вводя новое условие (49) или (49′) [20].

Б. Теперь рассмотрим кратко случай собственной энергии электрона. Оператор Δm, выраженный через $\Delta(k)$, $\Delta^{(1)}(k)$, $\bar{D}(k)$, $D^{(1)}(k)$, имеет вид

$$\Delta m=\frac{\alpha}{2\pi^2}\int d^4k\,(i\gamma k+m)\left[\frac{\delta(k_\lambda k_\lambda)}{(k_\lambda+q_\lambda)^2+m^2}+\frac{\delta((k_\lambda+q_\lambda)^2+m^2)}{k_\lambda k_\lambda}\right](q_\lambda q_\lambda=-m^2).$$

Это выражение легко преобразуется:

$$\Delta m=\frac{m\alpha}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{z}\varepsilon(z)\int_{-1}^{+1}dy\,\frac{3-y}{2}\exp\left[iz\left(\frac{1-y}{2}\right)^2\right].$$

Регуляризация функций D и Δ без факторизации соответствует введению регуляризатора $R(z)$. В случае, если регуляризация не проводится, $R(z)$ здесь сводится к 1 в отличие от ранее принятого определения $R(z)$; в рас-

---

[20] Ситуация здесь точно такая же, как при вычислении следа $K_{\lambda\lambda}$ путем элементарного интегрирования по k-пространству (см. прим. 18). Постоянная Г исчезает только при дополнительном предположении [соответствующем (49)]

$$\sum_i c_iM_i^2\ln M_i=0.$$

Это предположение приходится делать, если только этот частный случай не рассматривается опять как предельный для ненулевого вектора.

сматриваемом случае регуляризуемое выражение содержит обе функции, D и Δ, и $\varkappa$ обозначает дополнительный вклад в квадрат массы; таким образом, масса, относящаяся к функции D, равна $\varkappa^{1/2}$, а масса, относящаяся к Δ, равна $(m^2 + \varkappa)^{1/2}$. Теперь запишем Δm в виде

$$\Delta m = \frac{m\alpha}{16\pi} \int_{-1}^{+1} dy\,(3-y) \int \frac{dz}{z}\,\varepsilon(z) \left(\exp\left[iz\left(\frac{1-y}{2}\right)^2\right] - e^{iz}\right) + \\ + \frac{m\alpha}{16\pi} \int \frac{dz}{z}\,\varepsilon(z)\,e^{iz} R(z) \int_{-1}^{+1} dy\,(3-y).$$

Так как первый интеграл сходится, регуляризатор здесь не введен. С помощью формулы

$$\ln|a| = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (dz/z)\,\varepsilon(z)\,(e^{iaz} - e^{iz})$$

мы немедленно получаем

$$-\frac{m\alpha}{8\pi} \int_{-1}^{+1} dy\,(3-y) \ln\left(\frac{1-y}{2}\right)^2 = 5\,\frac{m\alpha}{4\pi}.$$

Если мы введем во второй, расходящийся, интеграл *специальный регуляризатор* [удовлетворяющий условию (I''): $R(0) = 0$, но не $R'(0) = 0$

$$R(z) = 1 - \exp\left[iz\left(\frac{1}{\gamma\omega_0} - 1\right)\right],$$

то получим

$$-3\,\frac{m\alpha}{8\pi} \int \frac{dz}{z}\,\varepsilon(z)\left[\exp\left(iz\,\frac{1}{\gamma\omega_0}\right) - e^{iz}\right] = \frac{6m\alpha}{8\pi} \ln\left|\frac{1}{\gamma\omega_0}\right|$$

и, следовательно,

$$\Delta m = 3m\alpha/2\pi\left(\frac{1}{2}\ln|1/\gamma\omega_0| + \frac{5}{6}\right).$$

Это и есть результат Швингера [ШII, формула (3.97)].

Альтернативная возможность заключается в том, чтобы регуляризовать одни только фотонные D-функции, как было сделано Фейнманом (см. прим. 7). В этом случае более удобно ввести регуляризатор $\rho(\varkappa)$; тогда $(\Delta m)_R$ можно записать в виде

$$(\Delta m)_R = \int d\varkappa\,\rho(\varkappa)\,\Delta m(\varkappa)$$

и

$$\Delta m(\varkappa) = \frac{m\alpha}{16\pi} \int_{-1}^{+1} dy\,(3-y)\,\frac{dz}{z}\,\varepsilon(z) \exp\left[iz\left\{\frac{\varkappa}{2}(1+y) + \left(\frac{1-y}{2}\right)^2\right\}\right].$$

Здесь $\varkappa$ — безразмерный параметр массы, т. е. вспомогательная масса равна $m(\varkappa)^{1/2}$. Учитывая условие (I′), мы можем опустить все члены, не зависящие от $\varkappa$; в результате получаем:

$$\Delta m(\varkappa) = \frac{-m\alpha}{8\pi}\int\limits_{-1}^{+1} dy\,(3-y)\ln\left[\frac{\varkappa}{2}(1+y)+\left(\frac{1-y}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{-m\alpha}{8\pi}\int\limits_{-1}^{+1} dy\,(y-5)(y-1)\frac{\varkappa+(y-1)}{2\varkappa(1+y)+(1-y)^2} = \frac{-m\alpha}{8\pi}F(\varkappa),$$

$$F(\varkappa) = \begin{cases} -10+4\pi(\varkappa)^{1/2}+0(\varkappa), & \varkappa\ll 1; \\ 6\ln\varkappa - 7 + 0\left(\frac{1}{\varkappa}\ln\varkappa\right), & \varkappa\gg 1. \end{cases}$$

С помощью одной вспомогательной массы

$$\rho(\varkappa) = \delta(\varkappa) - \delta\left(\varkappa - \frac{M^2}{m^2}\right),$$

которой достаточно для того, чтобы удовлетворить условию (I′), мы получаем результат Фейнмана

$$\Delta m = \frac{3m\alpha}{2\pi}\left(\ln\frac{M}{m}+\frac{1}{4}\right).$$

§ 5. Магнитный момент электрона

Радиационная поправка порядка e^2 к току, Δj_μ, в соответствии с формулой (31) может быть представлена в виде

$$\Delta j_\mu(p) = F(p_\lambda p_\lambda)\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\,\bar u(p+q)\,\gamma^\mu u(q) +$$
$$+ G(p_\lambda p_\lambda)\,p_\nu\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\,\bar u(p+q)\,\gamma^{[\mu\nu]}u(q). \qquad (50)$$

Здесь $u(q)$, $\bar u(q')$ — амплитуды Фурье функций ψ и $\bar\psi$ соответственно и $\gamma^{[\mu\nu]} = {}^1/_2\,(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$.

Для малых значений p функции F и G можно разложить в ряд по степеням $p_\lambda p_\lambda$ (заметим, что p есть разность импульсов, относящихся соответственно к $\bar\psi$ и ψ). В то время как $F(0)$ по-прежнему дает перенормировку заряда, член с $G(0)$ описывает дополнительный ток, который в x-пространстве принимает более знакомый вид (32); этот ток приводит к радиационной поправке для магнитного момента электрона в однородном внешнем поле.

Из известного разложения тока, предложенного Гордоном [21],

$$ie\bar u(p+q)\,\gamma^\mu u(q) = \frac{e}{2m}\left\{(p_\mu+2q_\mu)\,\bar u(p+q)\,u(q) - p_\lambda\bar u(p+q)\,\gamma^{[\mu\lambda]}u(q)\right\}, \qquad (51)$$

[21] См. Handbuch der Physik, 1933, Bd. 24/1, S. 238.

видно, что радиационную поправку к магнитному моменту можно выразить через аномальный g-фактор:

$$\Delta g = -(4m/e)G(0), \tag{52}$$

поскольку невозмущенный электрон характеризуется значением $g = 2$. Соответствующие члены формулы (31) [содержащие $G(p_\lambda p_\lambda)$] можно записать в виде

$$-(ie^2/2)\iint d^4\xi\, d^4\eta \overline{\psi}(x+\xi)\gamma^\alpha [\overline{D}(\xi-\eta)\overline{S}(\xi)\gamma^\mu S^{(1)}(-\eta) + \\ + \overline{D}(\xi-\eta) S^{(1)}(\xi)\gamma^\mu \overline{S}(-\eta) + D^{(1)}(\xi-\eta)\overline{S}(\xi)\gamma^\mu\overline{S}(-\eta)]\gamma^\alpha\psi(x+\eta),$$

или в пространстве импульсов (полагая $q' = p + q$)

$$\frac{ie^3}{(2\pi)^3}\bar{u}(q')\int d^4k\Omega_\mu(k)[\overline{D}(k)\Delta(k-q)\Delta^{(1)}(k-q') + \\ + \overline{D}(k)\Delta^{(1)}(k-q)\Delta(k-q') + D^{(1)}(k)\Delta(k-q)\Delta(k-q')]u(q), \tag{53}$$

где

$$\Omega_\mu(k) = 2ik_\mu(i\gamma\cdot k - m) - 2i(q'_\mu + q_\mu)(i\gamma\cdot k) + \sim\gamma^\mu.$$

Введем

$$T_{\sigma\tau} = \int d^4k k_\sigma k_\tau [D], \tag{54}$$

$$V_\sigma = \int d^4k k_\sigma [D]; \tag{54a}$$

здесь $[D]$ означает выражение в квадратных скобках в (53). Так как $[D]$ зависит от двух параметров q и q' или от

$$p = q' - q \quad \text{и} \quad Q = q' + q,$$

то $T_{\sigma\tau}$ и V_σ можно записать в виде:

$$T_{\sigma\tau} = \delta_{\sigma\tau}I_0 + p_\sigma p_\tau I_1 + Q_\sigma Q_\tau I_2, \tag{55}$$

$$V_\sigma = Q_\sigma J_2. \tag{55a}$$

Все инварианты, введенные этим способом, следует рассматривать как функции $p_\lambda p_\lambda$ [инвариант $Q_\lambda Q_\lambda$ сводится к такой функции вследствие равенства $Q_\lambda Q_\lambda = -(4m^2 + p_\lambda p_\lambda)$]. С помощью формулы (51) и соотношений

$$\bar{u}(q')\gamma\cdot Qu(q) = 2im\bar{u}(q')u(q), \qquad \bar{u}(q')\gamma\cdot pu(q) = 0$$

мы получаем из (54) и (55)

$$\frac{ie^3}{(2\pi)^3}(-2im)(2I_2(p) - J_2(p))p_\lambda\bar{u}(p+q)\gamma^{[\mu\lambda]}u(q) + \sim\gamma^\mu.$$

Таким образом, имеем

$$G(p_\lambda p_\lambda) = \frac{2me^2}{(2\pi)^3}[2I_2(p) - J_2(p)]$$

и в соответствии с формулой (52) ($\alpha = e^2/4\pi = 1/137$)

$$\Delta g = -4m^2/\pi\, [2I_2(0) - J_2(0)]\, (\alpha/\pi). \tag{56}$$

Интегралы в I_2 и J_2 можно вычислить различными способами. Правило регуляризации, обеспечивающее сходимость выражений (54) для $T_{\sigma\tau}$ и V_σ, позволяет ввести специальную систему координат

$$p = 0, \qquad Q = (0,\, 2im),$$

в которой

$$I_2(0) = {}^1\!/_4 m^2 (T_{11} - T_{44}), \qquad J_2(0) = ({}^1\!/_2 m) V_4. \tag{57}$$

Наиболее удобно производить регуляризацию выражения $[D]$ в целом [в соответствии с правилом (9)] [22]:

$$([D])_R = \sum_i c_i [D]_i.$$

Вычисление выражений (57) в k-пространстве производится элементарно. Вводя обозначения

$$x = k/m, \quad \mu_i = M_i/m, \quad \Omega_i = (x^2 + \mu_i^2)^{1/2}, \quad \mathbf{\Omega}_i = (1 + x^2 + \mu_i^2)^{1/2},$$

получаем:

$$(I_2(0))_R = \frac{\pi}{4m^2} \int\limits_0^\infty x^2\, dx \sum_i c_i \left\{ \frac{\Omega_i^2 + {}^1\!/_3 x^2}{\Omega_i^3} - \frac{2 + \Omega_i^2 + {}^1\!/_3 x^2}{\mathbf{\Omega}_i^3} \right\}, \tag{58}$$

$$(J_2(0))_R = \frac{\pi}{4m^2} \int\limits_0^\infty x^2\, dx \sum_i c_i \frac{1}{\Omega_i^2 \mathbf{\Omega}_i^3}. \tag{58a}$$

Выражение (58а) сходится без регуляризации и дает величину

$$J_2(0) = \pi/2m^2,$$

которая не изменяется при регуляризации, так как все члены с $i > 0$ стремятся к нулю не медленнее, чем c_i/M_i^2 [ср. (6)]. Однако для уравнения (58) это уже не так, ибо оно принимает вид

$$(I_2(0))_R = \frac{\pi}{12m^2} \left(2 \sum_i c_i - \frac{3}{2} \sum_{(i>0)}{}' c_i \right). \tag{59}$$

Таким образом, выражение (58) оказывается сходящимся без регуляризации; следует лишь положить $c_0 = 1$, $c_i\, (i > 0) = 0$, чтобы получить

$$I_2(0) = \pi/6m^2.$$

В то же время соответствующим образом регуляризованное выражение

---

[22] Контрольное вычисление, выполненное с регуляризатором, влияющим только на электронные Δ-функции в $[D]$, дало в точности такой же результат.

дает

$$(I_2(0))_R = \pi/8m^2.$$

Таким образом, имеем

$$2I_2(0) - J_2(0) = -\pi/6m^2,$$

в то время как

$$2(I_2(0))_R - J_2(0) = -\pi/4m^2.$$

Регуляризованное значение, подставленное в формулу (56), дает

$$\Delta g = \alpha/\pi$$

в согласии с результатом Швингера [23].

На этом примере становится ясным, насколько осторожно следует обращаться с расходящимися «ковариантными» выражениями. Действительно, любое разбиение, например, такое, как в формуле (55), никоим образом нельзя считать «ковариантным», пока рассматриваемые выражения не будут сделаны сходящимися с помощью какого-либо процесса инвариантной регуляризации. Как только это будет сделано, можно спокойно пользоваться всеми преимуществами, предоставляемыми надлежащим образом выбранной системой координат, как было показано на примере (57).

Дополнительные замечания

А. Различные возможности вычисления интегралов I_2 и J_2 возникают из разных форм записи скобок $[D]$ в формулах (54), (54a). Из определений (40), (41) легко видеть, что при $q = q_1'$ выражение $[D]$ можно записать в виде

$$[D] = \int_0^1 duu\delta''(k_\lambda k_\lambda - 2k_\lambda q_\lambda u). \qquad (60)^{24}$$

Регуляризация $[D]$ в целом, как было сделано выше, заключается тогда в замене (60) на

$$([D])_R = \int_0^1 duu \sum_i c_i\delta''(k_\lambda k_\lambda - 2k_\lambda q_\lambda u + M_i^2). \qquad (61)$$

Теперь выражение (61) можно подставить в (54):

$$(T_{\sigma\tau})_R = \int_0^1 duu \int d^4k k_\sigma k_\tau \sum_i c_i\delta''(k_\lambda k_\lambda - 2k_\lambda q_\lambda u + M_i^2) =$$

$$= \int_0^1 duu \int d^4k (k_\sigma k_\tau + u^2 q_\sigma q_\tau) \sum_i c_i\delta''(k_\lambda k_\lambda + m^2u^2 + M_i^2). \qquad (62)$$

---

[23] *J. Schwinger*. Phys. Rev., 1948, 73, 416.

[24] Этот метод предложен Швингером (ШIII).

Таким образом, $I_2(0)$ изолируется немедленно:

$$I_2(0) = \frac{1}{4}\int_0^1 duu^3 \sum_i c_i \int d^4k\delta''(k_\lambda k_\lambda + m^2u^2 + M_i^2) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\sum_i c_i \int_0^1 duu^3 \frac{1}{m^2u^2 + M_i^2} = \frac{\pi}{8m^2} + O\left(\frac{c_i}{M_i^2}\right)_{i>0}.$$

Использование регуляризатора в этом случае представляется излишним, но с общей точки зрения сомнительно, чтобы преобразование переменных, необходимое для получения (62), можно было оправдать априори.

Б. Согласно Дайсону, $[D]$ можно написать также в виде

$$-\frac{1}{4}\operatorname{Re}(D_c(k)\,\Delta_c(k-q)\,\Delta_c(k-q')),$$

где

$$\Delta_c(k) = \Delta_1 - 2i\Delta = 2\pi\delta_+(k^2 + m^2), \qquad D_c = D^{(1)} - 2i\bar{D}.$$

Однако с помощью элементарного интегрирования в (комплексном) k-пространстве мы немедленно возвращаемся к выражениям (58), (58а).

В. Наконец, мы проиллюстрируем возможность получить совершенно произвольный результат при различных способах регуляризации различных членов в форме $F(\Delta, \Delta^{(1)})$. Возьмем, например, скобки $[D]$, которые при $q' = q$ можно представить в виде

$$[D] = \frac{\delta(k_\lambda k_\lambda)}{(2k_\lambda q_\lambda)^2} - \frac{1}{k_\lambda k_\lambda}\delta'(k_\lambda k_\lambda - 2k_\lambda q_\lambda) = [D_1] + [D_2].$$

Нам необходимо только заметить, что если R_1 и R_2 — два регуляризатора, то оператор $R = {}^1/_2\,(R_1 + R_2)$ также будет регуляризатором, тогда как $\bar{R} = {}^1/_2\,(R_1 - R_2)$ — оператор, который соответствует спектру масс, удовлетворяющему условиям (1), (1а), но содержащему только вспомогательные массы M_i; тогда мы можем написать

$$R_1[D_1] + R_2[D_2] = R[D] + \bar{R}([D_1] - [D_2]).$$

Дополнительные члены, зависящие от $\bar{R}$, в общем случае отнюдь не обращаются в нуль, а зависят от структуры $\bar{R}$, характеризуемой спектром M_i и коэффициентами γ_i. Например, при вычислении $I_2(0)$ в формулах (54), (55) оператор $\bar{R}$ дает дополнительные члены:

$$\pi/4m^2\left(\sum_i \gamma_i\mu_i^2 \ln \mu_i - \frac{2}{3}\right).$$

Это выражение является совершенно неопределенным.

Мы благодарим проф. Ю. Швингера, д-ра Ф. Дайсона, проф. В. Вайскопфа, д-ра С. Ма и д-ра К. Кейза за ознакомление нас с их работами до опубликования; д-ра Г. Райского за ценную помощь и проф. Е. Штюкельберга и д-ра Ж. Ривье за интересные дискуссии.

Поступила 10 мая 1949 г.

Цюрих,
Высшая техническая школа

1950

О СВЯЗИ МЕЖДУ СПИНОМ И СТАТИСТИКОЙ *

§ 1. Введение и резюме

В релятивистски-инвариантных теориях квантованного поля для нормальных случаев, когда полуцелый спин связывается с принципом запрета (случай фермионов), а целый спин влечет за собой симметричную статистику (случай бозонов), выполняются следующие условия:

1. Вакуум определяется как состояние с наинизшей энергией. Если не учитывается взаимодействие между частицами, то разность энергий этого наинизшего состояния и состояния с конечным числом частиц остается конечной.

2. Физические величины (наблюдаемые) в двух пространственно-временных точках, связанных пространственно-подобным интервалом, коммутируют друг с другом. (Действительно, поскольку скорость сигнала не может быть больше скорости света, измерения в двух таких точках не могут мешать друг другу.)

3. Метрика гильбертова пространства квантовых состояний является положительно-определенной. Это обеспечивает положительность значений физических вероятностей.

В настоящее время, по-видимому, не все согласны с тем, что для физических теорий необходимы все три постулата. Еще раньше[1] я показал, что в аномальных случаях, когда полуцелый спин связан с симметричной статистикой, а целый спин — с принципом запрета, т. е. в случаях, которых не бывает в природе, релятивистски-инвариантная теория квантованного поля не может удовлетворять всем трем упомянутым постулатам. В этой прежней формулировке теории для аномальных случаев постулат 1 нарушается для полуцелых спинов, а постулат 2 — для целых спинов, тогда как постулат 3 выполняется всегда. Между тем Дирак [2] обратил внимание на то, что возможны математические теории, в которых можно отказаться от постулата 3 в пользу более общей индефинитной метрики в пространстве квантовых состояний. В этой теории сумма всех вероятностей, которая сохраняется во времени, в общем случае содержит также отрицательные члены («отрицательные вероятности»), и квадраты «самосопряженных» операторов (заменяющих эрмитовы операторы обычной теории) могут также иметь отрицательные средние значения.

---

* *On the Connection between Spin and Statistics.*— Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 1950, 5, 526—543.

[1] Для спина $^1/_2$ и 0: Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 137. (Русск. пер. см. с. 244.— *Ред.*). Для высших значений спина: Phys. Rev., 1940, 58, 716. (Русск. пер. см. с. 354.— *Ред.*). Ср. также мой доклад: Rev. Mod. Phys., 1941, 13, 203 (русск. пер. см. с. 372.— *Ред.*), который далее цитируется как I.

[2] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc. London, 1942, A180, 1; ср. также мой обзор: Rev. Mod. Phys., 1943, 15, 145 (русск. пер. см. с. 498.— *Ред.*), далее цитируется как II.

Недавно Фейнман в своей «Теории позитронов» [3], в которой используются не представления о квантовании поля, а более интуитивные методы (эквивалентные, как он показал, первым представлениям), сделал важное замечание, что аномальные случаи бозонов со спином $^1/_2$ и фермионов со спином 0 можно рассматривать аналогично нормальному случаю. Рассматривая влияние внешнего электромагнитного поля (способного рождать и уничтожать пары положительных и отрицательных частиц) на исходный вакуум, он получил для вероятности того, что вакуум не изменится, значение больше единицы в аномальном случае, в противоположность нормальному случаю, когда эта вероятность меньше единицы. В настоящей статье для спина $^1/_2$ (§ 2—3) и спина 0 (§ 4) показано, что теория Фейнмана для аномальных случаев эквивалентна математической формулировке квантования поля, отличающейся от рассмотренной мной ранее. В новой форме теории *сохраняются постулаты* 1 *и* 2 (а также ковариантность по отношению к зарядовому сопряжению), но нарушается постулат 3 вследствие введения «отрицательных вероятностей» для состояний с нечетным числом отрицательных частиц. Результат Фейнмана, гласящий, что в таких теориях вероятность для вакуума больше единицы, становится теперь понятным, так как избыток этой вероятности над единицей необходим для компенсации отрицательной вероятности состояний, в которых рождается одна пара. Нефизический характер этих отрицательных вероятностей для аномальных случаев подчеркивается также тем обстоятельством, что среднее по вакууму значение квадрата интеграла от компоненты тока, взятого по конечной области пространства-времени, в этих случаях становится отрицательным [ср. § 3, формулы (А48) и (В49)]. В e^2-приближении эти средние по вакууму действительно очень тесно связаны с величиной отклонения от единицы для вероятности исходного вакуума во внешнем электромагнитном поле.

§ 2. Частицы со спином $^1/_2$ (спинорные поля) без взаимодействия

Возьмем спинорное поле $\psi_\alpha(x)$ и сопряженное ему поле $\overline{\psi}_\alpha(x)$, которые удовлетворяют уравнению Дирака (в естественных единицах $\hbar = c = 1$)

$$\left(\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + m\right)\psi = 0 \tag{1}$$

и

$$\overline{\psi}\left(\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - m\right) = 0, \tag{2}$$

где, как обычно,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta_{\mu\nu}.$$

[3] *R. P. Feynman.* Phys. Rev., 1949, **76**, 749, в особенности с. 756. (Русск. пер. в кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики. М., ИЛ, 1954, с. 138.— *Ред.*). Ср. также *D. Rivier.* Helv. phys. acta, 1949, **22**, 265.

Общее решение можно разложить на собственные колебания, соответствующие плоским волнам, по формулам [4]:

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sum_{r=1,2} \{u_r(k)\, a_\alpha^r(k)\, e^{i(k,x)} + \hat{v}^r(k)\, b_\alpha^r(k)\, e^{-i(k,x)}\}, \quad (3)$$

$$\overline{\psi}_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sum_{r=1,2} \{\hat{u}_r(k)\, \bar{a}_\alpha^r(k)\, e^{-i(k,x)} + v_r(k)\, \bar{b}_\alpha^r(k)\, e^{+i(k,x)}\}. \quad (4)$$

Связь операторов $\overline{\psi}_\alpha(x)$, $\hat{u}_r(k)$, $\hat{v}_r(k)$ с эрмитово-сопряженными [5] операторами $\psi_\alpha(x)$, $u_r(k)$, $v_r(k)$ соответственно мы оставляем пока неопределенной, но для c-чисел $\bar{a}_\alpha^r(k)$, $\bar{b}_\alpha^r(k)$ предполагаем, как обычно, что для каждого k

$$\bar{a}^r = a^{*r}\gamma^4, \qquad \bar{b}^r = b^{*r}\gamma^4. \quad (5)$$

В четырехмерном скалярном произведении (k, x) четвертая компонента вектора k_ν всегда определяется по формуле $k_4 = i\omega = +i\sqrt{k^2 + m^2}$. Мы вводим для c-чисел a_α^r, b_α^r при всех значениях k условия нормировки:

$$\sum a_\rho^{*r} a_\rho^s = \delta_{rs}, \qquad \sum b_\rho^{*r} b_\rho^s = \delta_{rs}. \quad (6)$$

Далее, из уравнения Дирака следуют также соотношения:

$$\sum_r a_\alpha^r \bar{a}_\beta^r = -\frac{1}{2\omega}(i\gamma^\nu k_\nu - m)_{\alpha\beta}, \quad (7)$$

$$\sum_r b_\alpha^r \bar{b}_\beta^r = +\frac{1}{2\omega}(-i\gamma^\nu k_\nu - m)_{\alpha\beta}. \quad (8)$$

Отсюда мы получаем связь с функциями Швингера [6]

$$S_{\alpha\beta}(x) = \left(\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - m\right)_{\alpha\beta} \Delta(x), \qquad S_{\alpha\beta}^{(1)}(x) = \left(\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - m\right)_{\alpha\beta} \Delta^{(1)}(x)$$

в виде соотношений:

$$\frac{1}{V}\sum_k \sum_r a_\alpha^r \bar{a}_\beta^r \exp\,[i(k, x - x')] = -iS_{\alpha\beta}^{+}(x - x') = -\frac{i}{2}(S - iS^{(1)})(x - x'), \quad (9)$$

$$\frac{1}{V}\sum_k \sum_r b_\alpha^r \bar{b}_\beta^r \exp\,[-i(k, x - x')] = -iS_{\alpha\beta}^{-}(x - x') = -\frac{i}{2}(S + iS^{(1)})(x - x'). \quad (10)$$

---

[4] См. I, соотношения (84) — (86) и с. 224 ниже. В правой части равенства (86), в выражении для $\sum_r b_\rho^r b_\sigma^{*r}$ вместо $-\alpha\mathbf{k}$ следует читать $+\alpha\mathbf{k}$. (В русском переводе, с. 604, это исправление учтено. — *Ред.*).

[5] Звездочка всегда обозначает комплексное сопряжение для c-чисел и эрмитово сопряжение для операторов. Спиновые индексы опускаются, если это не ведет к недоразумениям.

[6] *J. Schwinger*. Phys. Rev., 1948, **74**, 1939; 1949, **75**, 651; **76**, 790. (Русск. пер. см. в кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики. М., 1954, с. 12, 40, 78.— *Ред.*). Мы используем здесь, насколько это возможно, обозначения Швингера.

Для всех рассматриваемых теорий определяем энергию или гамильтониан в отсутствие взаимодействия следующим образом:

$$E = -\int \bar{\psi}\gamma^4 \frac{\partial \psi}{\partial x_4}\, d^3x = \int \bar{\psi}\left(\boldsymbol{\gamma}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + m\right)\psi\, d^3x, \tag{11а}$$

или также

$$E = +\int \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_4}\,\gamma^4 \psi\, d^3x = \int \left(-\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{x}}\,\boldsymbol{\gamma} + m\bar{\psi}\right)\psi\, d^3x. \tag{11б}$$

Отсюда в соответствии с формулами (4) — (6) получаем

$$E = \sum_{k,\,r} \omega_k (\hat{u}_r u_r - v_r \hat{v}_r). \tag{12}$$

Канонические правила коммутации

$$[E, \psi] = -i\,\frac{\partial \psi}{\partial t}, \qquad [E, \bar{\psi}] = -i\,\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \tag{13}$$

в силу формулы (4) эквивалентны соотношениям:

$$[E, u_r] = -\omega u_r, \qquad [E, v_r] = -\omega v_r, \tag{14а}$$

$$[E, \hat{u}_r] = +\omega \hat{u}_r, \qquad [E, \hat{v}_r] = +\omega \hat{v}_r. \tag{14б}$$

В соответствии с независимостью различных собственных колебаний мы удовлетворим соотношениям (12) и (14), полагая:

$$[\hat{u}_r u_r, u_s] = -u_r \delta_{rs}, \qquad [\hat{u}_r u_r, \hat{u}_s] = +\hat{u}_r \delta_{rs}, \tag{15а}$$

$$[v_r \hat{v}_r, v_s] = +v_r \delta_{rs}, \qquad [v_r \hat{v}_r, \hat{v}_s] = -\hat{v}_r \delta_{rs}, \tag{15б}$$

$$[\hat{u}_r u_r, v_s] = [\hat{u}_r u_r, \hat{v}_s] = [\hat{v}_r v_r, u_s] = [\hat{v}_r v_r, \hat{u}_s] = 0.$$

Для иллюстрации свойств зарядового сопряжения мы используем матрицу Швингера C, определяемую соотношениями [7]:

$$\gamma^{\nu T} = \gamma^{\nu *} = -C^{-1}\gamma^{\nu} C,$$
$$CC^{\dagger} = 1, \qquad C^T = -C, \tag{16}$$

и выберем в качестве зарядово-сопряженного относительно $a_\rho e^{i(k,x)}$ решения $b_\rho e^{-i(k,x)}$ по формулам:

$$b = C\bar{a}, \;\; \bar{b} = C^{-1}a. \tag{17}$$

Однако сохраним перемену знака в обычном соотношении между зарядово-сопряженными операторами поля $\psi'_\alpha(x)$ и первоначальными сопряженными операторами $\bar{\psi}_\alpha(x)$ для аномального случая, к обсуждению которого мы вернемся позже. Здесь мы приведем соотношения для S-функций

[7] Эта матрица отличается от матрицы C в I. В моей более ранней работе [Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 109. (Русск. пер. см. с. 222.— *Ред.*)] матрица Швингера C обозначалась как $B\gamma^5$. В применении к матрице значок T обозначает транспонирование, $*$ — комплексное сопряжение и $\dagger$ — эрмитово сопряжение.

Швингера

$$(C^{-1}S^{+}(-x)C)_{\alpha\beta} = -S^{-}_{\beta\alpha}(x),$$
$$(C^{-1}S^{-}(-x)C)_{\alpha\beta} = -S^{+}_{\beta\alpha}(x), \quad (18)$$

или также

$$(C^{-1}S(-x)C)_{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha}(x), \quad (19)$$

$$(C^{-1}S^{(1)}(-x)C)_{\alpha\beta} = +S^{(1)}_{\alpha\beta}(x). \quad (20)$$

А) *Нормальный случай (принцип запрета).* Для облегчения сравнения с аномальными теориями дадим сначала краткую сводку некоторых формул, известных для нормального случая частиц со спином $^1/_2$, подчиняющихся принципу запрета. Прежде всего полагаем

$$\hat{u}_r = u_r^*, \quad \hat{v}_r = v_r^*, \quad (A21)$$

и отсюда

$$\bar{\psi} = \psi^*\gamma^4. \quad (A22)$$

Кроме того, в согласии с соотношениями (15а) и (15б) имеем

$$\{u_r, u_s^*\} = \{v_r, v_s^*\} = \delta_{rs}. \quad (A23)$$

Все остальные антикоммутаторы между этими операторами обращаются в нуль. Таким образом,

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = -iS_{\alpha\beta}(x-x'). \quad (A24)$$

Дираковская идея дырок выражается предположением, что числа частиц определяются соотношениями:

$$N_r^+ = \overset{*}{u}_r u_r, \quad \text{откуда} \quad 1 - N_r^+ = u_r\overset{*}{u}_r;$$
$$N_r^- = \overset{*}{v}_r v_r, \quad \text{откуда} \quad 1 - N_r^- = v_r\overset{*}{v}_r. \quad (A25)$$

Другими словами, для вакуума предполагается

$$\langle \overset{*}{u}_r u_r\rangle_0 = 0, \quad \langle u_r\overset{*}{u}_r\rangle_0 = 1 \quad (A26)$$

и

$$\langle \overset{*}{v}_r v_r\rangle_0 = 0, \quad \langle v_r\overset{*}{v}_r\rangle_0 = 1.$$

Поскольку энергия (12) с учетом формул (А21), (А25) принимает вид

$$E = \sum_{r,\,k} \omega(N_r^+ + N_r^- - 1), \quad (A27)$$

используемое определение чисел частиц удовлетворяет условию, что вакуум должен быть состоянием с самой низшей энергией. Из формул (4), (9), (10) и (А26) непосредственно следует:

$$\langle \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\rangle_0 = -iS^{+}_{\alpha\beta}(x-x'), \quad \langle \bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)\rangle_0 = -iS^{-}_{\alpha\beta}(x-x'),$$
$$\langle [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')]\rangle_0 = -S^{(1)}_{\alpha\beta}(x-x'). \quad (A28)$$

Антикоммутатор (A23) и средние по вакууму значения (A26) будут инвариантны относительно зарядового сопряжения, если последнее определяется формулами:

$$u'_r = v_r, \quad u'^*_r = v^*_r, \quad v'_r = u_r, \quad v'^*_r = u^*_r, \tag{A29}$$

правильно воспроизводящими перестановку N^+ и N^- согласно (A25). Так как это преобразование в соответствии с формулами (4) и (17) эквивалентно преобразованию

$$\psi' = C\bar{\psi}, \quad \bar{\psi}' = C^{-1}\psi, \tag{A30}$$

то последнее также сохраняет антикоммутатор (A24) и средние по вакууму значения (A28). Это можно также доказать непосредственно, получив из (A30) с помощью формул (16) соотношения

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha(x)\bar{\psi}'_\beta(x') &= -(C\bar{\psi}(x)\psi(x')C^{-1})_{\alpha\beta}, \\ \bar{\psi}'_\beta(x)\psi'_\alpha(x) &= -(C\psi(x')\bar{\psi}(x)C^{-1})_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{A31}$$

и далее

$$\begin{aligned} \{\psi'_\alpha(x), \bar{\psi}'_\beta(x')\} &= -(C\{\bar{\psi}(x), \psi(x')\}C^{-1})_{\alpha\beta} = -(C^{-1}\{\psi(x'), \bar{\psi}(x)\}C)_{\beta\alpha}, \\ [\psi'_\alpha(x), \bar{\psi}'_\beta(x')] &= -(C[\bar{\psi}(x), \psi(x')]C^{-1})_{\alpha\beta} = +(C^{-1}[\psi(x'), \bar{\psi}(x)])C_{\beta\alpha}. \end{aligned} \tag{A32}$$

Сравнивая этот результат с соотношениями (18) — (20), мы непосредственно доказываем зарядовую инвариантность (A24) и (A28).

Чтобы получить выражение для тока, изменяющее знак при переходе к зарядово-сопряженным величинам, мы сначала заметим, что в теории квантованного поля две величины, а именно $\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')$ и $-\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)$, различаются только c-числом. Поэтому, как впервые было предложено Гейзенбергом [8], выражение для тока в c-числовой теории $j_\mu(x) = ie\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ можно заменить следующим:

$$j_\mu(x) = -\frac{ie}{2}[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x)]\gamma^\mu_{\beta\alpha}. \tag{A33}$$

Тогда для полного заряда мы действительно получим

$$Q = \int(-i)j_4(x)\,d^3x = \frac{e}{2}\sum_r\sum_k([u^*_r u_r] - [v^*_r v_r]) = e\sum_{r,k}(N^+_r - N^-_r). \tag{A34}$$

Чтобы обеспечить выполнение соотношения

$$j'_\mu(x) = -j_\mu(x) \tag{A35}$$

в каждой точке пространства-времени, необходимо устранить некоторую неопределенность в значении коммутатора $[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')]$ в случае совпадения точек пространства-времени, $x = x'$, определив предельный

[8] *W. Heisenberg*. Z. Phys., 1934, 90, 209.

переход $x' \to x$. Из формул (А32) и (16) следует, что для выражений $[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')]\gamma^\mu_{\beta\alpha}$ и $[\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x)]\gamma^\mu_{\beta\alpha}$ зарядово-сопряженными выражениями являются соответственно $-[\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x)]\gamma^\mu_{\beta\alpha}$ и $-[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')]\gamma^\mu_{\beta\alpha}$. Поэтому сумма первых двух выражений обладает требуемым свойством изменять знак при зарядовом сопряжении. Следовательно, если мы введем определение

$$[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x)] = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{2}([\psi_\alpha(x+\xi), \bar{\psi}_\beta(x-\xi)] + [\psi_\alpha(x-\xi), \bar{\psi}_\beta(x+\xi)]), \tag{A36}$$

то будет выполняться соотношение (А35) (поскольку оно справедливо даже до предельного перехода $\xi \to 0$) и, кроме того, ввиду зарядовой инвариантности всех величин, усредненных по вакууму, будет обеспечено равенство

$$\langle j_\mu(x)\rangle_0 = 0. \tag{A37}$$

Наконец, заметим, что при введении коммутатора в выражения для энергии (11) или (12) [и аналогично в выражение (А33) для заряда] полная нулевая энергия не изменяется и потому он может быть опущен.

В) *Аномальный случай* (*статистика Бозе*). В случае статистики Бозе c-числами должны быть не антикоммутаторы, а коммутаторы между полевыми величинами, и в соответствии с соотношениями (13) — (15) это можно сделать, только полагая:

$$[u_r, \hat{u}_s] = \delta_{rs}, \qquad [v_r, \hat{v}_s] = -\delta_{rs}. \tag{B23}$$

Все другие коммутаторы между этими операторами равны нулю. Отсюда с учетом формулы (4) следует, что

$$[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')] = -iS_{\alpha\beta}(x-x'). \tag{B24}$$

Но теперь возможны различные предположения. Во-первых, можно сохранить соотношения (А21), (А22) между $\bar{\psi}$, $\hat{u}$, $\hat{v}$ и ψ^*, u^*, v^* соответственно. Это приводит к соотношениям:

$$N_r^+ = \hat{u}_r u_r, \qquad N_r^+ + 1 = u_r\hat{u}_r,$$

$$N_r^- = v_r\hat{v}_r, \qquad N_r^- + 1 = \hat{v}_r v_r,$$

где собственные значения операторов N равны 0, 1, 2, . . . Выражение для энергии (12) принимает вид

$$E = \sum_{k,r}\omega(N_r^+ - N_r^-),$$

а для заряда получается формула

$$Q = e\int\bar{\psi}\gamma^4\psi d^3x = e\sum_{k,r}(N_r^+ + N_r^- - 1).$$

Это означает существование частиц с отрицательной энергией, имеющих заряд одного знака, так что их число остается всегда постоянным, или, другими словами, здесь не бывает рождения и аннигиляции пар. Это имеет следствием, что состояние (назовем его «0»), в котором все числа частиц обращаются в нуль, теоретически является устойчивым, хотя оно едва ли может рассматриваться в такой теории, как «вакуум», из-за существования состояний с отрицательной энергией.

Для среднего значения билинейных выражений из полевых величин в этом «нулевом состоянии» имеем

$$\langle\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)\rangle_0 = 0.$$

Отсюда получаем

$$\langle\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\rangle_0 = \langle\{\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(x')\}\rangle_0 = -iS_{\alpha\beta}(x-x').$$

Поскольку все частицы имеют одинаковый заряд, здесь не может быть зарядового сопряжения.

Однако существует вторая возможность изменить соотношение между «сопряженными» операторами $\bar{\psi}$, $\hat{u}$, $\hat{v}$ и операторами, эрмитово-сопряженными ψ, u, v. В этом случае операторы, соответствующие физически наблюдаемым, будут уже не эрмитово-сопряженными, а самосопряженными [9]. В частности, гамильтониан системы является самосопряженным, и величиной, сохраняющейся во времени, будет уже не $\sum\limits_n \Psi_n^*\Psi_n$, а

$$\sum_n\sum_m \Psi_n^*\eta_{nm}\Psi_m = \text{const}. \tag{B38}$$

Здесь дискретный индекс n сокращенно обозначает аргумент Ψ-функции в произвольном представлении и η — оператор, удовлетворяющий условию, связывающему сопряженный оператор $\hat{O}$ с эрмитово-сопряженным O^* для любого физического оператора O, применяемого в теории [10]:

$$\eta\hat{O} = O^*\eta. \tag{B39}$$

Мы получаем нечто новое — но, по-видимому, нечто нефизическое,— если квадратичная форма не является положительно-определенной. Из соотношения (B38) видно, что в представлении, в котором оператор η диагонален, выражение $\eta_n|\Psi_n|^2$ (с точностью до нормировочного множителя, независимого от n) формально следует интерпретировать как «вероятность» того, что в состоянии, характеризуемом Ψ_n, переменные Ψ-функции имеют некоторый набор значений, соответствующий букве n. Если величина η_n может быть отрицательной, то этим способом формально можно ввести «отрицательные вероятности». Кроме того, мы определим сред-

[9] Если полагать, что величина $\bar{\psi}$ сопряжена величине ψ, то мнимую координату $x_4 = it$ (вместо времени t) вместе с компонентами вообще всех векторов следует считать самосопряженной.

[10] См. литературу, цитированную выше в прим. 1.

нее значение $\langle A\rangle$ оператора A в состоянии Ψ_n следующим выражением [11]:

$$\langle A\rangle = \frac{\mathrm{Tr}\,(\Psi^*\eta A\Psi)}{\mathrm{Tr}\,(\Psi^*\eta\Psi)}. \tag{B40}$$

Это определение теряет силу для состояний, где знаменатель обращается в нуль (т. е. где вектор состояния в гильбертовом пространстве имеет нулевую длину); но эти состояния должны, конечно, играть в такой теории совершенно особую роль.

Теория, которую мы будем исследовать здесь, характеризуется частным предположением [12]:

$$\hat{u}_r(k) = u_r^*(k), \qquad v_r(k) = -v_r^*(k), \tag{B21}$$

приводящим в связи с (B23) к соотношениям [13]:

$$\begin{aligned} N_r^+ &= \hat{u}_r u_r, \qquad & N_r^- + 1 &= u_r\hat{u}_r, \\ N_r^- &= -\hat{v}_r v_r, \qquad & N_r^- + 1 &= -v_r\hat{v}_r, \end{aligned} \tag{B25}$$

причем каждый оператор N^+, N^- имеет собственные значения 0, 1, 2, ...

Условие (B39) для η принимает здесь вид

$$\eta\hat{v}_r + \hat{v}_r\eta = 0, \qquad \eta\hat{u}_r - \hat{u}_r\eta = 0,$$

решением которого является

$$\eta = (-1)^{\sum\limits_{r,k} N_r^-}. \tag{B41}$$

Оператор η здесь диагонален в представлении, где оператор $N^-(k)$ диагонален, и не зависящая от времени квадратичная форма (B38) принимает вид

$$\sum_{(\ldots N_{r,k}^+\ldots;\ \ldots N_{r,k}^-)} (-1)^{\sum N_r^-}\,|\Psi(\ldots N_{r,k}^+\ldots;\ \ldots N_{r,k}^-\ldots)|^2 = \mathrm{const}. \tag{B41'}$$

Среднее значение некоторой функции $F(\ldots N_{r,k}^+\ldots;\ \ldots N_{r,k}^-\ldots)$ в этом состоянии $\Psi(\ldots N_{r,k}^+\ldots;\ \ldots N_{r,k}^-\ldots)$ определяется следующим образом:

$$\langle F(\ldots N_{r,k}^+\ldots;\ \ldots N_{r,k}^-\ldots)\rangle_\Psi =$$

$$= \frac{\sum\limits_{N^+,N^-} F(\ldots N^+\ldots;\ \ldots N^-\ldots)(-1)^{\sum\limits_{r,k} N_r^-}\,|\Psi(\ldots N^+\ldots;\ \ldots N^-\ldots)|^2}{\sum\limits_{N^+,N^-} (-1)^{\sum\limits_{r,k} N_r^-}\,|\Psi(\ldots N^+\ldots;\ \ldots N^-\ldots)|^2}. \tag{B42}$$

---

[11] В II, в формуле (3) я опустил знаменатель в выражении (B40), но определение (B40), по-видимому, представляется более естественным просто потому, что при нем среднее значение постоянной равно самой постоянной.

[12] Ср. II, гл. 3.

[13] Теория именно такого типа была рассмотрена Дираком в 1942 г.

В следующем параграфе мы выведем из этого определения следствия, характерные для случая, когда присутствует внешнее электромагнитное поле. Подставляя теперь соотношения (B25) в формулу (12), получаем выражение для энергии

$$E = \sum \omega (N_r^+ + N_r^- + 1), \tag{B27}$$

в котором нулевая энергия имеет обратный знак, а состояние $N^+ = N^- = 0$ все еще соответствует наименьшей энергии и, следовательно, снова играет роль вакуума. Для билинейных относительно $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x')$ величин, усредненных по вакууму, получаем из (B25) выражение, аналогичное (A28):

$$\langle \psi_\alpha (x) \psi_\beta (x') \rangle_0 = -iS^+_{\alpha\beta} (x - x'), \quad \langle \bar{\psi}_\beta (x') \psi_\alpha (x) \rangle_0 = +iS^-_{\alpha\beta} (x - x'),$$
$$\langle \{ \psi_\alpha (x), \ \bar{\psi}_\beta (x') \} \rangle_0 = -S^{(1)}_{\alpha\beta} (x - x'). \tag{B28}$$

Характерно для этого «аномального» случая то, что функция $S^{(1)}$ входит в антикоммутатор, а функция S — в коммутатор, в противоположность нормальному случаю, где антикоммутатор содержит функцию S, а коммутатор — функцию $S^{(1)}$.

Для сохранения закона коммутации (B23) и перестановки N^+ и N^- ($N'^+ = N^-$, $N'^- = N^+$) зарядовое сопряжение теперь следует определить формулами:

$$u_r' = v_r, \quad \hat{u}_r' = -\hat{v}_r,$$
$$v_r' = -u_r, \quad \hat{v}_r' = \hat{u}_r. \tag{B29}$$

При этом оператор η тоже является инвариантным относительно этого преобразования.

В соответствии с формулами (4) и (17) это преобразование эквивалентно следующему:

$$\psi' = C\bar{\psi}, \quad \bar{\psi}' = -C^{-1}\psi. \tag{B30}$$

Знак минус в последнем соотношении обеспечивает изменение знака на обратный в соотношении, аналогичном (A31) и (A32):

$$\psi_\alpha' (x) \bar{\psi}_\beta' (x') = + (C\bar{\psi} (x) \psi (x') C^{-1})_{\alpha\beta},$$
$$\bar{\psi}_\beta' (x') \psi_\alpha' (x) = + (C\psi (x') \bar{\psi} (x) C^{-1})_{\alpha\beta}; \tag{B31}$$

$$\{\psi_\alpha' (x), \ \bar{\psi}_\beta' (x')\} = + (C \{\bar{\psi} (x), \ \psi (x')\} C^{-1})_{\alpha\beta} = + (C^{-1} \{\psi (x'), \ \bar{\psi} (x)\} C)_{\beta\alpha},$$
$$[\psi_\alpha' (x), \ \bar{\psi}_\beta' (x')] = + (C [\bar{\psi} (x), \ \psi (x')] C^{-1})_{\alpha\beta} = -(C^{-1} [\psi (x'), \ \bar{\psi} (x)] C)_{\beta\alpha}. \tag{B32}$$

Сравнение с формулами (18) — (20) снова дает доказательство инвариантности соотношений (B24) и (B28) в силу перестановки ролей функций S и $S^{(1)}$ по сравнению с «нормальной» теорией.

Что касается определения тока, то здесь именно антикоммутатор отличается от первоначального выражения $j_\mu = ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ только c-числом. По-

этому это выражение можно заменить следующим:

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2}\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x)\}\gamma^\mu_{\beta\alpha}. \tag{B33}$$

Отсюда для полного заряда получаем

$$Q = \int -ij_4(x)\,d^3x = e\sum_{r,k}(\{\hat{u}_r u_r\} + \{\hat{v}_r, v_r\}) = e\sum(N_r^+ - N_r^-). \tag{B34}$$

Кроме того, зарядово-сопряженными для выражений $\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x'\}\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ и $\{\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x)\}\gamma^\mu_{\beta\alpha}$ являются соответственно выражения $-\{\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x)\}\gamma^\mu_{\beta\alpha}$ и $-\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}\gamma^\mu_{\beta\alpha}$, так что сумма первых двух обладает требуемым свойством изменять знак при зарядовом сопряжении. Поэтому мы введем определение

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x)\} = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{2}(\{\psi_\alpha(x+\xi), \bar{\psi}_\beta(x-\xi)\} + \{\psi_\alpha(x-\xi), \bar{\psi}_\beta(x-\xi)\}), \tag{B36}$$

чтобы обеспечить соотношения

$$j'_\mu(x) = -j_\mu(x) \tag{B35}$$

и

$$\langle j_\mu(x)\rangle_0 = 0. \tag{B37}$$

Совершенно так же, как «нормальная» теория, применяющая принцип запрета, рассмотренная «аномальная» теория бозонов со спином $^1/_2$, но с «отрицательными вероятностями» описывает рождение и аннигиляцию пар во внешнем электромагнитном поле, поскольку в нем сохраняется не число частиц, а заряд, который может иметь оба знака.

§ 3. Частицы со спином $^1/_2$ во внешнем электромагнитном поле

Теперь рассмотрим случай, когда имеется внешнее неквантованное электромагнитное поле с потенциалом $A_\mu(x)$, взаимодействующее с квантованным полем материальных частиц, причем энергия взаимодействия

$$H_{вз} = -j_\mu(x)A_\mu(x). \tag{43}$$

Включение электромагнитного поля ($A_\mu = 0$ при $t \to -\infty$) приводит к следующему изменению волновой функции Шредингера (в представлении взаимодействия):

$$\Psi(t) = U(t, -\infty)\Psi(-\infty). \tag{44}$$

Как показал Дайсон, $U(t, -\infty)$ можно написать в виде

$$U(t, -\infty) = P\left(\exp\left[i\int_{-\infty}^{t} j_\mu(x')\,A_\mu(x')\,d^4x'\right]\right) =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{i^n}{n!}\int_{-\infty}^{t} d^4x_1 \ldots \int_{-\infty}^{t} d^4x_n P(j_{\mu_1}(x_r)\ldots j_{\mu_n}(x_n))\,A_{\mu_1}(x_1)\ldots A_{\mu_n}(x_n), \tag{45}$$

где P — оператор, устанавливающий хронологическую последовательность множителей таким образом, что значения времени уменьшаются слева направо. Оператор, обратный U, мы получаем, изменяя знак i и заменяя хронологическую последовательность на обратную. Если энергия взаимодействия является эрмитовой, то оператор U будет унитарным; но если энергия взаимодействия является лишь «самосопряженной», то вместо унитарности мы будем иметь условие

$$U\hat{U} = 1, \tag{46}$$

где $\hat{U}$ — оператор, сопряженный U.

Нас будет особенно интересовать вероятность того, что вакуум сохранится при $t = \infty$, которая равна

$$U_0 = |\langle U(\infty, -\infty)\rangle_0|^2 = \left\langle P\left(\exp\left[i\int_{-\infty}^{+\infty} j_\mu(x') A_\mu(x')\, d^4x'\right]\right)\right\rangle_0 \times$$
$$\times \left\langle P_-\left(\exp\left[-i\int_{-\infty}^{+\infty} j_\mu(x') A_\mu(x')\, d^4x'\right]\right)\right\rangle_0, \tag{47}$$

причем P_- — оператор, устанавливающий обратную последовательность времени. Это выражение для вероятности справедливо также в аномальном случае, так как для вакуума знак в формуле (B41) положителен. В дальнейшем не вводится существенных ограничений до тех пор, пока потенциалы остаются произвольными функциями времени.

До второго порядка по e находим

$$\langle U(-\infty, \infty)\rangle_0' = 1 + i\int_{-\infty}^{+\infty} \langle j_\mu(x)\rangle_0 A_\mu(x)\, d^4x -$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x' A_\mu(x) A_\nu(x') \langle P(j_\mu(x), j_\nu(x'))\rangle_0.$$

Используя соотношения

$$\langle j_\mu(x)\rangle_0 = 0,$$
$$P\ (j_\mu(x), j_\nu(x')) = \frac{1}{2}\{j_\mu(x), j_\nu(x')\} + \frac{1}{2}\varepsilon(x-x')[j_\mu(x), j_\nu(x')],$$
$$P_-(j_\mu(x), j_\nu(x')) = \frac{1}{2}\{j_\mu(x), j_\nu(x')\} - \frac{1}{2}\varepsilon(x-x')[j_\mu(x), j_\nu(x')],$$

имеем

$$W_0 = |\langle U(-\infty, \infty)\rangle_0|^2 = 1 - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x' A_\mu(x) A_\nu(x') \langle\{j_\mu(x), j_\nu(x')\}\rangle_0. \tag{48}$$

Проверим теперь результат Фейнмана, что для аномального случая второй член имеет знак, противоположный знаку для нормального случая. Поскольку в последнем случае знак этот отрицательный, мы получаем, что *вероятность* реализации вакуума в аномальном случае *больше единицы.*

Но это именно то, что следует ожидать на основании общей теоремы (B41′). В рассматриваемом приближении в сумму в левой части дают вклад, кроме вакуума ψ, только члены, соответствующие состояниям, в которых рождается одна пара. В этих состояниях одно из чисел N^+ и одно из N^- равно 1, так что знак получается отрицательный. Хотя «вероятность» здесь все еще сохраняется, получается $W_0 > 1$ вследствие неунитарности матрицы U, или, другими словами, вследствие отрицательной вероятности некоторых состояний.

Действительно, имеем

$$\langle j_\mu (x) j_\nu (x')\rangle_0 = -e^2 \gamma^\mu_{\alpha\beta} \langle \psi_\beta (x) \bar{\psi}_\rho (x')\rangle_0 \gamma^\nu_{\rho\sigma} \langle \bar{\psi}_\alpha (x) \psi_\sigma (x')\rangle_0.$$

Следовательно, в нормальном состоянии в соответствии с (A28) получаем

$$\langle j_\mu (x) j_\nu (x')\rangle_0 = e^2 \operatorname{Tr} (\gamma^\mu S^+ (x - x') \gamma^\nu S^- (x' - x)). \tag{A48}$$

В аномальном случае в соответствии с (B28) также имеем

$$\langle j_\mu(x) j_\nu (x')\rangle_0 = -e^2 \operatorname{Tr} (\gamma^\mu S^+ (x - x') \gamma^\nu S^- (x' - x)). \tag{B48}$$

Мы получаем также для нормального случая

$$\begin{aligned}\langle \{j_\mu (x),\ j_\nu (x')\}\rangle_0 &= \\ &= e^2 \operatorname{Tr} (\gamma^\mu S^+ (x - x')\gamma^\nu S^- (x' - x) + \gamma^\nu S^+ (x' - x)\gamma^\mu S^- (x - x')) = \\ &= e^2 \operatorname{Tr} (\gamma^\mu S^+ (x - x')\gamma^\nu S^- (x' - x) + \gamma^\mu S^- (x - x')\gamma^\nu S^+ (x' - x)),\end{aligned}$$

или еще

$$\langle \{j_\mu (x),\ j_\nu (x')\}\rangle_0 = \frac{1}{2} e^2 \operatorname{Tr} (\gamma^\mu S^{(1)}(x - x')\, \gamma^\nu S^{(1)}(x' - x) + \gamma^\mu S(x - x')\gamma^\nu S(x' - x)). \tag{A49}$$

Для аномального случая имеем

$$\langle \{j_\mu(x),\ j_\nu (x)\}\rangle_0 = -\frac{1}{2} e^2 \operatorname{Tr} (\gamma^\mu S^{(1)}(x - x')\, \gamma^\nu S^{(1)}(x' - x) + \gamma^\mu S(x - x')\gamma^\nu S(x' - x)). \tag{B49}$$

Следы матриц легко вычислить, но для нашей цели — сравнить следствия рассмотренного здесь формализма с результатом Фейнмана — достаточно подтвердить, что второй член в W_0 имеет противоположные знаки для аномального и нормального случаев.

§ 4. Частицы со спином 0 (скалярные поля)

Рассмотрим скалярное поле $\varphi (x)$ и сопряженное ему поле $\hat{\varphi} (x)$, каждое из которых в отсутствие взаимодействия удовлетворяет волновому уравнению второго порядка [14]

$$(\Box - m^2)\, \varphi (x) = 0, \quad (\Box - m^2)\, \hat{\varphi} (x) = 0. \tag{50}$$

[14] Мы обозначаем оператор Даламбера $\frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial}{\partial x_a}$ через $\Box$, а не через $\Box^2$, как Швингер.

Связь между $\hat{\varphi}$ и эрмитово-сопряженным φ полем φ^* мы оставляем открытой.

Напишем разложение $\varphi(x)$ по плоским волнам в виде:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{u(k)\, e^{i(k,x)} + \hat{v}(k)\, e^{-i(k,x)}\}, \tag{51}$$

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{\hat{u}(k)\, e^{-i(k,x)} + v(k)\, e^{+i(k,x)}\}, \tag{52}$$

где опять $k_4 = i\omega = i\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Мы имеем:

$$\frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2\omega} e^{i(k,x-x')} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{i(k,x-x')} = +i\Delta^+(x-x') = \\ = +\frac{i}{2}(\Delta - i\Delta^{(1)})(x-x'), \tag{53}$$

$$\frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2\omega} e^{-i(k,x-x')} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-i(k,x-x')} = -i\Delta^-(x-x') = \\ = -\frac{i}{2}(\Delta + i\Delta^{(1)})(x-x'). \tag{54}$$

Отметим также известные соотношения:

$$\begin{gathered} \Delta(-x) = -\Delta(x), \qquad \Delta^{(1)}(-x) = \Delta^{(1)}(x), \\ -\Delta^+(-x) = \Delta^-(x) = (\Delta^+(x))^*, \qquad -\Delta^-(-x) = \Delta^+(x) = (\Delta^-(x))^*. \end{gathered} \tag{55}$$

При этом $\Delta(x)$ и $\Delta^{(1)}(x)$ — вещественные функции. Выражение для энергии здесь имеет вид

$$E = \int d^3x \left(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}} + m^2\hat{\varphi}\varphi\right). \tag{56}$$

Отсюда с помощью формул (41), (52) получаем

$$E = \sum_k \omega(\hat{u}u + v\hat{v}). \tag{57}$$

Канонические правила коммутации

$$[E, \varphi] = -i\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad [E, \hat{\varphi}] = -i\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial t} \tag{58}$$

по аналогии с (14а), (14б) эквивалентны соотношениям:

$$[E, u] = -\omega u, \qquad [E, v] = -\omega v, \tag{59а}$$

$$[E, \hat{u}] = +\omega\hat{u}, \qquad [E, \hat{v}] = +\omega\hat{v}. \tag{59б}$$

Эти соотношения выполняются в согласии с тем, что различные собствен-

ные колебания независимы, если

$$[\hat{u}_k u_k, u_{k'}] = -u_k \delta_{k'k}, \quad [\hat{u}_k u_k, \hat{u}_{k'}] = +\hat{u}_k \delta_{k'k}, \tag{60а}$$

$$[v_k \hat{v}_k, v_{k'}] = -v_k \delta_{k'k}, \quad [v_k \hat{v}_k, \hat{v}_{k'}] = +\hat{v}_k \delta_{kk'}, \tag{60б}$$

$$[\hat{u}_k u_k, v_{k'}] = [\hat{u}_k u_k, \hat{v}_{k'}] = [\hat{v}_k v_k, u_{k'}] = [\hat{v}_k v_k, \hat{u}_{k'}] = 0.$$

А) *Нормальный случай* (*статистика Бозе*). Положим

$$\hat{u} = u^*, \quad \hat{v} = v^*. \tag{A61}$$

Тогда

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi^*(x). \tag{A62}$$

Кроме того, в согласии с соотношениями (60а), (60б) имеем

$$[u_k, \overset{*}{u}_{k'}] = [v_k, \overset{*}{v}_{k'}] = \delta_{kk'}. \tag{A63}$$

Следовательно,

$$[\varphi(x), \varphi^*(x')] = [\varphi^*(x), \varphi(x')] = i\Delta(x - x'). \tag{A64}$$

Правила коммутации (A63) имеют следствием:

$$N_k^+ = \overset{*}{u}_k u_k, \quad N_k^+ + 1 = u_k \overset{*}{u}_k,$$
$$N_k^- = \overset{*}{v}_k v_k, \quad N_k^- + 1 = v_k \overset{*}{v}_k. \tag{A65}$$

Здесь собственные значения N равны 0, 1, 2, . . ., и энергия (57) принимает вид

$$E = \Sigma\omega(N_k^+ + N_k^- + 1). \tag{A66}$$

Таким образом, вакуум $N^+ = N^- = 0$ имеет наименьшую энергию. Для этого состояния получаем:

$$\langle \overset{*}{u}_k u_k \rangle_0 = 0, \quad \langle u_k \overset{*}{u}_k \rangle_0 = 1,$$
$$\langle \overset{*}{v}_k v_k \rangle_0 = 0, \quad \langle v_k \overset{*}{v}_k \rangle_0 = 1, \tag{A67}$$

$$\langle \varphi(x)\varphi^*(x') \rangle_0 = \langle \varphi^*(x)\varphi(x') \rangle_0 = +i\Delta^+(x - x'),$$
$$\langle \varphi^*(x')\varphi(x) \rangle_0 = \langle \varphi(x')\varphi^*(x) \rangle_0 = -i\Delta^-(x - x'), \tag{A68}$$

$$\langle \{\varphi(x), \varphi^*(x')\} \rangle_0 = \Delta^{(1)}(x - x'). \tag{A69}$$

Коммутатор (A64) и средние вакуумные значения (A67) — (A69) инвариантны относительно зарядового сопряжения:

$$u' = v, \quad u'^* = v^*,$$
$$v' = u, \quad v'^* = u^*. \tag{A70}$$

Это преобразование правильно дает $N^{+\prime} = N^-$, $N^{-\prime} = N^+$. В соответствии с формулами (51), (52) оно просто эквивалентно следующему преобразованию:

$$\varphi' = \varphi^*, \quad \varphi'^* = \varphi. \tag{A71}$$

Для тока мы составим симметризованное выражение

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2}\left(\left\{\frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial x_\mu}, \varphi(x)\right\} - \left\{\varphi^*(x), \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}\right\}\right), \tag{A72}$$

которое приводит к правильному значению полного заряда

$$Q = \int(-i)\, j_4(x)\, d^3x = \frac{l}{2}\sum(\{u_k, u_k^*\} - \{v_k, v_k^*\}) = e\sum(N_k^+ - N_k^-). \tag{A73}$$

Чтобы обеспечить выполнение соотношения

$$j'_\mu(x) = -j_\mu(x), \tag{A74}$$

мы должны определить здесь (по аналогии с соответствующим коммутатором для спинорных полей) антикоммутатор:

$$\left\{\frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial x_\mu}, \varphi(x)\right\} = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{2}\left(\left\{\frac{\partial\varphi^*(x+\xi)}{\partial x_\mu}, \varphi(x-\xi)\right\} + \left\{\frac{\partial\varphi^*(x-\xi)}{\partial x_\mu}, \varphi(x+\xi)\right\}\right),$$

$$\left\{\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}, \varphi^*(x)\right\} = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{2}\left(\left\{\frac{\partial\varphi(x+\xi)}{\partial x_\mu}, \varphi^*(x-\xi)\right\} + \left\{\frac{\partial\varphi(x-\xi)}{\partial x_\mu}, \varphi^*(x+\xi)\right\}\right). \tag{A75}$$

Это определение также гарантирует справедливость соотношения

$$\langle j_\mu(x)\rangle_0 = 0. \tag{A76}$$

Мы приведем также входящие в формулу (48) средние по вакууму значения выражений, билинейных относительно токов, для этого случая:

$$\langle j_\mu(x)\, j_\nu(x')\rangle_0 = e^2\left(-\left\langle\frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial x_\mu}\varphi(x')\right\rangle_0\left\langle\varphi(x)\frac{\partial\varphi^*(x')}{\partial x'_\nu}\right\rangle_0 + \right.$$
$$+\left\langle\frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi(x')}{\partial x'_\nu}\right\rangle_0\langle\varphi(x)\varphi^*(x')\rangle_0 - \left\langle\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}\varphi^*(x')\right\rangle_0\left\langle\varphi^*(x)\frac{\partial\varphi(x')}{\partial x'_\nu}\right\rangle_0 +$$
$$\left. +\left\langle\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi^*(x')}{\partial x'_\nu}\right\rangle_0\langle\varphi^*(x)\varphi(x')\rangle_0\right). \tag{A77}$$

С помощью (A69) это дает

$$\langle j_\mu(x)\, j_\nu(x')\rangle_0 = +2e^2\left(-\frac{\partial\Delta^+(x-x')}{\partial x_\mu}\frac{\partial\Delta^+(x-x')}{\partial x_\nu} + \frac{\partial^2\Delta^+(x-x')}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\Delta^+(x-x')\right) \tag{A78}$$

и также

$$\langle\{j_\mu(x), j_\nu(x')\}\rangle_0 = e^2\left(-\frac{\partial\Delta(x-x')}{\partial x_\mu}\frac{\partial\Delta(x-x')}{\partial x_\nu} + \right.$$
$$+\frac{\partial\Delta^{(1)}(x-x')}{\partial x_\mu}\frac{\partial\Delta^{(1)}(x-x')}{\partial x_\nu} + \frac{\partial^2\Delta(x-x')}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\Delta(x-x') -$$
$$\left. -\frac{\partial^2\Delta^{(1)}(x-x')}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\Delta^{(1)}(x-x')\right). \tag{A79}$$

В) *Аномальный случай* (*принцип запрета*). Антикоммутаторы для величин u, $\hat{u}$ и v, $\hat{v}$ можно фиксировать в согласии с соотношениями (60а), (60б), только полагая

$$\{u_k, \hat{u}_{k'}\} = \delta_{kk'}, \qquad \{v_k, \hat{v}_{k'}\} = -\delta_{kk'}, \tag{B63}$$

причем все остальные антикоммутаторы для этих величин должны быть равны нулю [15]. Если мы хотим сохранить отождествление $\hat{u}$, $\hat{v}$ с эрмитово-сопряженными величинами u^*, v^*, то следует отказаться от выражения для энергии (56), чтобы удовлетворить каноническим правилам коммутации (58). Тогда мы получим теорию, в которой в коммутаторы для полевых величин входит функция $\Delta^{(1)}$ вместо Δ. Эту возможность я рассматривал ранее [16], но отверг ее из-за того, что физические наблюдаемые в ней должны коммутировать в точках, разделенных пространственно-подобными интервалами. Кроме того, на этом пути оказывается невозможным получить правильные уравнения поля с внешним электромагнитным полем, согласующиеся с каноническими правилами коммутации.

Поэтому мы рассмотрим здесь другую возможность, а именно сохраним выражение для энергии (52), но изменим связь между сопряженными и эрмитово-сопряженными величинами аналогично тому, как мы делали для частиц со спином $^1/_2$ и статистикой Бозе:

$$\hat{u}(k) = u^*(k), \qquad \hat{v}(k) = -v^*(k). \tag{B21}$$

Тогда из (B63) следует, что

$$\begin{aligned} N^+ &= \hat{u}u, & 1 - N^+ &= u\hat{u}, \\ N^- &= -\hat{v}v, & 1 - N^- &= -v\hat{v}. \end{aligned} \tag{B64}$$

Здесь собственные значения N равны 0 и 1. Выражения (B41), (B41′) для суммы всех (частично отрицательных) вероятностей и (B42) для среднего значения оператора $F(\ldots N^+\ldots; \ldots N^-\ldots)$ остаются справедливыми с той разницей, что числа N при суммировании пробегают только значения 0 и 1. Сначала мы получаем

$$\{\varphi(x), \hat{\varphi}(x')\} = \{\hat{\varphi}(x), \varphi(x')\} = i\Delta(x - x'). \tag{B65}$$

Выражение для энергии в нормальном случае в соответствии с (57) и (B64) принимает вид

$$E = \sum_k \omega\,(N_k^+ + N_k^- - 1). \tag{B66}$$

Нулевая энергия имеет здесь обратный знак, но в состоянии с наименьшей энергией $N^+ = N^- = 0$, и это состояние, таким образом, можно определить как вакуум.

---

[15] Ср. I, с. 211.

[16] *W. Pauli.* Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 137. (Русск. пер. см. с. 244.— *Ред.*).

Для усредненных по вакууму средних значений билинейных выражений из переменных поля мы теперь получаем

$$\langle \varphi(x)\hat{\varphi}(x')\rangle_0 = -\langle \hat{\varphi}(x)\varphi(x')\rangle_0 = i\Delta^+(x-x'),$$
$$\langle \hat{\varphi}(x')\varphi(x)\rangle_0 = -\langle \varphi(x')\hat{\varphi}(x)\rangle_0 = i\Delta^-(x-x'), \qquad \text{(B69a)}$$

а также

$$\langle [\varphi(x),\ \hat{\varphi}(x')]\rangle_0 = \Delta^{(1)}(x-x'). \qquad \text{(B69б)}$$

Аналогично (B29) зарядовое сопряжение

$$u'_k = v_k, \qquad \hat{u}'_k = -\hat{v}_k,$$
$$v'_k = -u_k, \qquad \hat{v}_k = \hat{u}_k \qquad \text{(B70)}$$

оставляет антикоммутаторы и средние по вакууму, а также оператор η инвариантными и потому является эквивалентным преобразованию

$$\varphi'(x) = \hat{\varphi}(x), \qquad \hat{\varphi}'(x) = -\varphi(x). \qquad \text{(B71)}$$

Выражение для токов

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2}\left(\left[\frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\mu},\ \varphi(x)\right] - \left[\hat{\varphi}(x),\ \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\mu}\right]\right) \qquad \text{(B72)}$$

удовлетворяет условиям

$$j'_\mu(x) = -j_\mu(x), \qquad \text{(B74)}$$

$$\langle j_\mu(x)\rangle_0 = 0, \qquad \text{(B76)}$$

если скобки определяются с условием симметризации предела аналогично (A75), и величина заряда становится тогда равной

$$Q = \int (-i)\, j_4 d^3x = \frac{e}{2}\sum_k ([\hat{u}, u] - [v, \hat{v}]) = e\sum_k (N^+ - N^-). \qquad \text{(B73)}$$

Для средних значений выражений, билинейных по токам, мы получаем формулу (A77), но с заменой φ^* на $\hat{\varphi}$. Однако в соответствии с формулами (B69a) и (A69) в каждом члене один из множителей (а именно тот, в котором $\hat{\varphi}$ находится впереди φ) изменяет свой знак, так что для спина $^1/_2$ мы снова имеем

$$(\langle j_\mu(x')j_\nu(x)\rangle_0)_{\text{аном}} = -(\langle j_\mu(x)j_\nu(x')\rangle_0)_{\text{норм}}. \qquad \text{(B78, 79)}$$

Вероятность сохранения вакуума во внешнем электромагнитном поле здесь можно рассмотреть аналогично тому, как это сделано в § 3. В аномальном случае для этой вероятности мы снова получаем значение больше единицы тем же способом, как для частиц со спином $^1/_2$.

Я обязан д-ру Р. Йосту за интересные дискуссии предмета этой статьи во время моего посещения Института высших исследований в Принстоне.

Получена 12 июня 1950 г.

Цюрих,
Высшая техническая школа

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ. ПЕРЕНОРМИРОВКА *

1. Идея перенормировки зарядов и масс и вообще констант, входящих в гамильтониан, исходит из надежды, что после перенормировки расходящимися или неоднозначными будут только выражения таких ненаблюдаемых величин, как собственная масса и собственный заряд, в то время как наблюдаемые величины (уровни энергии, сечения рассеяния) будут задаваться вполне определенными выражениями (с надлежащим образом определенными константами, входящими в эти выражения). Однако эта надежда оправдалась лишь для частного вида взаимодействий, встречающихся в квантовой электродинамике — в теориях, весьма близких к теории скалярных или векторных мезонов с векторной связью. При всех остальных типах взаимодействия так же, как и до перенормировки, сохраняется изначальная, или «затравочная», расходимость. Тем не менее в некоторых теориях расходимости оказываются слабее, чем в других. Так обстоит дело 1) в электродинамике скалярных заряженных мезонов и 2) в теории псевдоскалярных или скалярных (заряженных или нейтральных) мезонов, скалярно связанных с нуклонами ($H_{\text{вз}} = \Phi\Phi^*\overline{\Psi}\Psi$ или $H_{\text{вз}} = \Phi\Phi^*\overline{\Psi}\gamma^5\Psi$). В этих двух случаях расходимость возникает лишь при вычислении рассеяния мезона на мезоне. Можно попытаться устранить эту расходимость, вводя в гамильтониан дополнительный член $\delta\lambda\Phi^{*2}\Phi^2$ четвертого порядка. Конечная часть $\delta\lambda$ априори произвольна, но ее можно найти из приближений более высокого порядка. До сих пор неизвестно, обеспечивает ли введение такого члена сходимость во всех порядках. В настоящее время эта проблема рассматривается Ф. Рорлихом. Если сходимость действительно обеспечена, то возникает интересная проблема сильной связи (большая константа связи). Математическая сложность этой проблемы обусловлена необходимостью одновременного рассмотрения проблемы перенормировки и проблемы большой константы связи, в то время как с точки зрения физики представляет интерес ее возможное приложение к теории (кратного?) рождения мезонов.

Все остальные теории сопровождаются еще более сильными расходимостями (табл. 1). В частности, это относится к электродинамике векторного мезона. В этом случае, как показали Паркер и независимо от него Намбу и Киношита [1], помимо члена в поляризации вакуума, логарифмическими расходимостями обладают радиационные поправки к магнитному

---

* *État actuel de la théorie quantique des champs. La renormalisation.*— Particules fondamentales et noyaux. Paris, 1950. Colloq. Intern. Centre Nat. Rech. Sci., Paris, 1953, 38, 67—77.

[1] *Y. Nambu, T. Kinoshita.* Progr. Theor. Phys., 1950, 5, 307.

Таблица 1

Процессы, для которых мезонные теории расходятся

Мезонная теория	Связь	Заряд	Процесс
Скалярная	Скалярная	Нейтральная частица Заряженная частица	Мезон-мезонное рассеяние
	Векторная	Нейтральная частица	Взаимодействие между нуклонами равно нулю во всех порядках
		Заряженная частица	4-й порядок + нейтрон—нейтрон
Псевдоскалярная	Псевдоскалярная	Нейтральная частица	Мезон-мезонное рассеяние
		Заряженная частица	4-й порядок нейтрон — протон
	Псевдовекторная	Нейтральная частица Заряженная частица	4-й порядок нейтрон — протон, нейтрон — электрон
Векторная	Векторная	Нейтральная частица	Расходимости нет
		Заряженная частица	4-й порядок нейтрон — протон
	Тензорная	Нейтральная частица	4-й порядок нейтрон — протон
		Заряженная частица	Магнитный момент
Псевдовекторная	Векторная	Нейтральная частица Заряженная частица	4-й порядок нейтрон — протон
	Псевдотензорная	Нейтральная частица Заряженная частица	4-й порядок нейтрон — протон

моменту и к квадрупольному электрическому моменту. Порядок расходимостей, присущий различным теориям (взаимодействиям), по-видимому, тесно связан с давно указанным Гейзенбергом различием между взаимодействиями первого и второго рода.

2. Перейдем теперь к обсуждению некоторых характерных особенностей математического аппарата квантовой теории полей. При этом по мере возможности мы будем использовать обозначения Швингера (табл. 2). Существенные аспекты теории всегда заключаются а) в перестановочных соотношениях невозмущенных полей и б) в вакуумных средних значениях величин, билинейных относительно компонент поля. Как показали Бор и Розенфельд, эти величины в принципе можно считать измеримыми, *если усреднять их по конечным областям пространства-времени.*

Функции, снабженные индексами I и C, отличны от нуля даже при условии, что их аргументом служит пространственно-подобный вектор. Наоборот, функции без индексов в этом случае равны нулю. Первые функ-

Таблица 2

Функции D и S

$$[\Phi_\mu(x), \Phi_\nu(x')] = i\delta_{\mu\nu}D(x-x'), \qquad \Box D = 0, \qquad D(-x) = -D(x),$$
$$\langle[\Phi_\mu(x), \Phi_\nu(x')]\rangle_{\text{вак}} = \delta_{\mu\nu}D^{(1)}(x-x'), \qquad \Box D^{(1)} = 0$$
$$D^{(1)}(-x) = D^{(1)}(x)$$
$$\langle P[\Phi_\mu(x), \Phi_\nu(x')]\rangle_{\text{вак}} = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}D_c(x-x') = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}[D^{(1)}(x-x') - 2i\bar{D}(x-x')]$$
$$\Box\bar{D}(x) = -\delta(x), \qquad \bar{D}(x) = \frac{1}{2}(D^{\text{adv}} + D^{\text{ret}})$$
$$[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')] = iS_{\alpha\beta}(x-x'), \left(\gamma^\sigma\frac{\partial}{\partial x_\sigma} + m\right)S(x) = 0$$
$$\langle[\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')]\rangle_{\text{вак}} = -S^{(1)}_{\alpha\beta}(x-x')$$
$$\left(\gamma^\sigma\frac{\partial}{\partial x_\sigma} + m\right)S^{(1)}(x) = 0$$
$$\langle P[\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')]\varepsilon(x-x')\rangle_{\text{вак}} = -\frac{1}{2}S_{c\alpha\beta}(x-x') =$$
$$= -\frac{1}{2}[S^{(1)}_{\alpha\beta}(x-x') - 2iS_{\alpha\beta}(x-x')]$$
$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x} + \ldots\right)\bar{S}(x) = -S(x), \qquad \bar{S}(x) = \frac{1}{2}(S^{\text{adv}} + S^{\text{ret}})$$

ции относятся всегда к состояниям, характеризуемым заданием числа имеющихся частиц (например, к вакууму). Такое описание более точно, чем описание, заключающееся в однозначном задании электрических зарядов и токов.

Швингер и Томонага в своих работах используют так называемое представление взаимодействия. Я считаю весьма интересным с методологической точки зрения тот факт, что Янгу удалось найти все имеющие физический смысл величины (такие, как S-матрица) в гейзенберговском представлении (вектор состояния не зависит от времени).

Последнее представление обладает тем преимуществом, что позволяет избежать использования кривых поверхностей и нормалей к этим поверхностям. Релятивистская инвариантность различных величин при таком подходе проявляется более непосредственно.

Чтобы найти S-матрицу в представлении взаимодействия, Янг проинтегрировал уравнения квантовой электродинамики

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}A_\mu = -\frac{ie}{2}\{\bar{\psi}\gamma_\mu\psi + \text{зарядово-сопряженные члены}\} = -ej_\mu,$$

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi = ie\gamma_\mu A_\mu\psi,$$

воспользовавшись сначала запаздывающими потенциалами.

В результате он нашел:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{in}(x) + ie\int D^{ret}(x-x')\,d''x' j_\mu(x'),$$

$$\psi(x) = \psi^{in}(x) - ie\int S^{ret}(x-x')\,d''x'\gamma_\mu A_\mu(x')\,\psi(x'),$$

где

$$D^{ret} = \bar{D} - \frac{1}{2}D, \qquad S^{ret} = \bar{S} = \frac{1}{2}S$$

и A_μ, ψ совпадают с A_μ^{in}, ψ^{in} при $t = -\infty$.

Но с помощью опережающих потенциалов точно так же можно записать

$$A_\mu(x) = A_\mu^{sort}(x) + ie\int D^{adv}(x-x')\,d''x' j_\mu(x'),$$

$$\psi(x) = \psi^{sort}(x) + ie\int S^{adv}(x-x')\,d''x'\gamma_\mu A_\mu(x')\,\psi(x'),$$

где

$$D^{adv} = \bar{D} + \frac{1}{2}D, \qquad S^{adv} = \bar{S} + \frac{1}{2}S$$

и A_μ, ψ_μ совпадают с A_μ^{sort}, ψ^{sort} при $t = +\infty$.

Следовательно, A^{in} и ψ^{in} удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и A^{sort} и ψ^{sort}. Поэтому существует унитарное преобразование, такое, что

$$A_\mu^{sort} = S^{-1}A_\mu^{in}S, \qquad \psi^{sort} = S^{-1}\psi^{in}S.$$

Матрица S есть в точности S-матрица Гейзенберга.

Разлагая потенциал в ряд по степеням заряда e, можно получать для S явные выражения; но простой формализм Дайсона представляется нам более удобным. С другой стороны, формализм Янга нетрудно распространить и на случаи, отличные от теории заряженных скалярных мезонов. При этом величины, зависящие от конкретного выбора поверхностей, очевидно, не могут входить в окончательное выражение для S-матрицы, поскольку последняя с самого начала определена независимо от этих поверхностей.

3. До сих пор мы рассматривали общий формализм квантования полей и релятивистскую теорию возмущений. Как производится перенормировка зарядов и масс, видно из формул, приведенных в табл. 3 и 4, на примере собственной массы и поляризации вакуума в теории электрона. В этих двух случаях типичные неоднозначности встречаются уже в приближении e^2. Для получения правильных и однозначных результатов были предложены различные методы. Вилларс и я обобщили и развили выдвигавшиеся ранее предложения о надлежащем использовании вспомогательных масс. Швингер, наоборот, руководствовался непосредственно законами сохранения 4-векторов энергии-импульса и заряда-тока. Последний закон сохранения выражает градиентную инвариантность. Я хотел бы обратить

Таблица 3

Собственная масса

$$\delta m \overline{\psi}(x)\psi(x) = -6\frac{e^2}{8}\int d^4(x')\,[\psi(x)\gamma^\sigma S_c(x-x')\gamma^\sigma\psi(x') + \overline{\psi}(x)\gamma^\sigma S_c(x'-x)\gamma^\sigma\psi(x)]\,D_c(x-x') = -\frac{e^2}{2}\int d^4x'\,\{\overline{\psi}(x)\gamma^\sigma[\overline{S(x-x')D(x'-x)} + S(x-x')D^{(1)}(x'-x)]\times\psi(x) + \text{компл.-сопр.}\}.$$

Регуляризация:

$$D_c \to \bar{D}_c(x) = \sum c_i D_c(x_i m_i),$$

$$\sum c_i = 0, \quad c_0 = 1, \quad m_0 = 1, \quad m_i \to \infty, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$[\Box - m^2]\,D_c = 2i\delta(x).$$

особое внимание на то, что результаты Швингера согласуются с результатами, полученными Вилларсом и мной. Кроме того, следует упомянуть проблему собственного натяжения электрона как интересный пример приложения подобных методов. Недавно эта проблема была рассмотрена Коном и Боровитцем[2] и Вилларсом. Условия регуляризации $\Sigma c_i = 0$, $\Sigma c_i m_i^2 = 0$ (см. табл. 3 и 4) достаточны для того, чтобы собственная энергия фотона обратилась в нуль, как того требует градуировочная инвариантность теории. Затем этот метод можно рассматривать как предельный случай перенормировки ненулевых масс мезонов в более общих теориях мезонов с ненулевой массой покоя, находящихся во взаимодействии с тяжелыми частицами со спином $^1/_2$. Цель такого метода регуляризации, оперирующего со вспомогательными массами, состоит в том, чтобы заменить все расходящиеся интегралы конечными, но зависящими от способа регуляризации. Проверка теории заключается в выяснении вопроса, в какой мере все физические величины можно считать независящими от конкретных свойств регуляризации.

Говоря о методе, использованном Швингером для вычисления интегралов, я уже упоминал, что введение вспомогательных масс громоздко, но необходимо. В своей работе Вилларс и я уже обращали внимание на то, что при использовании вспомогательных масс их можно в явном виде ввести в гамильтониан и сопоставить реальным частицам с заданным спином. В проблеме компенсации собственной энергии электрона эту «реалистическую» точку зрения выдвинул и разработал в Японии Саката со своими учениками (c-мезон) и Пайс (f-поле). Чтобы компенсировать собственную энергию электрона или, по крайней мере, сделать ее конечной, эти авторы использовали нейтральную вспомогательную частицу

[2] *S. Borowitz, W. Kohn, J. Schwinger.* Phys. Rev., 1950, **78**, 345.

Таблица 4

Поляризация вакуума

$$\delta j_\mu(x) = \int d^4x' K_{\mu\nu}(x - x') A_\nu(x'),$$

$$K_{\mu\nu}(x - x') = i\frac{e^2}{4}\overline{S}p\,[\gamma^\mu \overline{S}_c(x - x')\gamma^\nu \overline{S}_c(x' - x)] = +e^2\overline{S}p\,[\gamma^\mu \overline{S}(x - x') \times$$
$$\times \gamma^\nu \overline{S}^{(1)}(x' - x)], \quad \text{если} \int d^4x A_\nu(x)\gamma_\nu(x) = 0.$$

Условие калибровочной инвариантности

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} K_{\mu\nu} = 0.$$

Регуляризация:

а) $K_{\mu\nu}(x) \to \sum c_i K_{\mu\nu}(x, M_i)$,

$$\sum c_i = 0, \qquad \sum c_i M_i^2 = 0, \qquad c_1 = 0, \qquad M_0 = m, \qquad M_i \to \infty, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Собственный заряд

$$\frac{\delta e}{e} = \frac{\alpha}{3\pi}\sum c_i \ln\frac{M_i}{m}.$$

б) точка зрения Швингера:

$$K_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x e^{ipx} K_{\mu\nu}(p),$$

$$\widetilde{K}_{\mu\nu}(p) = K_{\mu\nu}(p) - \left(\frac{1}{p^2} p_\rho K_{\sigma\rho} p_\rho\right)\delta_{\mu\nu}, \qquad p_\mu \widetilde{K}_{\mu\nu}(p) = 0,$$

$$\widetilde{K}_{\mu\nu} = (p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu}p^2) F(p^2), \qquad F(p^2) = a_0 + a_1 p^2 + \ldots$$

в) Реалистическая точка зрения:

$$2N_{1/2} = N_0, \qquad 2\sum (m^i_{1/2})^2 = \sum (m^i_0)^2.$$

с нулевым спином. В случае собственной энергии фотона, как показали Минесава, Райский и Йост, компенсации можно добиться, введя пары заряженных частиц со спином $1/2$ или 0, удовлетворяющих условиям «в» табл. 4. Интересно, что те же условия обеспечивают и компенсацию энергии флуктуации вакуума, соответствующую этим полям. Эта компенсация оказывает неоценимую услугу при вычислении собственной энергии частиц в приближениях, начиная с третьего порядка. Доводом, свидетельствующим против реалистической точки зрения, служит проблема собственного заряда. В этом случае, как показывает принадлежащий Швингеру общий результат, компенсации нельзя добиться в любом приближении, какие бы частицы с положительной энергией мы, руководствуясь реалистической теорией, ни вводили. Действительно, Швингер доказал, что отношение

физического и математического зарядов всегда заключено между 0 и 1 (отношение равно 0 в случае расходящейся теории).

Следовательно, попытки добиться компенсации собственного заряда обречены на неудачу; однако можно поставить вопрос о том, какой должна быть структура теории, содержащей лишь физический заряд. В этой связи следует заметить, что перенормируемые, или «физические», переменные поля $F_{\mu\nu}^{(\eta)}$ отличаются от «математических» переменных поля $F_{\mu\nu}$ на множитель e/e_0. Последние получают при обращении к каноническому, или гамильтонову, формализму квантовой теории полей. Для них справедливы обычные перестановочные соотношения, в которые входят значения переменных поля, взятых во вполне определенные моменты времени. В начале доклада я упомянул о том, что физический смысл имеют лишь значения величин, усредненных по конечной области пространства-времени. Особенно отчетливо это было показано Бором и Розенфельдом, проанализировавшими процесс измерения полей и зарядов. Следовательно, достаточно, чтобы в представлении Гейзенберга вакуумные средние коммутаторов перенормированных компонент поля $F_{(\eta)}^{\mu\nu}$ были конечны, если последние усреднить по конечным областям пространства-времени. Для компонент математических полей $F_{\mu\nu}$ это не так. Приведенные результаты принадлежат Йосту.

У меня сложилось впечатление, что мы уже исчерпали возможные приложения перенормировки зарядов и масс. Новый прогресс может быть достигнут лишь с помощью совершенно новых идей, которые позволят теоретически определить массы частиц и, быть может, значение постоянной тонкой структуры. Ведь нижний предел протяженности пространственно-временны́х областей, по которым брались упоминавшиеся выше средние значения, может быть определен лишь в рамках общей теории масс элементарных частиц, лежащей за пределами нашей дискуссии.

ЗАМЕЧАНИЯ К ПРОБЛЕМЕ СКРЫТЫХ ПАРАМЕТРОВ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И К ТЕОРИИ ВОЛНЫ-ПИЛОТА *

Попытки придать волновой механике с помощью скрытых параметров детерминистский вид можно разделить на два типа. Во-первых, скрытые параметры могут никак (ни прямо, ни косвенно) не сказываться на наблюдаемых явлениях. В этом случае искусственная асимметрия, вводимая при рассмотрении двух переменных, образующих канонически-сопряженную пару, указывает на то, что эта разновидность теории есть не более чем надуманная метафизика. Во-вторых, существующую теорию можно обобщить так, чтобы новые параметры могли приводить к эмпирически наблюдаемым эффектам. В этом случае следствия из теории оказываются в противоречии с общим характером нашего опыта, в частности с термодинамическими свойствами систем, состоящих из большого числа тождественных частиц. Теории подобного типа также не имеют физического смысла.

1. В серии работ, опубликованных в 1926—1927 гг., Л. де Бройль [1] рассмотрел интерпретацию квантовой механики, в которой реальностью считается не только волновая функция ψ, удовлетворяющая уравнению Шредингера, но и частицы. «Состояние» замкнутой системы, состоящей из n частиц, в каждый момент времени задается частично волновой функцией ψ в пространстве $f = 3n$ измерений, а частично координатами $z_1, \ldots, z_f$ «реальных» положений частиц. Таким образом, физическими величинами, определяющими состояние, служат

$$(q_1, \ldots, q_f;\ t) \quad \text{и} \quad z_1(t), \ldots, z_f(t). \tag{1}$$

Связь между этими двумя различными сторонами реальности устанавливается следующими двумя гипотезами:

А. Волновая функция ψ удовлетворяет обычному уравнению Шредингера

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + H\psi = 0, \tag{2a}$$

где H — гамильтониан, действующий на $q_1, \ldots, q_f$.

Б. Траекториями частиц служат линии тока поля ψ; скорость частиц в каждой точке задается отношением квантовомеханических выражений

* *Remarques sur le problème des paramètres cachés dans la méchanique quantique et sur la théorie de l'onde pilote.*— In: Louis de Broglie. Physicien et Penseur. Paris, 1953, p. 33—42.

[1] C. r. Acad. sci. Paris, 1926, 183, 447; 1927, 184, 273; 185, 380; Rapport au V^e Congrès de Physique Solvay, Gauthier-Villars, 1930, p. 115; Introduction à l'etude de la mécanique ondulatoire. Paris, Hermann, 1930.

для плотности тока и плотности заряда. В полярных координатах с вещественными R и Φ и $R \geqslant 0$

$$\psi = Re^{i\Phi},$$

откуда ($k = 1, \ldots, f$; m_k — масса)

$$\frac{dz_k}{dt} = + \frac{\hbar}{m_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_k}\right)_{q=z}, \qquad (2б)$$

причем в правой части вместо q_i подставлены z_i.

Кроме того, де Бройль показал, что при сделанных предположениях на частицы действует сила, не встречавшаяся в классической механике и обусловленная наличием дополнительной потенциальной энергии

$$U = -\sum_k \frac{\hbar^2}{2m_k}\left(\frac{\Delta_k R}{R}\right)_{q=z} \qquad (3)$$

— «квантовым потенциалом». Это обстоятельство подчеркивает нестатистический характер функции ψ и становится несколько менее странным, если учесть, что ψ рассматривается в многомерном пространстве.

Величина R, вообще говоря, зависит от всех координат положения системы. Лишь в том случае, когда ψ разлагается в произведение, U переходит в сумму членов, каждый из которых зависит от координат лишь одной частицы. Следовательно, всякая статистическая корреляция систем, понимаемая в смысле обычной волновой механики, в рассматриваемом случае предстает как некое «реальное» неклассическое взаимодействие этих систем. Поскольку сингулярные точки квантового потенциала располагаются в нулях функции ψ, квантовая сила испытывает значительные флуктуации всякий раз, когда рассматриваемая частица приближается к одной из сингулярных точек.

Мы ограничимся рассмотрением нерелятивистской теории. Понятие «линии тока» определено лишь в этой теории, ибо оно теряет смысл для фотонов и в случае рождения или аннигиляции пар.

Я имел удовольствие обсуждать эту теорию с Л. де Бройлем на Сольвеевском конгрессе 1927 г. Несколько позднее, по причинам, подробно изложенным в его «Введении в волновую механику» (1929 г.), де Бройль отказался от своей теории в пользу предложенной Гейзенбергом и Бором интерпретации волновой механики в духе принципа дополнительности. В последнее время Д. Бом [2] вновь вернулся к теории волны-пилота, которая, по его мнению, прежде «не была доведена до своего логического завершения». После этого сам де Бройль [3] еще раз повторил те причины, по которым он продолжает считать эту теорию неприемлемой.

Однако в последовавших затем двух заметках [4] де Бройль рассмотрел

---

[2] *D. Bohm.* Phys. Rev., 1952, **85**, 166, 180.
[3] C. r. Acad. sci. Paris, 1951, **233**, 641.
[4] C. r. Acad. sci. Paris, 1951, **233**, 1031 [после заметки Вижье (*J.-P. Vigier*, ibid., p. 1013)]; C. r. Acad. Sci. Paris, 1952, **234**, 265.

другую идею, также опубликованную им еще в 1927 г.[5] В соответствии с этой идеей для систем, состоящих из n частиц, в трехмерном пространстве должны существовать волновые поля [6]

$$U_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n; t), \ldots, U_n(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n; t), \tag{4}$$

такие, что U_k при $\mathbf{x} = \mathbf{z}_k$ имеет особенность вида $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_k|}$ [7]. Даже если предположить, что вне сингулярных точек эти поля удовлетворяют линейному однородному волновому уравнению, то зависимость $\mathbf{z}_i$ от времени (т. е. траектории сингулярных точек) все же останется произвольной. Для того чтобы движением сингулярных точек можно было управлять [8], необходимо кроме полей (4) ввести еще волновую функцию

$$\psi(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n; t) \tag{5}$$

в конфигурационном пространстве, которая должна удовлетворять обычному уравнению Шредингера (всюду, за исключением, может быть, окрестностей особых точек $\mathbf{q}_k = \mathbf{z}_k$). При этом следует проводить четкое различие между *действительным* положением $\mathbf{z}_k$ и *возможным* положением сингулярных точек, ибо зависимость функции ψ от времени однозначно определяется лишь в том случае, если при $t = 0$ функция ψ задана во всем конфигурационном пространстве, а не только вблизи мгновенных положений $\mathbf{z}$ сингулярных точек.

Связь между «волной-пилотом» ψ и n функциями U_k в обычном пространстве до сих пор не была сформулирована математически. (Только в случае одной изолированной частицы, на которую не действуют никакие внешние силы, удается непосредственно показать, что фазы функций ψ и u равны.[9]) Поэтому новая разновидность теории волны-пилота до сих пор представляет собой лишь некую математическую *программу* [10].

Если бы эта программа была выполнена, то начальные значения физических величин (1) должны были бы однозначно определять эволюцию системы. Следовательно, сингулярные поля (4) встречались бы лишь на промежуточных этапах определения траекторий сингулярных точек по указанным начальным данным. Разумеется, при этом, по всей видимости, потребовалось бы видоизменить уравнения (2а), (2б) и квантовый потенциал (3), но общая проблема согласования детерминистской схемы с вол-

---

[5] J. Phys., série VI, 1927, 8, 221.

[6] Здесь $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$, ... означают векторы в трехмерном пространстве.

[7] Предполагается, что в случае *n невзаимодействующих частиц* волновая функция $u_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}_k)$, отвечающая k-й частице, не зависит от координат остальных частиц и совпадает с волновым полем этой частицы, если считать, что последняя изолирована. Таким образом, в отличие от функции ψ здесь уже нет необходимости брать произведения невозмущенных полей u_k.

[8] Ср. *L. de Broglie*. J. Phys., VI, 1927, 8, 221, формула (32).

[9] Предположение о том, что фаза функции и в сингулярных точках должна быть в общем случае регулярной, на мой взгляд, не является естественным.

[10] Л. де Бройль весьма любезно сообщил мне в письме о современном (февраль 1952 г.) состоянии этой теории и высказал свои соображения по этому поводу.

новой механикой и ее вероятностным характером, к обсуждению которой мы сейчас перейдем, существенно измениться не может.

2. В оставшейся части работы я хотел бы обсудить с общей точки зрения попытки дополнить квантовую механику с помощью скрытых параметров до превращения ее в детерминистскую схему. Теория волны-пилота представляет собой не более чем один из примеров подобных попыток.

Чтобы установить связь с обычной волновой механикой, как правило, переходят к рассмотрению таких статистических ансамблей, у которых функции ψ всех элементов определяют значения параметров, распределенных с плотностью

$$W(z) = \psi^*(z)\psi(z) = R^2(z).$$

Столь специальный выбор ансамблей пытаются обосновать тем, что уравнение непрерывности гарантирует вероятностный характер распределения плотности параметров (понимаемый в классическом смысле) в любой момент времени, если оно было реализовано в начальном состоянии при условии, что система остается замкнутой. Однако тут необходимо заметить, что в детерминистской теории не может быть гипотезы о вероятностях. Ссылка на уравнение непрерывности представляется мне недостаточной для *полного* обоснования такой гипотезы. Например, если экспериментатор любым способом разделит ансамбль на две части, то распределение значений параметров в общем случае вовсе не будет определяться амплитудами функции ψ. Если только существует какое-нибудь явление, в котором могут (косвенно) проявляться значения этих параметров, поведение обеих частей ансамбля с необходимостью будет различным, несмотря на равенство отвечающих им функций ψ. *Таким образом, гипотеза об универсальном характере вероятностного распределения параметров, определяемом одной лишь функцией* ψ, *не является обоснованной с точки зрения детерминистской схемы; она заимствована из теории, основанной на совершенно иной гипотезе, согласно которой функция* ψ *служит полным описанием системы* [11].

Даже в том случае, если мы ограничимся рассмотрением ансамблей указанного специального вида, нам придется еще обсудить вопрос о том, *всякое* ли статистическое утверждение квантовой механики относительно замкнутых систем может быть воспроизведено в детерминистской теории. Дж. фон Нейман доказал в общем виде, что этого никогда нельзя добиться, если оперировать скрытыми параметрами наблюдаемой системы. Для выхода из создавшегося положения используют явно детерминистскую теорию [12], согласно которой лишь малая часть утверждений обычной волно-

---

[11] Я считаю, что критика Л. де Бройля, утверждающего, что в детерминистски-полной теории эволюция параметров (координат частиц) со временем зависит от всех *возможных* движений частиц, выражает ту же идею другими словами; но я также считаю, что тот вариант теории волны-пилота, который предполагает сингулярные решения, не может существенно помочь нам в решении этой трудности, ибо любая детерминистская схема не позволяет наложить общие ограничения на статистическое распределение начальных значений физических величин в ансамбле (в классическом смысле).

[12] *D. Bohm.* Phys. Rev., 1952, 85, 166, 180.



А. БУТЕНАНТ, В. ПАУЛИ, Ч. РАМАН
(Линдау, 1956 г.)

вой механики относительно замкнутой системы S является свойством одной только S. Например, в то время как пространственные координаты частиц имеют смысл «реальных» параметров S, импульсы частиц и их распределение вероятности нельзя интерпретировать как свойство одной лишь S. Состояния системы S, которые в обычной интерпретации теории появляются как следствие «измерения, производимого над S с помощью приборов A», интерпретируются теперь в детерминистском духе как результат сложных взаимодействий [13] с надлежащим образом выбранными системами A. Состояния S не соответствуют более свойствам S («наблюдаемым»), ибо в детерминистской теории, строго говоря, нет никакой «проблемы измерения». Как заметил Бом, результат взаимодействия зависит еще и от значений параметров A. То, что утверждается здесь относительно положения частицы и ее импульса, справедливо и в общем случае для любой пары канонически-сопряженных переменных: все или бо́льшая часть значений *одной* из таких переменных можно интерпретировать как «свойство системы S». Простой переход с помощью преобразования Фурье от волновой функции некоторой переменной к волновой функции сопряженной переменной (какую из этих функций считать «первичной», зависит от нашего усмотрения) лишает физического смысла сформулированное только что утверждение, поскольку оно вносит в интерпретацию канонически-сопряженных величин асимметрию, не имеющую под собой оснований ни в нашем опыте, ни в математическом формализме волновой механики.

Разумеется, изложенный выше способ обойти теорему Дж. фон Неймана с помощью столь несимметричного и произвольного исключения части свойств некоторой замкнутой системы S[14] непротиворечив, коль скоро функция ψ задана, а значения параметров не могут проявляться ни прямо, ни косвенно. Однако и в этом случае мнимый детерминизм сводится на нет принципом наблюдаемости (и, следовательно, «метафизичен»). Недетерминистский характер теории, от которого якобы удалось избавиться, будет возникать в «бесконечном спуске», к которому должна с необходимостью приводить любая попытка определения значений параметров [15].

3. Очевидно, что дополнительные параметры имели бы физический смысл лишь в том случае, если бы современная теория допускала обобщение, удовлетворяющее следующим условиям: 1) в обобщенной теории дополнительные параметры могли бы (хотя бы косвенно) проявляться в наблюдаемых явлениях; 2) обобщенная теория содержала бы результаты, полученные современной волновой механикой.

Ни одному из авторов до сих пор не удалось одновременно реализовать оба эти постулата, и мне кажется, что даже, если оставить в стороне ска-

[13] В этой связи я замечу, что употребление слова «хаотически» в детерминистской теории приводит к неясности, поскольку все явления, даже самые сложные, должны в принципе развиваться строго детерминированным образом.

[14] Ср. аналогичное замечание Детуша о том, что существует дополнительность в «системе Вселенной» (*J. L. Destouches.* J. Phys., 1952, **13**, 354).

[15] К аналогичным заключениям пришла П. Детуш-Феврие (C. r. Acad. sci. Paris, 1951, **233**, 1430).

занное выше в связи с использованием понятия вероятности, здесь имеются и другие, непреодолимые трудности. Действительно, если бы эти параметры могли проявляться в различии физического поведения двух аналогичных систем, обладающих одной и той же ψ-функцией (описание системы ψ-функцией «неполно»), то в термодинамических свойствах квантовых систем должны были бы появиться существенные вековые изменения [16]. Характерно, что термодинамические результаты обычной волновой механики для систем, состоящих из большого числа тождественных частиц, по существу основаны на *качественном* различии между тождеством и простым подобием состояний отдельных частиц полной системы. Если введение новых дополнительных параметров физически сказывается в том, что тождественные состояния переходят в различные, то равновесные состояния современной теории, которые находятся в соответствии с опытом (статистики Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака), утратят свои равновесные свойства и подвергнутся вековым изменениям. (Проведенное нами рассуждение совершенно не зависит от технических возможностей измерения значений дополнительных параметров.) Это заключение находится в вопиющем противоречии со всем характером нашего опыта.

Чтобы дать математическую иллюстрацию к нашим рассуждениям, замечу прежде всего, что в общей схеме физических величин (1) простые свойства симметрии можно получить лишь в том случае, если одновременно подвергнуть переменные q_k функции ψ и z_k [или соответствующие сингулярные функции (4) во втором варианте теории] одной и той же перестановке. *Если параметры z_k не должны быть чисто «метафизическими»*, то производная ψ-функции по времени должна быть определена лишь при условии, что, помимо начальных значений ψ, заданы начальные значения z_k. [Противоположная гипотеза, согласно которой z_k не входят в явном виде в волновое уравнение для ψ, уже использована в другой (обычной) теории, в которой ψ дает полное описание состояния.] О том, что малые дополнительные члены в гамильтониане, зависящие явно от значений этих параметров [17], приводят непосредственно к неприемлемым выводам, уже говорилось [18].

Таковы физические причины, которые, не имея ничего общего с философскими предрассудками относительно интерпретации и обоснования физических теорий в общем случае, заставили меня прийти к мнению о том, что интерпретация квантовой механики на основе идеи дополнительности является единственно допустимой. Не считая окончательным современное состояние квантовой механики в релятивистской области, я тем не менее полагаю, что развитие этой теории будет уводить нас все дальше и дальше от возможности ее причинной и детерминистской интерпретации.

---

[16] Д. Бом, по-видимому, считает, что расхождения с результатами современной теории не приводят ни к каким ограничениям на расстояниях порядка 10^{-13} *см*.

[17] Типы дополнительных членов, рассмотренные Бомом [*D. Bohm*. Phys. Rev., 1952, 85, 166, 180, формулы (31) и (32)], приводят к тем же следствиям.

[18] При реализации варианта теории волны-пилота, использующего сингулярные решения (находящейся до сих пор лишь в состоянии программы), та же трудность возникнет с не меньшей остротой.

1955

ПРИНЦИП ЗАПРЕТА, ГРУППА ЛОРЕНЦА, ОТРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ЗАРЯДА *

Посвящение

Семидесятилетие со дня рождения Нильса Бора заставило меня вспомнить о пути развития физики, на который наука вступила в 1922 г. и на котором она находится до сих пор. За это время был разработан ряд важных вопросов. Не претендуя на полноту изложения, я все же позволю себе упомянуть о некоторых из них в связи с темой статьи, которую, надеюсь, Бор разрешит посвятить ему по случаю юбилея.

После короткого периода идейного разброда и разногласий, вызванных временным ограничением «наглядности», было достигнуто общее согласие о замене конкретных образов абстрактными математическими символами, например ψ. В частности, конкретный образ вращения в трехмерном пространстве был заменен на математические характеристики представления группы вращений. Эту группу Дирак вскоре расширил до группы Лоренца. Тонкое природное чутье физика помогло Дираку начать свои рассуждения, не зная, что они приведут к теории, которая обладает точной симметрией по отношению к знаку заряда, в которой энергия всегда положительна и в которой предсказывается рождение и аннигиляция пар. Чтобы достичь этого, ему пришлось новым и удивительным способом соединить свои идеи с принципом запрета.

В математическую группу были включены отражения пространства и времени. Уже на относительно раннем этапе развития теории Вигнер получил интересные следствия для обращения времени из того, казалось бы, тривиального обстоятельства, что, по определению, замена функции на ее комплексно-сопряженную не является «линейной операцией». Позже Швингер дал этому альтернативную формулировку, указав, что если формулы читать двумя способами — не только слева направо, но также и справа налево,— то можно увидеть больше; это указание я скромно пытаюсь применять.

Я надеюсь, что данная статья проиллюстрирует также тот факт, что как строгий математический формализм, так и эпистемологический анализ неизбежны в физике и взаимно дополняют друг друга в смысле принципа дополнительности, введенного Нильсом Бором. Когда я пытаюсь использовать математику, чтобы связать все упомянутые стороны теории с помощью большого количества знаков плюс и минус, то эпистемологический анализ напоминает мне, что окончательная «истина» этого вопроса все еще «пребывает в бездне» неизведанного [1].

---

* *Exclusion Principle, Lorentz Group and Reflection of Space-Time and Carge.*— In: Niels Bohr and the Development of Physics. Ed. by W. Pauli. London, Pergamon Press Ltd., 1955, p. 30—51.

[1] Я сошлюсь здесь на любимые строки Бора из Шиллера:

«Nur die Fülle führt zur Klarheit
Und im Abgrund wohnt die Wahrheit».

§ 1. Введение

Хотя я некоторое время тому назад изложил в нескольких работах (см. [1—5]) вопрос о связи спина (целого или полуцелого) со статистикой (антисимметричные или симметричные волновые функции, антикоммутаторы или коммутаторы переменных поля при квантовании поля), все же необходимо возобновить и дополнить эту старую дискуссию. Одна из причин заключается в том, что я ограничивался доводами, относящимися главным образом к случаю свободных частиц. В настоящее время исследование взаимодействий между разного рода частицами и полями в гораздо большей степени находится в центре общих интересов, и это несколько меняет значимость старых аргументов. Так, например, чтобы исключить теоретически квантование полей с целыми спинами при помощи антикоммутаторов, я вводил специальный постулат, по которому коммутаторы физических величин должны обращаться в нуль для точек, разделенных пространственно-подобным интервалом. Это делалось, чтобы коммутатор поля в отсутствие сил не мог равняться функции $\Delta^{(1)}$ вместо функции Δ. Однако такое аномальное квантование нельзя сделать правилом, совместным с уравнениями поля в случае, когда рассматривается любое локальное взаимодействие частиц друг с другом (нелинейность уравнений поля) или с другими частицами. Следовательно, в этом более общем случае упомянутый специальный постулат представляется излишним.

Если рассматривать полуцелый спин, то первоначальный аргумент Дирака (который привел его к теории дырок) о том, что значения энергии должны быть положительными, кажется мне и поныне лучшим теоретическим априорным аргументом в пользу применимости принципа запрета для этих значений спинов. Справедливо также, что при квантовании спинорных полей при помощи антикоммутаторов положительный знак энергии (по отношению к энергии вакуума, принятой за нуль) обеспечивается только для свободных частиц. Если приняты во внимание взаимодействия, то для устранения бесконечностей нужно использовать специальную вычислительную процедуру с дополнительными правилами, так называемую перенормировку постоянных массы и заряда. Хотя на этом пути был достигнут некоторый прогресс, такой метод пригоден, конечно, лишь в ограниченных пределах и только для некоторых взаимодействий. Поскольку он основан по существу на предположении, что теория для свободных частиц (без взаимодействий) применима точно для так называемых одночастичных состояний [2], старый довод Дирака в его теории дырок еще будет применим и для таких состояний.

Другим поводом для возобновления дискуссии являются недавно предпринятые попытки установить связь между свойствами поля по отношению к отражению пространства-времени и заряда, или, более точно, между сопряжением частица — античастица (иначе, зарядовым сопряжением — в дальнейшем будем сокращенно обозначать его з. с.), с одной

2 Челлен [6] развил аппарат перенормировок, не используя методов теории возмущений. Интересный нерелятивистский пример обсуждается в работе Ли [7].

стороны, и связью статистики со спином — с другой. Поскольку, например, плотность заряда для частиц со спином $^1/_2$ положительно определена в теории с c-числами, возникает идея получить подобное квантование поля при помощи антикоммутаторов (принцип запрета) из постулата о зарядовой симметрии. Для одного спинорного поля это действительно просто, но в случае нескольких полей со спином $^1/_2$ положение будет более затруднительным, если не вводить конкретного преобразования при зарядовом сопряжении, а лишь допустить существование некоторого подходящего преобразования, не используя постулат о положительности энергии (см. [4]). Поэтому здесь мы будем *предполагать* существование нормального преобразования при сопряжении частица — античастица, которое связывает каждое спинорное поле с комплексно-сопряженным к нему также и в случае нескольких спинорных полей. Таким образом, для получения зарядовой симметрии при переходе от теории с c-числами к теории с q-числами необходимо (имея в виду, что поле квантуется при помощи антикоммутаторов) антисимметризовать каждое билинейное по переменным поля выражение. Это впервые было показано Гейзенбергом [8].

Следующий шаг на пути развития этих идей сделал Швингер [9], который дал простое общее выражение для преобразований различного рода полей, при которых одновременно не только каждая частица превращается в соответствующую античастицу (что включает зарядовое сопряжение), но также и пространственно-временные координаты меняют знак. Это преобразование я буду называть в дальнейшем *сильным отражением* и сокращенно обозначать с. о. Существенной частью данного Швингером преобразования является обращение порядка всех сомножителей в выражениях для всех операторов; другими словами, все формулы должны читаться справа налево, а не слева направо. В дальнейшем я буду обозначать эту часть с. о. словом «инверсия». Специальное правило преобразования, данное Швингером для с. о., выполняется, если спинорные поля с полуцелым спином квантуются при помощи антикоммутаторов, а поля с целым спином — при помощи коммутаторов [3].

При комбинации с. о. и з. с. получается еще одно преобразование — отражение пространства-времени; электрический заряд при этом сохраняет свой знак и замены частицы на античастицу не происходит. Это преобразование я назову *слабым отражением* и обозначу сл. о.

Оно было уже сформулировано Вигнером [10] в нерелятивистской квантовой механике, а затем обобщено для релятивистского случая (см., например, [11]). Как показал Ватанабе [12[, сл. о. выполняется независимо от соотношений коммутации для полей, так что из него в отличие от с. о. или з. с. нельзя сделать никакого вывода относительно статистики.

---

[3] При чтении работы Швингера создается ошибочное представление, что каждое преобразование, которое меняет знак пространственно-временных координат, неизбежно меняет также знак электрического заряда. Ясно, что это не так. Внимательное чтение работы показывает, однако, что из нее нельзя вывести определенного заключения о собственном мнении Швингера по этому поводу.

В § 2 этой работы я приведу, не претендуя на новизну результатов [4], формулы для сл. о. и с. о. в простейших случаях спинов 0, $^1/_2$ и 1. Формула для сл. о. будет дана в несколько измененном виде по сравнению с формулой, которую вывела группа сотрудников из Принстона, но та и другая полностью эквивалентны. Я ограничился отражением всех координат одновременно, так как я не рассматривал отражение пространства и времени по отдельности. Это имеет то преимущество, что мне нет необходимости предполагать энергию взаимодействия инвариантной по отношению к каждому из этих отражений.

На первый взгляд представляется, что начинать с с. о., з. с. или сл. о.— дело чистого удобства, так как *каждое из этих трех преобразований равно произведению двух других.* Но Людерс в работе [13], написанной в Копенгагене, указал, что преобразования сл. о. и з. с. накладывают на гамильтониан одни и те же ограничения [5]. Он пришел к важному заключению, что с. о. следует из более общих постулатов, чем любое из других двух преобразований (сл. о. и з. с.). Однако в его доказательстве нелегко разобраться, ибо он пользуется ненужными предположениями.

Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы дать доказательства применимости сильного отражения при более общих предпосылках, объединив данное ранее автором преобразование [2] и процедуру «инверсии» Швингера (см. § 3):

А. Мы не пытаемся вывести здесь связь между спином и статистикой только из существования с. о., но предполагаем, что *такая связь существует.*

Б. Что касается специального принципа относительности, то мы предполагаем лишь *инвариантность лагранжиана по отношению к собственным преобразованиям Лоренца* (непрерывная группа Лоренца), сокращенно обозначаемым через L_4.

В. Далее мы предполагаем ради простоты, что уравнения поля носят *локальный* характер. Это означает, что все величины поля являются спинорами или тензорами конечного ранга и что лагранжиан (или гамильтониан) взаимодействия содержит производные лишь конечного порядка по этим величинам поля. (Возможные обобщения этих предположений будут указаны в конце § 3.)

Г. Удобно предположить, что «кинематически-независимые спинорные поля антикоммутируют» [6].

Можно также принять, что группы спиноров коммутируют друг с другом, однако представляется искусственным с математической точки зрения запрещать линейные комбинации между ними. Чтобы использовать пред-

---

[4] Я удивился, когда д-р Людерс сообщил мне, что выражение (21a) не содержится в ранее опубликованной литературе. Кроме того, он любезно предложил ряд улучшений, которые я включил в текст. Тем временем появилась работа Умедзавы, Камефучи и Танаки [21], где также рассмотрены этот и другие примеры.

[5] Это было показано для взаимодействия между бозонным полем и полем Дирака [14—16] и для взаимодействия Ферми между четырьмя полями Дирака [17, 18]; см. § 2.

[6] Ср. постулат Ia в работе Людерса [13].

положения «А» и «Б», удобно разложить величины поля на части, которые преобразуются относительно собственных преобразований Лоренца по *неприводимым* представлениям (предполагается, что они конечного порядка); каждую из этих частей удобно характеризовать парой индексов ($m/2$, $n/2$), где m и n — целые. Если рассматриваемая величина записывается как спинор, который симметричен по каждой из двух групп индексов, то m представляет собой число пунктирных индексов, а n — непунктирных. Если $m + n$ нечетно (четно), то мы будем говорить, что рассматриваемое поле — фермионное (бозонное).

Используя это определение, можно ввести теперь «упорядочение произведения» следующим образом [7]: «Каждое произведение M бозонных и N фермионных полей следует заменить деленной на $(M + N)!$ суммой всех возможных перестановок сомножителя, каждый из членов которой умножается на $+1$ для четных перестановок фермионных полей или на -1 для нечетных». Здесь неявно использовано предположение «А», согласно которому для фермионных полей c-числам равны только антикоммутаторы, а для бозонных полей — только коммутаторы.

Основное различие между нашими предпосылками и предпосылками Людерса заключается в том, что мы не использовали ни предположения об инвариантности теории по отношению к отражению пространства и времени по отдельности, ни эрмитовости гамильтониана [8]. Кроме того, становится более очевидным, что соображение о градиентной инвариантности входит в теорию независимо. Это обобщение означает, конечно, что сохранение заряда не будет выполняться. Тем не менее можно вывести такое обобщение сильного отражения, при котором каждый упорядоченный локальный вектор состояния меняет свой знак (подобно пространственно-временно́му координатному вектору), а каждый упорядоченный локальный тензор второго ранга или скаляр остается неизменным.

Для доказательства вернемся к преобразованию, приведенному в [2], где используется разбиение всех спиноров и тензоров на *четыре* класса в зависимости от четности или нечетности введенных выше чисел m и n. Преобразование можно сформулировать так: при с. о. поля должны умножаться на

$$\begin{aligned} (-i)(-1)^m &= i\,(-1)^n \quad \text{при} \quad m + n \text{ нечетном (фермионы)}, \\ (-1)^m &= (-1)^n \quad \text{при} \quad m + n \text{ четном (бозоны)}. \end{aligned} \qquad (\mathrm{T})$$

Для векторов ($m = n = 1$) это означает изменение знака, что выполняется также для пространственно-временны́х координат.

В § 3 будет доказана теорема, которая формулируется так [9]: *Если преобразование* (Т) *выполняется для исходных величин поля и для простран-*

---

[7] Ср. постулат IIа в работе Людерса [13]; этот постулат здесь несколько обобщен.

[8] Специальный вид связи между двумя дуальными пространствами векторов состояния при комплексном сопряжении необходим, но по другим физическим причинам, а не из-за с. о. Ср. транспонированные операторы Швингера [9, с. 925].

[9] Ср. также Швингер [9], с. 925, особенно прим. 8.

ственно-временны́х координат, то оно выполняется также для всех их упорядоченных произведений или их производных конечного порядка при инверсии.

Легко показать, что все уравнения, ковариантные относительно собственных преобразований Лоренца, остаются справедливыми и после применения преобразования (Т), поскольку инвариантные операции не меняют четности m или n в произведениях спиноров.

Это характерно для теории с q-числами, тогда как в теории с c-числами условия вещественности для спиноров не сохраняются при пространственно-временны́х отражениях [10].

Замечательно, однако, что в теории с q-числами с. о. имеет место, даже если предположить только существование непрерывной группы L_4 (без градиентной группы) и существование связи между спином и статистикой, не накладывая дальнейших ограничений на лагранжиан [11].

§ 2а. Слабое отражение (сл.о.)

В дальнейшем мы рассмотрим инвариантные по отношению к преобразованию Лоренца теории поля, включая взаимодействия между различными полями, и обсудим для этих взаимодействий простые примеры. Здесь будем всегда предполагать, что полуцелые спины квантуются с антикоммутаторами (принцип запрета), а целые спины — с коммутаторами (статистика Бозе), не выводя этого из других постулатов. Используется мнимая четвертая координата $x_4 = it$ и обычная система единиц $\hbar = c = 1$. Индексы, обозначаемые греческими буквами, пробегают значения от 1 до 4. Спинорные индексы не выписываются, но, чтобы отличать спиноры от скаляров, последние будут обозначаться через φ или Φ, а первые — через ψ; в случае нескольких спинорных полей ψ будут различаться индексом. Электромагнитный потенциал обозначаем через φ_μ, а соответствующие напряженности поля, определяемые ротором потенциала,— через $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$.

В этой работе мы имеем дело только с одновременным отражением всех пространственно-временны́х координат

$$x'_\nu = -x_\nu, \tag{1}$$

тогда как отражения пространства и времени по отдельности не обсуждаются. Причина этого будет объяснена в § 3. Следовательно, мы не используем здесь приставку «псевдо», которая сохраняется для пространственных отражений. Величины, которые преобразуются одинаковым образом во всех трех рассматриваемых здесь случаях (сл. о., з. с., с. о.), вообще говоря, будут обозначаться одной и той же буквой; например, φ_μ будет

[10] Это обстоятельство тесно связано с формальным методом Фейнмана для квантования спинорных полей по статистике Бозе при помощи «отрицательных вероятностей» (см. [5]).

[11] У меня нет определенного мнения, была ли уже известна Швингеру общность этого результата.

обозначать также векторное мезонное поле, которое преобразуется как электромагнитное поле при этих трех отражениях. Кроме того, введем другого рода скалярные и векторные поля, обозначаемые через Φ и Φ_μ, которые преобразуются при слабом отражении и зарядовом сопряжении иначе, чем φ и φ_μ.

Начнем теперь со слабого отражения, которое, по определению, оставляет оператор электрического заряда

$$Q = \int (-ij_4(x)) d^3x \tag{2}$$

неизменным

$$Q' = Q. \tag{3}$$

Если мы ограничимся здесь *локальными* преобразованиями полей, которые связывают поля только в одной и той же пространственно-временно́й точке, то обобщим (8) в виде постулата

$$j'_\mu(x) = j_\mu(-x). \tag{4}$$

Из уравнений Максвелла и (4) следуют соотношения для напряженности поля

$$f'_{\mu\nu}(x) = -f_{\mu\nu}(-x) \tag{5}$$

и для потенциалов (если отвлечься от возможного дополнительного градиентного преобразования)

$$\varphi'_\mu(x) = \varphi_\mu(-x). \tag{6}$$

Обобщим здесь электромагнитное понятие заряда, чтобы отличить частицы от античастиц, включая сюда нейтрон и нейтрино. Оператор Q приобретает тогда более общий смысл разности между числом частиц и числом античастиц, которая в силу обобщенной градиентной группы представляет собой интеграл уравнений поля. Эта группа выделяет два типа комплексных (неэрмитовых) полей, которые мы будем отличать при помощи звездочки и которые при градиентных преобразованиях домножаются на противоположные фазовые множители $e^{i\alpha}$ (тип поля, обозначаемый со звездочкой) и $e^{-i\alpha}$ (тип поля, обозначаемый без звездочки). Коммутаторы этих двух типов полей с Q имеют противоположные знаки

$$[Q, f] = -f, \quad [Q, f^*] = +f^*. \tag{7}$$

Вид поля f до сих пор не уточнялся; им могут быть спиноры, скаляры, векторы и другие поля, описывающие частицы, которые отличаются от своих античастиц. Если поле f принадлежит одному классу, то эрмитово-сопряженное поле f^* принадлежит другому классу.

Независимо от этой градиентной группы существуют операторы энергии-импульса P_μ (четвертая компонента P_4 — это энергия, помноженная на i), которые связаны с группой переносов $x'_\mu = x_\mu + a_\mu$ в простран-

стве-времени и порождают перестановочное соотношение

$$i\,[P_\mu, f] = -\frac{\partial f}{\partial x_\mu} \tag{8}$$

для всех переменных поля f.

При пространственно-временны́х отражениях (1) правая часть уравнения (8) меняет свой знак по отношению к множителю f в левой части независимо от закона преобразования f. Однако изменить знак P_μ невозможно, поскольку знак энергии (принято, что энергия вакуума равна нулю) должен оставаться положительным по физическим соображениям. Более того, для скалярных и векторных полей энергия является положительно-определенной квадратичной формой, которая формально никогда не меняет свой знак. Поэтому мы вводим соотношение инвариантности

$$P'_\mu = P_\mu, \tag{9}$$

которое для наших локальных преобразований можно обобщенно записать в виде соотношения инвариантности плотности энергии-импульса и плотности лагранжиана

$$T'_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(-x), \qquad L'(x) = L(-x) \tag{9a}$$

для всех трех видов рассматриваемых преобразований.

Чтобы получить желаемое изменение знака в левой части уравнения (8), необходимо принять, что нелинейные операторы могут действовать на векторы состояний системы. Вигнер использовал для этого переход к комплексному сопряжению (отличающемуся от эрмитовского сопряжения) вектора состояния и всех операторов. Швингер применил *инверсию*, определенную требованием, что все операторные соотношения должны читаться справа налево, а не слева направо. Эти две процедуры эквивалентны, поскольку все физически наблюдаемые величины представляются эрмитовыми операторами. По чисто формальным соображениям мы следуем здесь правилу Швингера, чтобы не вводить комплексное сопряжение в дополнение к эрмитовскому сопряжению (последнее обозначается здесь звездочкой), а также поскольку мы не имеем здесь дела с векторами состояния в явном виде, а ограничиваемся обсуждением операторов поля (представление Гейзенберга). Поэтому мы вводим здесь следующее правило.

Инверсия (обращение порядка всех множителей) должна быть существенной частью преобразования полей при изменении знака времени, т. е. как при слабом отражении, так и при сильном отражении.

Рассматривая теперь перестановочное соотношение (7) для Q, мы должны проводить различие между сл. о., при котором, *по определению*, Q сохраняет свой знак (см. [3]), и с. о., где знак Q меняется. Принимая во внимание, что инверсия в коммутаторах уже вызывает изменение знака, приходим к такому заключению.

При преобразовании слабого отражения любое f всегда должно преобразовываться в f^* и, наоборот, тогда как при преобразовании сильного отражения любое f должно преобразовываться в другое f (и любое f^* в другое f^*).

Точнее говоря, в случае сл. о., который мы обсудим сначала, следует полагать для комплексного скалярного поля (заряженный скалярный мезон)

$$\varphi'(x) = \varphi^*(-x), \qquad \varphi^{*\prime}(x) = \varphi(-x), \tag{10}$$

а для спинорного поля $\psi(x)$ и сопряженного ему

$$\overline{\psi}(x) = \psi^*(x)\gamma_4, \tag{11}$$

$$\psi'(x) = \Omega^{-1}\overline{\psi}(-x), \qquad \overline{\psi}'(x) = \psi(-x)\,\Omega. \tag{12}$$

В последних соотношениях матрица Ω преобразует эрмитовы матрицы Дирака γ_μ, удовлетворяющие уравнениям

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \tag{13}$$

в транспонированные матрицы $(\gamma_\mu)^T$ согласно равенствам

$$(\gamma_\mu)^T = \Omega\gamma_\mu\Omega^{-1}. \tag{14}$$

Унитарная матрица Q удовлетворяет условиям [12]:

$$\Omega\Omega^* = 1, \qquad \Omega^T = -\Omega. \tag{15}$$

Следует иметь в виду, что в приведенных выше преобразованиях еще остается произвол относительно дополнительного градиентного преобразования с постоянной фазой [которое включает в себя, например, добавочное изменение знака в (10)]. Это замечание оказывается существенным, если рассматриваются взаимодействия, при которых изучаемые частицы могут испускаться или поглощаться, и если рассматриваются несколько независимых полей. Нетрудно проверить, что при этом преобразовании и последующей инверсии уравнения Клейна — Гордона для скаляров и Дирака для спиноров сохраняются. Используя (5), можно проверить, кроме того, что это выполняется также при наличии внешнего электромагнитного поля. Векторы тока [см. (4)]

$$j_\mu(x) = ie\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi - \varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right) \tag{16}$$

и

$$j_\mu(x) = ie\,\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\,\psi(x) \tag{17}$$

[12] См. [1], где Ω обозначено через B.

соответственно остаются инвариантными после инверсии, которая преобразует, например,

$$\psi(-x)(\gamma_\mu)^T\bar{\psi}(-x) \quad \text{в} \quad \bar{\psi}(-x)\gamma_\mu\psi(-x).$$

Более того, плотность энергии-импульса и плотность лагранжиана инвариантны [см. (9) и (9a)] для частиц со спином 0 и $^1/_2$ во внешнем электромагнитном поле.

Разлагая поле по плоским волнам, можно показать, что преобразование (10) или (12) можно рассматривать как замену каждого оператора излучения на оператор поглощения того же собственного колебания *без* замены частиц на античастицу.

Из формы, приданной здесь преобразованию сл. о., ясно, что *перестановочные соотношения для полей не затрагиваются.* Общим основанием этому служит то, что замена f^* на f в произведении, скажем, вида f^*g переводит его сначала в выражение типа gf^*, а следующая затем инверсия восстанавливает первоначальный порядок f^*g, так что окончательно порядок сомножителей сохраняется. *Поэтому преобразование слабого отражения имеет место независимо от того, предполагается ли нормальная связь спина* $^1/_2$ *с принципом запрета и спина* 0 *со статистикой Бозе* (см. [12]).

Для обсуждения дальнейших примеров полезно привести здесь, помимо преобразования тока, также преобразование пяти других ковариантных билинейных форм, составленных из спинора ψ и сопряженного к нему $\bar{\psi}$ при помощи матриц

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \tag{18}$$

и

$$\gamma_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \tag{19}$$

Последние определяются знаками в преобразованиях [см. (14)]:

$$\begin{aligned} (\gamma_5)^T &= \Omega\gamma_5\Omega^{-1}, \ \gamma_{[\mu\nu]}^T = -\Omega\gamma_{[\mu\nu]}\Omega^{-1}, \\ [\gamma_5\gamma_\mu]^T &= -\Omega\gamma_5\gamma_\mu\Omega^{-1}, \ [\gamma_5\gamma_{[\mu\nu]}]^T = -\Omega\gamma_5\gamma_{[\mu\nu]}\Omega^{-1}. \end{aligned} \tag{14a}$$

При этом для сл.о. имеем (помимо замены аргумента x на $-x$):

$$\begin{aligned} &\text{знак плюс для } \bar{\psi}\psi, \ i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \ i\bar{\psi}\gamma_5\psi, \\ &\text{знак минус для } i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi, \ i\bar{\psi}\gamma_{[\mu\nu]}\psi, \ \bar{\psi}\gamma_5\gamma_{[\mu\nu]}\psi. \end{aligned} \tag{20}$$

Множитель i введен здесь потому, что в силу (11) данные выражения становятся эрмитовыми.

Обсудим теперь в качестве примера взаимодействие бозонного поля со спинорным полем Дирака. Сначала предположим, что первое из них вещественное (эрмитово) скалярное или векторное поле, соответствующее нейтральным частицам. Инвариантность по отношению к собственным преобразованиям Лоренца дает следующие возможные формы плотности лаг-

ранжиана взаимодействия:

$$\Phi\bar{\psi}\psi, \quad \Phi\,(i\bar{\psi}\gamma_5\psi),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}(i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) + \text{эрмит.-сопр.}, \quad \varphi_\mu\,(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi),$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_\mu}(i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi) + \text{эрмит.-сопр.}, \qquad \Phi_\mu\,(i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi), \tag{21}$$
$$\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_\nu}\right) i\bar{\psi}\gamma_{[\mu\nu]}\psi + \text{эрмит.-сопр.},$$
$$\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_\nu}\right)(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_{[\mu\nu]}\psi).$$

Здесь эрмитово-сопряженные выражения необходимы вследствие наличия производных.

При слабом отражении бозонное поле должно преобразовываться таким образом, чтобы плотность лагранжиана (21) оставалась неизменной [см. (9а)]. Тогда оказывается, что поля, обозначенные прописной буквой, будут преобразовываться иначе, чем поля, обозначенные строчной буквой, а именно:

$$\varphi'\,(x) = -\,\varphi'\,(-\,x), \; \varphi'_\mu\,(x) = \varphi_\mu\,(-\,x), \tag{22}$$
$$\Phi'\,(x) = +\,\Phi\,(-\,x), \; \Phi'_\mu\,(x) = -\,\Phi_\mu\,(-\,x). \tag{22a}$$

Обозначения выбраны таким образом, чтобы поле φ_μ могло преобразовываться как электромагнитный потенциал [см. (6)] и как $\partial\varphi/\partial x_\mu$, а Φ_μ — как $\partial\Phi/\partial x_\mu$.

Члены, принадлежащие полям разных типов, соединять нельзя; так, например, комбинации

$$C_1\varphi\,(\bar{\psi}\psi) + C_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}(i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)$$

или

$$C_1\varphi_\mu\,(i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi) + C_2\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_\nu}\right)(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_{[\mu\nu]}\psi),$$

как уже известно [13] [14—16], запрещены.

Рассмотрим теперь аналогичный, но несколько более общий случай заряженного бозона, описываемого комплексным скалярным полем φ и взаимодействующего с заряженной частицей со спином $^1/_2$, например, протоном, который описывается дираковским спинором ψ_P, и нейтральной частицей со спином $^1/_2$, например нейтроном, дираковское спинорное поле которого мы обозначим через ψ_N. Результат получается несколько

[13] Мы не будем обсуждать здесь дополнительные ограничения, обусловленные только пространственным отражением. Они не являются достаточными для того, чтобы исключить запрещенные комбинации, приведенные в тексте.

иной, так как здесь могут встречаться все комбинации энергий взаимодействия, но на коэффициенты накладывается *добавочное требование вещественности.* Запишем здесь плотность лагранжиана в виде:

$$C_1\psi(\overline{\psi}_P\psi_N) + C_1^*\varphi^*(\overline{\psi}_N\psi_P) + C_2\varphi(i\overline{\psi}_P\gamma_5\psi_N) + C_2^*\varphi^*(i\overline{\psi}_N\gamma_5\psi_P) + iC_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\times$$
$$\times(i\overline{\psi}_P\gamma_\mu\psi_N) - iC_3^*\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}(i\overline{\psi}_N\gamma_\mu\psi_P) + \text{эрмит.-сопр.} + C_4\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}(i\overline{\psi}_P\gamma_5\gamma_\mu\psi_N) +$$
$$+ C_4^*\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}(i\overline{\psi}_N\gamma_5\gamma_\mu\psi_P) + \text{эрмит.-сопр.} + C_5\varphi_\mu(i\overline{\psi}_P\gamma_\mu\psi_N) +$$
$$+ C_5^*\varphi_\mu^*(i\overline{\psi}_N\gamma_\mu\psi_P) + iC_6\varphi_\mu(i\overline{\psi}_P\gamma_5\gamma_\mu\psi_N) - iC_6^*\varphi_\mu^*(i\overline{\psi}_N\gamma_5\gamma_\mu\psi_P) + \left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\mu} -\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_\nu}\right)\{C_7(i\overline{\psi}_P\gamma_{[\mu\nu]}\psi_N) + C_8(\overline{\psi}_P\gamma_5\gamma_{[\mu\nu]}\psi_N)\} + \text{эрмит.-сопр.} +$$
$$+\left(\frac{\partial\varphi_\nu^*}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\varphi_\mu^*}{\partial x_\nu}\right)\{C_7^*(i\overline{\psi}_N\gamma_{[\mu\nu]}\psi_P) + C_8^+(\overline{\psi}_N\gamma_5\gamma_{[\mu\nu]}\psi_P)\} + \text{эрмит.-сопр.} \qquad (21a)$$

Прежде чем обсуждать отражение, заметим, что перемножение двух спинорных и двух бозонных полей с различными фазовыми множителями эквивалентно перемножению $C_1, \ldots, C_4$ и $C_5, \ldots, C_8$ соответственно с *общими* фазовыми множителями, которые поэтому являются только условными. Если от этого отвлечься, то существенным результатом преобразования (12) двух спинорных полей и последующей инверсии явится здесь замена каждого выражения $\overline{\psi}_A O\psi_B$ на сопряженное ему $\overline{\psi}_B O\psi_A$ со знаком, который определяется из формулы (20). Для комплексного бозонного поля здесь достаточно применить преобразование (10), дополненное сходным преобразованием для векторного поля, а именно:

$$\varphi'(x) = \varphi^*(-x), \quad \varphi^{*\prime}(x) = \varphi(-x),$$
$$\varphi_\mu'(x) = \varphi_\mu^*(-x), \quad \varphi_\mu'^*(x) = \varphi_\mu(-x). \qquad (10a)$$

Мы использовали знаки членов в формуле (20), вставив надлежащим образом множитель i в членах C_3 и C_5 выражения (21a). Полученое простое условие: коэффициенты $C_1, \ldots, C_7$ должны быть вещественными, *если не считать двух тривиальных фазовых множителей, которые можно нормировать на единицу* [14].

Сходный характер имеет пример взаимодействия Ферми четырех дираковских полей, которые описывают протоны ψ_P, нейтроны ψ_N, электроны ψ_e и нейтрино ψ_n. Наиболее общее выражение для плотности энергии взаимодействия (или лагранжиана), если не включать производных,

---

[14] Здесь мы опять-таки не будем обсуждать дополнительные ограничения, обусловленные только пространственным отражением. Последнее делает необходимым отделение «псевдочленов», содержащих явно γ_5, от остальных.

таково:

$$C_1\ (\overline{\psi}_P\psi_N)\ (\overline{\psi}_e\psi_n) + C_1^*\ (\overline{\psi}_N\psi_P)\ (\overline{\psi}_n\psi_e) + C_2\,(\overline{\psi}_P\gamma_\mu\psi_N)\ (\overline{\psi}_e\gamma_\mu\psi_n) + C_2^*\ (\overline{\psi}_N\gamma_\mu\psi_P) \times$$
$$\times\ (\overline{\psi}_n\gamma_\mu\psi_e) + C_3\ (\overline{\psi}_P\gamma_{[\mu\nu]}\,\psi_N)\ (\overline{\psi}_e\gamma_{[\mu\nu]}\,\psi_n)\ +\ C_3^*\,(\overline{\psi}_N\gamma_{[\mu\nu]}\ \psi_P)\ (\overline{\psi}_n\gamma_{[\mu\nu]}\ \psi_e)\ +$$
$$+\ C_4\ (\overline{\psi}_P\gamma_5\psi_N)\,(\overline{\psi}_e\gamma_5\psi_n) + C_4^*\,(\overline{\psi}_N\gamma_5\psi_P)\ (\overline{\psi}_n\gamma_5\psi_e)\ +\ C_5\,(\overline{\psi}_P\gamma_5\gamma_\mu\psi_N)\,(\overline{\psi}_e\gamma_5\gamma_\mu\psi_n)\ +$$
$$+\ C_5^*\ (\overline{\psi}_N\gamma_5\gamma_\mu\psi_P)\ (\overline{\psi}_n\gamma_5\gamma_\mu\psi_e) + C_6\,i\,(\overline{\psi}_P\gamma_5\psi_N)\ (\overline{\psi}_e\psi_n)\ +\ C_6^*\ i\ (\overline{\psi}_N\gamma_5\psi_P)\ (\overline{\psi}_n\psi_e)\ +$$
$$+\ C_7\,i\,(\overline{\psi}_P\psi_N)\ (\overline{\psi}_e\gamma_5\psi_n)\ +\ C_7^*\,i\ (\overline{\psi}_N\psi_P)\ (\overline{\psi}_n\gamma_5\psi_e) + i\,\{C_8(\overline{\psi}_P\gamma_5\gamma_\mu\psi_N)\ (\overline{\psi}_e\gamma_\mu\psi_n)_5 -$$
$$-\ \ \{C_8^*(\overline{\psi}_N\gamma_5\gamma_\mu\psi_P)\,(\overline{\psi}_n\gamma_\mu\psi_e)\}\ +\ i\,\{C_9\,(\overline{\psi}_P\gamma_\mu\psi_N)\ (\overline{\psi}_e\gamma_5\gamma_\mu\psi_n)\}\ -\ \{C_9^*\,(\overline{\psi}_N\gamma_\mu\psi_P)\times$$
$$\times\ (\overline{\psi}_n\gamma_5\gamma_\mu\psi_e)\} + C_{10}\ i(\overline{\psi}_P\gamma_5\gamma_{[\mu\nu]}\psi_N)\ (\overline{\psi}_e\gamma_{[\mu\nu]}\psi_n)\ +\ C_{10}^*\ i\ (\overline{\psi}_N\gamma_5\gamma_{[\mu\nu]}\psi_P)\,(\overline{\psi}_n\gamma_{[\mu\nu]}\psi_e). \tag{23}$$

Здесь перемножение четырех спинорных полей с *различными* постоянными фазовыми множителями также эквивалентно перемножению $C_1,\ldots,C_{10}$ с *общим* фазовым множителем, который, таким образом, является чисто условным. Такие фазовые множители произвольны также в матрицах Ω, определенных преобразованиями (14) и (15) для четырех спинорных полей, и из-за них снова возникает возможный общий фазовый множитель у $C_1,\ldots$ $\ldots,C_{10}$ после преобразования сл. о. Если не считать этого, то существенным результатом преобразования (12) и последующей инверсии, примененной к четырем спинорным полям, здесь снова явится *замена каждого выражения* $\overline{\psi}_A O\ \psi_B$ *на сопряженное ему* $\overline{\psi}_B O \psi_A$. Знаки, предписываемые формулой (20), компенсируются всюду, за исключением коэффициентов C_8 и C_9, в которые снова нужно ввести множитель i. Получаем условие, что *коэффициенты* $C_1,\ldots,C_{10}$ *должны быть вещественными* (если не считать тривиального *общего* фазового множителя, который можно нормировать на единицу). Результат этот также хорошо известен [17, 18] [15]. Подводя итоги, мы видим:

1. Закон преобразования некоторой величины при собственных преобразованиях Лоренца не определяет однозначно ее поведение при слабом отражении. Последнее зависит еще и от предположений об энергии взаимодействия.

2. Инвариантность по отношению к слабому отражению налагает дальнейшие ограничения на плотность лагранжиана взаимодействия, помимо ограничений, следующих из инвариантности по отношению к собственным преобразованиям Лоренца.

Обсуждение преобразования сильного отражения покажет нам, что в этом случае справедливо как раз обратное: *чтобы обеспечить инвариантность относительно сильного отражения, не нужны никакие добавочные*

[15] Не рассматриваемая здесь инвариантность чисто пространственных отражений исключила бы одновременное существование взаимодействий с коэффициентами $C_1,\ldots$ $\ldots, C_5$ и $C_6,\ \ldots\ ,\ C_{10}$.

Уайтман и Мишель любезно сообщили мне, что они готовят работу, где будет детально рассмотрен вопрос об инвариантности относительно пространственного отражения для взаимодействий, описывающих β-распад.

ограничения, кроме следующих из инвариантности по отношению к собственной группе Лоренца, и закон преобразования какой-либо величины при сильном отражении однозначно следует из ее тензорных или спинорных свойств. Общее доказательство этого утверждения будет приведено в § 3.

Поскольку преобразование с.о. является произведением преобразований сл. о. и з.с., это утверждение эквивалентно другому, а именно, что з.с. и сл.о. налагают на плотность лагранжиана взаимодействия *те же самые* ограничения и что закон преобразования какого-либо типа спиноров или тензоров при сл.о. однозначно определяет закон их преобразования при з.с. (В литературе последнее утверждение делалось в разных местах и раньше.) Можно было бы, конечно, вывести свойства преобразования с.о., рассматривая его как произведение преобразований сл.о. и з.с., так как последнее хорошо изучено, однако мы предпочитаем рассмотреть с.о. непосредственно.

§ 2б. Сильное отражение (с.о.)

Соотношения инвариантности (9), (9а) для плотности энергии-импульса и плотности лагранжиана в этом случае, как и для сл.о., справедливы, и *данное выше определение инверсии является и здесь существенной частью преобразования.* Однако, по определению, оператор заряда Q и соответствующий ток $j_\mu(x)$ должны изменить свои знаки:

$$Q' = -Q, \quad j'_\mu(x) = -j_\mu(-x). \tag{24}$$

Отсюда получаются [как в отношениях (5) и (6)] противоположные знаки для переменных электромагнитного поля:

$$\varphi'_\mu(x) = -\varphi_\mu(-x), \quad f'_{\mu\nu}(x) = +f_{\mu\nu}(-x). \tag{25}$$

Из (7) следует, что перехода к комплексно-сопряженному оператору здесь не будет.

Для скаляров и спиноров мы имеем, согласно Швингеру, простой закон (если снова отвлечься от градиентного преобразования с постоянным фазовым множителем):

$$\text{для скаляров: } \varphi'(x) = \varphi(-x), \qquad \varphi'^*(x) = \varphi^*(-x), \tag{26}$$

$$\text{для спиноров: } \psi'(x) = \gamma_5\psi(-x), \qquad \bar{\psi}'(x) = -\bar{\psi}(-x)\gamma_5. \tag{27}$$

Знак минус в соотношении (27) обязан антикоммутативности матрицы γ_5 с матрицей γ_4 из формулы (11), так что последнее соотношение также выполняется после преобразования. Произвольный фазовый множитель, который можно еще добавить, позволяет заменить (27) на

$$\psi'(x) = i\gamma_5\psi(-x), \qquad \bar{\psi}'(x) = -(-i)\bar{\psi}(-x)\gamma_5. \tag{27а}$$

В то время как дважды выполненное преобразование (27) приводит к тождеству, другое возможное преобразование (27а), осуществленное дважды, дает изменение знака всех спиноров. Я лишь кратко упомяну здесь, что в теории Майораны (где частицы и античастицы тождественны) приемлема

Знаки билинейных форм

Билинейные формы	Преобразования		
	сл. о.	с. о.	з. с.
$(\overline{\psi}\psi)$, $i(\overline{\psi}\gamma_5\psi)$	+	+	+
$i\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$	+	—	—
$i\overline{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$	—	—	+
$i\overline{\psi}\gamma_{[\mu\nu]}\psi \sim \overline{\psi}\gamma_5\gamma_{[\mu\nu]}\psi$	—	+	—

только вторая возможность [преобразование (27а)]. Матрица γ_5 необходима, чтобы сохранить справедливость уравнения Дирака.

Физический смысл преобразования (27) состоит в замене каждого оператора испускания (поглощения) частицы на соответствующий оператор поглощения (испускания) античастицы.

Без квантования преобразование (27) дало бы инвариантность тока, а не изменение его знака. Однако для инверсии *существенную роль играют правила коммутации.* Этого не было в слабом отражении, однако это существенно для зарядового сопряжения.

Чтобы обеспечить изменение знака тока, предписанное соотношением (24), для спиноров следует ввести квантование с антикоммутаторами, для скаляров — с коммутаторами. Это утверждение следует понимать таким образом, что преобразование частного вида (26) или (27) с последующей инверсией является его предпосылкой. Более того, следует записать ток [см. (17)] спинорного поля как антисимметризованное произведение

$$j_\mu(x) = ie\,\frac{1}{2}\,\{\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\psi(x) - \psi(x)\,(\gamma_\mu)^T\overline{\psi}(x)\}, \tag{17a}$$

так что инверсия меняет его знак. С током скалярного поля следует обращаться аналогичным образом, но с учетом симметризации [16]. *Если применить это дополнительное правило, то преобразования* (26), (27), *сопровождаемые инверсией, удовлетворяют всем требованиям сильного отражения.* При переходе к более общим билинейным формам, которые обсуждались выше [см. (20)], результирующий знак будет различным: плюс или минус в соответствии с тем, коммутирует или антикоммутирует γ_5 с матрицей, стоящей между $\overline{\psi}$ и ψ. Получаем следующую таблицу знаков (последнюю колонку ср. с данными работы [16]):

[16] Чтобы избежать неоднозначностей, связанных с бесконечностями, коммутатор $[A(x), B(x)]$ двух переменных поля следует определять как

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{2}\{[A(x-\xi), B(x+\xi)] + [A(x+\xi), B(x-\xi)]\}.$$

На любой из горизонталей каждый из трех знаков является произведением двух остальных. При с.о. матрица γ_5 не влияет на знак [17], векторы и антисимметричные тензоры преобразуются в точности как аналогичные электромагнитные величины [см. (24) и (25) соответственно], а скаляры остаются инвариантными. Первая колонка таблицы записана в сокращенных обозначениях — каждое произведение $\overline{\psi}O\psi$ следует написать вместе с антисимметризованным

$$\frac{1}{2}(\overline{\psi}O\psi - \overline{\psi}O^T\overline{\psi}).$$

Исследуя выражения для плотности взаимодействия (21), (21а) и (23), мы видим, что после антисимметризации произведения становятся автоматически инвариантными относительно с.о., *если все скаляры и антисимметричные тензоры инвариантны, а все векторы меняют свой знак.* Это утверждение выполняется вообще, если его предположить для всех исходных бозонных полей, так как в выражении вида

$$\frac{1}{2}(\overline{\psi}_A O\psi_B - \psi_B O^T\overline{\psi}_A)$$

индексы A и B в этом случае не переставляются. Поэтому инвариантность относительно сильного отражения имеет место в этих примерах при произвольных фазах всех комплексных коэффициентов.

§ 2в. Зарядовое сопряжение (з.с.)

Комбинируя эти результаты для преобразования с.о. с ранее полученными для сл.о., мы приходим к следующим простым правилам для з.с. (которые также можно было бы вывести непосредственно).

Для спиноров:

$$\begin{gathered}\overline{\psi}'(x) = C^{-1}\overline{\psi}(x), \qquad \overline{\psi}'(x) = -\psi(x)\,C, \\ C = \Omega\gamma_5, \quad CC^* = 1, \quad C^T = -C, \quad \gamma_\mu^T = -C\gamma_\mu C^{-1}.\end{gathered} \qquad \text{(з.с.)}$$

Для вещественных бозонных полей, обозначенных в выражении (21) строчными буквами (включая электромагнитные потенциалы), меняется знак; для полей, обозначенных прописными буквами, знак сохраняется:

$$\begin{gathered}\varphi'(x) = -\varphi(x), \qquad \Phi'(x) = +\Phi(x), \\ \varphi'_\mu(x) = -\varphi_\mu(x), \qquad \Phi'_\mu(x) = +\Phi_\mu(x).\end{gathered} \qquad \text{(з.с.)}$$

Для комплексных бозонных полей, определяемых выражением (21а), здесь получается:

$$\begin{gathered}\varphi'(x) = \varphi^*(+x), \qquad \varphi'^*(x) = \varphi(+x), \\ \varphi'_\mu(x) = -\varphi^*_\mu(+x), \qquad \varphi'^*_\mu(x) = -\varphi_\mu(+x).\end{gathered} \qquad \text{(з.с.)}$$

---

[17] Понятия «псевдо» здесь нет, оно существует лишь для раздельных пространственных или временны́х отражений.

Для з.с. существенны те же условия вещественности коэффициентов, что и для сл.о. Перестановочные соотношения существенны для з.с., как и для с.о.

Закончив рассмотрение частных случаев [18], перейдем теперь к доказательству нашего общего утверждения о сильном отражении.

§ 3. Общее доказательство утверждения о преобразовании сильного отражения как следствия непрерывной группы Лоренца и связи спина со статистикой

Предположим здесь, что теория *локальна*, т. е. что в нее входят производные по координатам только конечного порядка и что все величины поля преобразуются относительно непрерывной лоренцевской группы, в которую не включены отражения (сокращенно L_4), по конечномерным представлениям (спиноры или тензоры). *Неприводимые* представления L_4 обычно характеризуются двумя числами, в качестве которых мы выберем целые числа m и n, равные удвоенным обычным квантовым числам, так что порядок представления равен $(m + 1)\ (n + 1)$. Разложение прямого произведения двух неприводимых представлений на неприводимые части приводит всегда к значениям m и n той же четности, другими словами, полученные таким образом разные значения m и n отличаются на четное число. Это легко увидеть на примере спинорного исчисления, где вводятся две группы индексов — пунктирные и непунктирные, а индексы каждой группы принимают только два значения. Неприводимые спиноры симметричны по каждой группе индексов, и, следовательно, m и n можно отождествить с числом индексов соответственно в каждой из этих двух групп. Единственными инвариантными операциями являются прямое произведение двух величин и свертывание с антисимметричным тензором $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$, которое уменьшает число индексов в одной из групп на два. Это наводит на мысль о разделении всех спиноров на *четыре класса, которые различаются по четности целых чисел m и n* [см. (21)].

Спинор Дирака с четырьмя компонентами можно разложить на две неприводимые части, в каждой из которых будет по две компоненты, характеризуемые числами (1, 0) и (0, 1), соответствующими диагональному виду матриц γ_5 с ее двумя собственными значениями $+1$ и -1. Преобразование (27)

$$\psi' = \gamma_5 \psi,$$

которое мы применяли к спинорам Дирака, принимает теперь для неприводимых величин u (1,0) и v (0, 1) простой вид:

$$u'(1,0) = u(1,0), \qquad v'(0,1) = -v(0,1). \tag{27б}$$

[18] Аппарат изотопического спина применительно к з. с. обсуждается в очень общем обзоре Мишеля [20], применительно к сл. о.— у Айзенбуда и Вигнера [19]. Изотопический спин не играет никакой роли в преобразованиях для с. о.

Простейшим обобщением этого преобразования на величину типа (n, m), обозначаемую через $u\,(n, m)$, было бы правило

$$u'\,(n, m) = (-1)^m\, u\,(n, m). \tag{28}$$

Действительно, $(-1)^m$ зависит только от четности m. Это означает, что $(-1)^m$ представляет собой характер класса и при перемножении двух величин $u\,(n', m')$ и $u\,(n'', m'')$ характеры тоже перемножаются. *Следовательно, любое уравнение, инвариантное относительно непрерывной группы* L_4, *остается верным, если каждая ковариантная величина умножается на* $(-1)^m$. Так как вектору соответствуют $n = m = 1$, то преобразование (28) меняет знак каждого вектора [19]; это свойство разумно принять как общее правило для с.о.

Существует, однако, одна важная оговорка к последнему утверждению, которое мы выделили курсивом: *при его выводе не используются никакие условия вещественности.* Поскольку пунктирные и непунктирные индексы преобразуются по комплексно-сопряженным представлениям, это же справедливо и для двух величин $u\,(n, m)$ и $v\,(m, n)$. Инвариантное условие вещественности имеет поэтому вид

$$(u\,(n, m))^* = v\,(m, n). \tag{29}$$

Ясно, что это условие, вообще говоря, не сохраняется при преобразовании (28), так как при этом левая часть умножается на $(-1)^m$, правая же — на $(-1)^n$; совпадение имеет место только тогда, когда m и n обладают одинаковой четностью ($m + n$ четно).

Это утверждение можно проверить непосредственно, используя спиноры Дирака, поскольку в общем случае применение (28) дает также [20]

$$\overline{\psi}'\,(x) = +\,\overline{\psi}\,(-x)\,\gamma_5, \qquad \psi'\,(x) = \gamma_5\,\psi\,(-x), \tag{27в}$$

---

[19] Дуальный самому себе тензор с $(n, m) = (2,0)$ или $(0,2)$ и симметричный тензор со следом нуль $(2,2)$ остаются инвариантными подобно скаляру $(0,0)$.

[20] Чтобы это показать, воспользуемся спинорным исчислением, согласно которому соотношения

$$u^1 = u_2,\; u^2 = -\,u_1 \tag{R}$$

преобразуются контраградиентно (обратно) (u_1, u_2). Здесь использован тот факт, что определитель преобразования равен единице. Более того, (v_1, v_2) преобразуются как комплексно-сопряженные к (u_1, u_2).

В представлении, где

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\; \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

с двустрочными матрицами в каждой клетке, четыре компоненты ψ и $\overline{\psi}$ можно записать в виде:

$$\psi \sim (u_1, u_2;\, v^{\dot 1}, v^{\dot 2}), \qquad \overline{\psi} \sim (\bar u^1, \bar u^2;\, \overline{v}_{\dot 1}, \overline{v}_{\dot 2}).$$

Из преобразования (11), а именно $\overline{\psi} = \psi^*\gamma_4$, тогда получаются выражения:

$$\bar u^1 = (v^{\dot 1})^*, \qquad \bar u^2 = (v^{\dot 2})^*, \qquad \bar v_{\dot 1} = u_1^*, \quad \bar v_{\dot 2} = u_2^*,$$

тогда как преобразование (11), которое является частным случаем (29), приводит, как уже указывалось, к преобразованию (27):

$$\bar{\psi}'(x) = -\bar{\psi}(-x)\,\gamma_5.$$

Преобразование (27в) является, конечно, правильным условием для с.о. в теории Фейнмана, где спиноры Дирака квантуются по статистике Бозе *путем отказа от условия вещественности.* В этой теории ψ^* больше не является величиной эрмитово-сопряженной ψ, а представляет собой «самосопряженную» величину по отношению к индефинитной метрике в гильбертовом пространстве («отрицательные вероятности») [5]. Поэтому не будет противоречием, если принять $\psi' = \gamma_5\psi$ и $\psi'^* = -\psi^*\gamma_5$.

Эта математическая возможность не имеет, однако, связи с физикой, где существенно условие вещественности. Поэтому я предложил в 1940 г. [2] преобразование

$$u'(1,0) = iu(1,0), \quad v'(0,1) = -iv(0,1), \tag{30}$$

которое сохраняет неизменным условие вещественности в форме

$$v(0, 1) = (u(1,0))^*.$$

Это условие эквивалентно приведенной выше альтернативной возможности (27а):

$$\psi'(x) = i\gamma_5\psi(-x), \quad \bar{\psi}'(x) = i\bar{\psi}(-x)\,\gamma_5.$$

Полученное выражение непротиворечиво *только с точки зрения непрерывной группы* L_4 (даже без использования градиентной группы), так как при диагональной матрице γ_4 спиноры ψ и $\bar{\psi}$ преобразуются одним и тем же способом [21].

Надлежащим обобщением (30), очевидно, является

$$\begin{aligned} u'(n, m) &= (-i)(-1)^n u(n, m) = i(-1)^m u(n, m) \\ &\qquad \text{при } n+m \text{ нечетном}, \\ u'(n, m) &= (-1)^n u(n, m) = (-1)^m u(n, m) \\ &\qquad \text{при } n+m \text{ четном}. \end{aligned} \tag{31}$$

Преобразование (31) согласуется с общим условием вещественности

которые имеют вид (29). Вещественные инварианты $\bar{\psi}\psi$ и $(-i)(\bar{\psi}\gamma_5\psi)$ являются в этом случае удвоенными вещественной и мнимой частями выражения

$$\bar{u}_1(v^1)^* + u_2(v^2)^* = u_1\overset{*}{v_{\dot 2}} - u_2\overset{*}{v_{\dot 1}}.$$

Вторая форма получается по правилу (R) путем поднятия спинорных индексов. Поскольку $\overset{*}{v_{\dot 1}}$, $\overset{*}{v_{\dot 2}}$ преобразуются как v_1, v_2, инвариантность последнего выражения очевидна.

[21] По отношению к L_4 величина $\bar{\psi}$ преобразуется как $\psi\Omega\gamma_5 = \psi C$, где матрица Ω определена в формуле (14); ср. [1].

(29). Первая строка следует из (30) для всех преобразований, которые зависят только от класса величин, а вторая необходима для с.о., поскольку векторы должны менять свой знак, в то время как скаляры остаются инвариантными.

Для произведения произвольного числа множителей с четной суммой $n + m$, которые мы можем назвать бозонными полями в отличие от фермионных полей с нечетной суммой $n + m$, никаких трудностей не возникает. Не возникает также ничего нового для произведений произвольного числа бозонных полей на *одно* фермионное. Это приводит к возможности использования также *производных конечного порядка от полей по координатам*, поскольку формально они принадлежат классу с четным $n + m$.

Однако *закон преобразования* (31), *вообще говоря, не сохраняется для произведений двух или больше сомножителей из класса с нечетной суммой $n + m$ (фермионов)*. Рассмотрим произведение N фермионных множителей, соответствующих символам

$$(n_k,\ m_k), \quad \text{где} \quad k = 1, \ldots, N.$$

Если положить

$$n = \sum_{k=1}^{N} n_k, \qquad m = \sum_{k=1}^{N} m_k,$$

то мы должны сравнивать $(-i)^N\,(-1)^n$ с $(-i)\,(-1)^n$ при N нечетных или же с $(-1)^n$ при N четных.

Это приводит к дополнительному множителю

$$\begin{aligned} &(-i)^{N-1} \ \text{для } N \text{ нечетных},\\ &(-i)^{N} \quad\ \text{для } N \text{ четных}. \end{aligned}$$

Введем новое целое число ν. Тогда дополнительный множитель можно записать также в виде:

$$(-i)^{2\nu} = (-1)^{\nu} \begin{cases} \text{если } N \text{ нечетное, то} \quad N = 2\nu + 1,\\ \text{если } N \text{ четное, то} \quad N = 2\nu. \end{cases} \tag{32}$$

Чтобы устранить этот дополнительный множитель, нужно использовать *вторичное квантование при помощи антикоммутаторов для фермионов* [22] *и коммутаторов для бозонов*. Это позволяет нам прежде всего принять, что *все произведения величин поля должны быть антисимметризованы по всем перестановкам фермионных полей и симметризованы по всем возможным положениям бозонных полей* [23] (упорядочение произведений).

Следовательно, мы должны применить в случае сильного отражения *инверсию* всех произведений (читать их справа налево, а не слева направо) в дополнение к преобразованию (31) для исходных величин поля.

---

[22] Здесь учитывается, что кинематически-независимые фермионные поля также антикоммутируют.

[23] Ср. правило Людерса [13], которое цитировалось в § 1.

Докажем теперь лемму:

Если преобразование (31) *применено к исходным величинам поля, то оно справедливо и после инверсии ко всем величинам, ковариантным по отношению к непрерывной группе L_4, которые построены из упорядоченных произведений исходных величин поля и их производных конечного порядка* [24]. Для доказательства леммы заметим просто, что знак, определенный формулой (32), является также характером [25] перестановки

$$(1,2,\ldots, N) \to (N, N-1,\ldots,2,1)$$

и что инверсия умножает любое произведение на этот характер (бозоны здесь не играют роли). Поэтому лишний множитель (32) в точности компенсируется характером инверсии.

Лемма достаточна, чтобы обеспечить существование с.о. во всех инвариантных относительно L_4 локальных теориях поля, где надлежащим образом произведен учет упорядочения произведений, поскольку любое ковариантное по отношению к группе L_4 уравнение поля полагает величину определенного тензорного или спинорного характера равной нулю и поскольку инвариантность всех скаляров по отношению к с.о., согласно (31), распространяется только на произвольные функции от скаляров.

Рассуждения этого параграфа можно обобщить в двух отношениях. Во-первых, можно рассмотреть также неприводимое бесконечномерное представление L_4 Вигнера, отвечающее нулевой массе покоя, где вводится непрерывная переменная вместо спинорного индекса. Мы не будем обсуждать этот вопрос, поскольку это представление, по-видимому, не имеет никакой связи с физикой.

Во вторых, можно было бы исследовать распространение этих соображений на нелокальные теории. Поскольку форм-факторы обычно не рассматриваются как новые поля, а предполагаются скалярами, то здесь необходимо дополнительное предположение об инвариантности форм-фактора по отношению к изменению знака всех координат.

Я благодарен Йосту и Людерсу за интересные дискуссии относительно общности «сильного отражения» и Гелл-Манну за интересные сведения об общем подходе группы сотрудников Принстонского университета к проблемам отражений. Обсуждение последних вопросов происходило во время моего пребывания во французской летней школе теоретической физики в Лезуш летом 1952 г.

---

[24] Не является необходимым, чтобы исходные величины поля или построенные окончательно величины принадлежали к *неприводимому* представлению L_4. Достаточно, чтобы они принадлежали к одному из четырех возможных *классов*.

[25] Под характером перестановки понимается, как обычно, знак плюс или минус в соответствии с тем, четна перестановка или нечетна. Знак, определяемый формулой (32), можно записать также в виде $(-1)^{N(N-1)/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Pauli.* Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, 6, 137. (Русск. пер. см. с. 244.— *Ред.*).
2. *W. Pauli.* Phys. Rev., 1940, 58, 716. (Русск. пер. см. с. 354.— *Ред.*).
3. *W. Pauli.* Rev. Mod. Phys., 1941, **13**, 203. (Русск. пер. см. с. 372.— *Ред.*).
4. *W. Pauli, F. Belinfante.* Physica, 1940, **7**, 177. (Русск. пер. см. с. 339.— *Ред.*).
5. *W. Pauli.* Progr. Theor. Phys., 1950, 5, 526. (Русск. пер. см. с. 602.— *Ред.*).
6. *G. Källen.* Helv. phys. acta, 1952, **25**, 417.
7. *T. D. Lee.* Phys. Rev., 1954, 95, 1329.
8. *W. Heisenberg.* Z. Phys., 1934, **90**, 209; **92**, 692.
9. *J. Schwinger.* Phys. Rev., 1951, 82, 914. (Русск. пер. см. В кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики. М., ИЛ, 1954.— *Ред.*).
10. *E. Wigner.* Göttingen Nachr. (Math. Naturwiss. Klasse), 1932, S. 546.
11. *T. Newton, E. Wigner.* Rev. Mod. Phys., 1949, **21**, 400.
12. *S. Watanabe.* Phys. Rev., 1951, 84, 1008.
13. *G. Lüders.* Kgl. Danske vidselskab Mat.-fys. medd., 1954, **28**, N 5.
14. *G. Lüders, R. Oehme, W. Thirring.* Z. Naturforsch., 1952, **7a**, 213.
15. *A. Pais, R. Jost.* Phys. Rev., 1952, 87, 871.
16. *G. Lüders.* Z. Phys., 1952, **133**, 325.
17. *L. Biedenharn, M. Rose.* Phys. Rev., 1951, **83**, 459.
18. *H. Tolhoek, S. de Groot.* Phys. Rev., 1951, **84**, 151.
19. *L. Eisenbud, E. Wigner.* Proc. Nat. Acad. USA, 1941, **27**, 281.
20. *L. Michel.* Nuovo cimento, 1953, **10**, 319.
21. *H. Umezava, S. Kamefuchi, S. Tanaka.* Progr. Theor. Phys., 1954, **12**, 383

1957

О СОХРАНЕНИИ ЛЕПТОННОГО ЗАРЯДА *

Показано, что закон сохранения легких частиц («лептонного заряда») не зависит от других свойств инвариантности теории слабых взаимодействий, в том числе двухкомпонентной теории нейтрино. Используя свойства инвариантности элементов S-матрицы по отношению к каноническим преобразованиям, сохраняющим начальное и конечное состояния, найдены те выражения второго порядка по константе связи, которые только и могут войти в матричные элементы процесса двойного испускания негатона, процесса, нарушающего закон сохранения. Двухкомпонентная теория нейтрино тем самым представляет собой частный случай.

1. Рассматриваемый закон сохранения часто называют неточно «законом сохранения легких частиц». С другой стороны, понятие лептонного заряда указывает на тот факт, что величина, сохраняющаяся в соответствии с этим законом, есть сумма членов, имеющих и положительные и отрицательные знаки, приписываемые различным видам легких частиц, участвующих в рассматриваемом процессе. Лептонный заряд не совпадает с электромагнитным зарядом, но связан с ним, поскольку легкие фермионы с противоположным электрическим зарядом всегда имеют отличные от нуля лептонные заряды, по знаку также противоположные. Для каждого электрически заряженного легкого фермиона должен быть особо исследован вопрос о том, будут ли знаки лептонного и электрического зарядов одноименными или противоположными (причем общий знаковый множитель для всех лептонных зарядов остается условным).

В предположении, что такой закон сохранения существует, указанное выше понятие пытаются применять к нейтрино, приписывая нейтрино, испускаемым вместе с негатонами, лептонный заряд, по знаку противоположный заряду нейтрино, испускаемым вместе с позитонами (например, —1 и +1, так что негатоны и позитоны получают лептонный заряд + 1 и —1 соответственно). Этот закон сохранения имеет важное следствие, что двойные процессы, в которых в начальном состоянии отсутствуют и электрон и нейтрино, а в конечном состоянии образуются два негатона без нейтрино, должны быть строго запрещены.

Поиски такого двойного процесса предпринимались, например, Дэвисом [1], в опытах которого первая стадия заключалась в испускании нейтрино и негатона при β-распаде в ядерном реакторе, а вторая стадия — в поглощении того же самого нейтрино вместе с испусканием второго негатона в реакции $^{37}\mathrm{Cl} + \nu \rightarrow {}^{37}\mathrm{Ar} + e^-$. В действительности эта реакция не

---

* *On the conservation of the lepton charge.*— Nuovo cimento, 1957, **6**, 204—215.

[1] *R. Davis.* Phys. Rev., 1955, **97**, 766; Bulletin of the Washington Meeting, 1956, p. 219.

была обнаружена, и ее эффективное сечение оказалось меньше $^1/_3$ теоретически максимального (равного сумме квадратов модулей всех констант связи). Мы уже отмечали здесь, что хорошо известное совпадение этого теоретически максимального значения с сечением для майорановского нейтрино справедливо только при взаимодействии, сохраняющем четность. Никогда еще не был обнаружен и так называемый двойной β-распад без испускания нейтрино, тоже запрещенный законом сохранения лептонного заряда.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы привлечь внимание к теоретической возможности смешанных взаимодействий, когда определение «нейтрино» и «антинейтрино» оказывается неоднозначным, так что сечение двойных процессов может иметь *любое значение между нулем и теоретическим максимумом*. Поэтому прямая проверка закона сохранения, который не запрещает рассматриваемому сечению обращаться в нуль, должна быть довольно трудной экспериментальной проблемой, в отличие от простого выбора между двумя дискретными значениями: нулем и максимумом. В этом отношении теоретическая ситуация одинакова как для взаимодействия, сохраняющего четность, так и для не сохраняющего четность; в последнем случае это справедливо и для двухкомпонентной теории.

Косвенная проверка закона сохранения лептонного заряда была бы возможна в случае распада μ-мезона, если бы двухкомпонентная теория могла быть подтверждена экспериментально. Тогда закон сохранения исключал бы примесь случая, в котором параметр Мишеля равен 0, к простому случаю, в котором параметр Мишеля равен $^3/_4$. Ниже мы иллюстрируем наше утверждение в более сложном случае β-распада нуклона.

2. Пусть $\psi^c = C^{-1}\bar{\psi}$, где $\bar{\psi} = \psi^*\gamma_4$, будет зарядово-сопряженное решение уравнения Дирака, причем $\bar{\gamma}_\mu^T = -C\gamma_\mu C^{-1}$, так что $\psi^c = -\psi C$ [2]. Мы обсудим здесь плотность энергии смешанного взаимодействия, которую запишем в виде

$$H_{\text{вз}} = \sum_{i\,1}^{5} (\bar{\psi}_n O_i \psi_p)\,[g_{\text{I},i}(\bar{\psi}_\nu O_i \psi_e) - f_{\text{I},i}(\bar{\psi}_\nu \gamma_5 O_i \psi_e) + g_{\text{II},i}(\psi_\nu C O_i \psi_e) + f_{\text{II},i}(\psi_\nu C \gamma_5 O_i \psi_e)] + \text{эрмит.-сопр.} \qquad (1)$$

Здесь n, p, ν, e обозначают соответственно нейтрон, протон, нейтрино и электрон, функции ψ_p и ψ_e относятся к испусканию протона и негатона или к поглощению антипротона и позитона. Матричные элементы, квадраты модуля которых определяют двойные процессы с испусканием двух негатонов, имеют форму полиномов второй степени по отношению к константам связи, не содержащих явно комплексно-сопряженных констант связи. Символ O соответствует пяти известным возможным видам взаимодей-

[2] В соответствующем уравнении на с. 46 моей статьи в книге «Niels Bohr and the development of physics» (London, 1955), к сожалению, допущена ошибка в знаке. (В русском переводе статьи в кн.: Нильс Бор и развитие физики. М., ИЛ, 1958, с. 67, она исправлена.— *Ред.*).

ствия: скалярному, псевдоскалярному, векторному, псевдовекторному и тензорному, различающимся индексом i или j, который принимает пять значений.

Не приводя здесь в явной форме выражений для матричных элементов рассматриваемых двойных процессов [3], ограничимся доказательством того, что в важном случае *нулевой массы покоя нейтрино* ($m_\nu = 0$) теория значительно упрощается, так как упомянутые матричные элементы могут зависеть только от определенных комбинаций констант связи. Действительно, существует каноническое преобразование

$$\begin{aligned} \psi' &= a\psi + b\gamma_5\psi^c = a\psi + b\gamma_5 C^{-1}\bar{\psi}, \\ \bar{\psi}' &= a^*\bar{\psi} - b^*(\bar{\psi}^c)\gamma_5 = a^*\bar{\psi} + b^*\psi C\gamma_5 \end{aligned} \qquad (\mathrm{I})$$

и обратное преобразование

$$\begin{aligned} \psi &= a^*\psi' - b\gamma_5 C^{-1}\bar{\psi}', \\ \bar{\psi} &= a\bar{\psi}' - b^*\psi' C\gamma_5. \end{aligned} \qquad (\mathrm{I}')$$

Здесь c-числа a, b должны удовлетворять простому условию

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \qquad (2)$$

Канонический характер (инвариантность антикоммутаторов) этого преобразования существенно определяется множителем γ_5. Этот множитель приводит к следствию, что в гамильтониане свободных частиц (представленном, как обычно, в виде суммы коммутаторов) член, содержащий массу покоя, будет неинвариантен относительно преобразования (I), в то время как другие члены остаются при этом инвариантными. Поэтому мы будем применять канонические преобразования, зависящие от γ_5 явно, только к нейтринному полю ψ_ν, для которого предполагается $m_\nu = 0$.

Другое простое каноническое преобразование, часто применяемое в литературе, имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi' &= \exp[i\alpha\gamma_5]\,\psi = (\cos\alpha + i\,\gamma_5 \sin\alpha)\,\psi, \\ \bar{\psi}' &= \bar{\psi}\exp[i\alpha\gamma_5] = \bar{\psi}\,(\cos\alpha + i\gamma_5\sin\alpha). \end{aligned} \qquad (\mathrm{II})$$

Преобразования (I) и (II), коммутирующие друг с другом, при объединении дают более общее линейное каноническое преобразование вида

$$\psi' = a_1\psi + b_1\gamma_5 C^{-1}\bar{\psi} + a_2\gamma_5\psi + b_2 C^{-1}\bar{\psi}. \qquad (3)$$

Вследствие того что матрицы $\gamma_5 C^{-1}$ и $C\gamma_5$ антисимметричны (так как $\gamma_5^T = + C\gamma_5 C^{-1}$, $C^T = - C$), а $\gamma_4 C^{-1}$ и $C\gamma_4$ — симметричны, условия, определяющие канонический характер преобразования (3), принимают простую

[3] Они содержатся в работе Энца (*C. Enz.* Nuovo cimento, 1957, 6, 250).

форму [4]:

$$a_1 a_1^* + b_1 b_1^* + a_2 a_2^* + b_2 b_2^* = 1,$$
$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0,$$
$$a_1 a_2^* + b_1 b_2^* + a_2 a_1^* + b_2 b_1^* = 0.$$

Они имеют общее решение, соответствующее комбинации (I) и (II):

$$a_1 = \cos\alpha\cdot a, \quad b_1 = \cos\alpha\cdot b, \quad a_2 = i\sin\alpha\cdot a, \quad b_2 = i\sin\alpha\cdot b, \tag{4}$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{2}$$

В случае нейтрино с нулевой массой покоя преобразования (I) и (II) эквивалентны очень простым линейным преобразованиям констант связи, а именно для (I):

$$g'_{\text{I},i} = a g_{\text{I},i} + b f_{\text{II},i}, \qquad g'_{\text{II},i} = a^* g_{\text{II},i} + b^* f_{\text{I},i},$$
$$f'_{\text{I},i} = -b^* g_{\text{I},i} + a^* f_{\text{II},i} \qquad f'_{\text{I},i} = -b g_{\text{II},i} + a f_{\text{I},i}. \tag{Ia}$$

Это значит, что константы g_{I}, f_{II} *преобразуются по унитарному преобразованию с определителем* 1, *а* g_{II}, f_{I} *преобразуются как* g_{I}^{*}, f_{II}^{*} *или же как* f_{II}, — g_{I}.

Преобразование (II) также эквивалентно линейному преобразованию констант связи, а именно:

$$g'_{\text{I},i} = g_{\text{I},i}\cos\alpha + f_{\text{I},i}\, i\sin\alpha, \qquad g'_{\text{II},i} = g_{\text{II},i}\cos\alpha - f_{\text{II},i}\, i\sin\alpha,$$
$$f'_{\text{I},i} = g_{\text{I},i}\, i\sin\alpha + f_{\text{I},i}\cos\alpha, \qquad f'_{\text{II},i} = -g_{\text{II},i}\, i\sin\alpha + f_{\text{II},i}\cos\alpha. \tag{IIa}$$

Здесь пары (g_{I}, f_{I}), (g_{II}, $-f_{\text{II}}$), (g_{I}^*, $-f_{\text{I}}^*$), (g_{II}^*, f_{II}^*) преобразуются одинаково.

Закон преобразования несколько упрощается для линейных комбинаций:

$$F_{1,i} = g_{\text{I},i} - f_{\text{I},i}, \qquad G_{1,i} = g_{\text{I},i} + f_{\text{I},i},$$
$$F_{2,i} = g_{\text{II},i} + f_{\text{II},i}, \qquad G_{2,i} = -g_{\text{II},i} + f_{\text{II},i}, \tag{5}$$

которые при преобразовании (I) преобразуются одинаковым образом, а именно

$$F'_{1,i} = aF_{1,i} + b\,F_{2,i}, \qquad G'_{1,i} = a\,G_{1,i} + b\,G_{2,i},$$
$$F'_{2,i} = -b^* F_{1,i} + a^* F_{2,i}, \qquad G'_{2,i} = -b^* G_{1,i} + a^* G_{2,i}. \tag{6}$$

В то же время при преобразовании (II) закон преобразования оказывается более простым:

$$F'_{1,i} = \exp[-i\alpha]\, F_{1,i}, \qquad G'_{1,i} = \exp[i\alpha]\, G_{1,i},$$
$$F'_{2,i} = \exp[-i\alpha]\, F_{2,i}; \qquad G'_{2,i} = \exp[i\alpha]\, G_{2,i}. \tag{7}$$

[4] Вычисление несколько упрощается в представлении Майораны, где $C = \gamma_4$, а γ_4, γ_5 — антисимметричные, чисто мнимые матрицы.

Объединенные преобразования (I) и (II) содержат в качестве частного случая преобразование $\psi'_\nu = \gamma_5\psi_\nu$, которое при нашем выборе знака f_1 в формуле (1) просто переставляет местами все f с соответствующими g и, наоборот, так что вычисляемые ниже инварианты будут симметричными относительно f и g.

Физический смысл преобразований (I), (II) заключается в принципе, согласно которому — даже если гамильтониан не инвариантен по отношению к ним — *элементы S-матрицы всех процессов также должны оставаться инвариантными (с точностью до произвольного фазового множителя), если начальные и конечные состояния инвариантны*[5]. *В этом случае они могут зависеть только от инвариантных форм констант связи.* Такое условие выполняется, в частности, для двойных процессов с испусканием двух негатонов при отсутствии нейтрино в начальных и конечных состояниях. Эти процессы нарушали бы закон сохранения лептонного заряда. Матричные элементы для этих процессов не содержат в явной форме комплексно-сопряженных констант связи в отличие от других процессов с инвариантными начальными и конечными состояниями. Действительно, такая инвариантность справедлива для всех состояний, в определение которых не входит явно различие между нейтрино и антинейтрино.

3. Для того чтобы получить инварианты второй степени по отношению к константам f и g или F и G, рассмотрим сначала случай только одного-единственного оператора O, когда индекс i можно опустить.

Из формул (5) и (6) сразу получаются инварианты

$$F_1F_1^* + F_2F_2^*, \qquad G_1G_1^* + G_2G_2^* \tag{8}$$

и

$$F_1G_2 - F_2G_1. \tag{9}$$

Эти инварианты уже характеризуют линейную группу четырех комплексных переменных (F_1, F_2; G_1, G_2) полностью. Действительно, наиболее общее преобразование, оставляющее инвариантными выражения (8) и (9), состоит в комбинации формул (6) и (7), которую мы запишем в матричной форме (соответствующей четырем вещественным параметрам):

$$\begin{aligned} (F'_1, F'_2) &= (F_1, F_2)\exp[-i\alpha]\cdot\begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}, \\ (G'_1, G'_2) &= (G_1, G_2)\exp[+i\alpha]\cdot\begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

Для доказательства сначала заметим, что единственными преобразованиями (по предположению не содержащими явно комплексно-сопряженных переменных), которые

[5] Этот же принцип был применен также Парси независимо от автора в работе «Свойства инвариантности взаимодействий Ферми» (*D. L. Pursey*. Nuovo cimento, 1957, 6, 266). Парси рассматривает только взаимодействия, сохраняющие лептонный заряд, и потому лишь преобразование (II) (дополненное умножением функций ψ на произвольный фазовый множитель). Я обязан д-ру Парси за ознакомление с его статьей до ее публикации.

оставляют выражения (8) инвариантными, являются раздельные унитарные преобразования переменных F и G, в матричной записи имеющие вид:

$$\begin{aligned} (F_1', F_2') &= (F_1, F_2) \exp[-i\alpha] \cdot \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}, \\ (G_1', G_2') &= (G_1, G_2) \exp[-i\beta] \cdot \begin{pmatrix} c & -d^* \\ d & c^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

При рассмотрении инварианта (9) полезно сначала исследовать частный случай, когда (F_1, F_2) остаются неизмененными. Очевидно, что единственное унитарное преобразование G, оставляющее (9) инвариантным,— это тождество. Но с помощью группового свойства унитарного преобразования общий случай может быть приведен к этому частному путем разложения (10) на два шага:

$$(F_1'', F_2'') = (F_1, F_2) \exp[-i\alpha] \cdot \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix},$$

$$(G_1'', G_2'') = (G_1, G_2) \exp[+i\alpha] \cdot \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}$$

и

$$(F_1', F_2') = (F_1'', F_2''),$$

$$(G_1', G_2') = (G_1'', G_2'') \exp[-i\beta'] \cdot \begin{pmatrix} c' & -d'^* \\ d' & c'^* \end{pmatrix}.$$

Последние величины определяются условием, требующим, чтобы при объединении двух шагов получалось (11):

$$\alpha - \beta' = -\beta, \qquad \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' & -d'^* \\ d' & c'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d^* \\ d & c^* \end{pmatrix}, \tag{12}$$

или

$$\beta' = \alpha + \beta, \qquad \begin{pmatrix} c' & -d'^* \\ d' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d^* \\ d & c^* \end{pmatrix}.$$

Но первый шаг, очевидно, оставляет форму (8) инвариантной, поскольку выражение для (G_1'', G_2'') также можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} G_2'' \\ -G_1'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ -b & a \end{pmatrix} \exp[i\alpha] \cdot \begin{pmatrix} G_2 \\ -G_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, второй шаг, при котором величины F не изменяются, также должен оставлять форму (8) инвариантной. Отсюда в соответствии с предыдущим результатом следует

$$\beta' = 0, \qquad \begin{pmatrix} c' & -d^* \\ d' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так что в соответствии с (11)

$$\beta = -\alpha, \quad \begin{pmatrix} c & -d^* \\ d & c^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}.$$

Мы пришли к преобразованиям (10), что и требовалось доказать.

Переходя теперь к общему случаю нескольких операторов O_i, различающихся индексом i, мы немедленно — например, подставляя вместо F и G произвольные линейные комбинации F_i и G_i соответственно и сравнивая коэффициенты — получаем из (8) и (9) инварианты:

$$F_{1i}F_{1j}^* + F_{2i}F_{2j}^*, \qquad G_{1i}G_{1j}^* + G_{2i}G_{2j}^*, \tag{8a}$$

$$F_{1i}G_{2j} - F_{2i}G_{1j}. \tag{9a}$$

Возвращаясь теперь к $f_{\mathrm{I}i}$, $f_{\mathrm{II}i}$ и $g_{\mathrm{I}i}$, $g_{\mathrm{II}i}$ с помощью (5), составляя сумму и разность в случае (8) и расщепляя (9) на части, симметричные и антисимметричные по i и j, получаем инварианты в окончательной форме:

$$K_{ij} = K_{ji}^* = g_{\mathrm{I}i}^* g_{\mathrm{I}j} + f_{\mathrm{I}i}^* f_{\mathrm{I}j} + g_{\mathrm{II}i}^* g_{\mathrm{II}j} + f_{\mathrm{II}i}^* f_{\mathrm{II}j}, \tag{13}$$

$$L_{ij} = L_{ji}^* = g_{\mathrm{I}i}^* f_{\mathrm{I}j} + f_{\mathrm{I}i}^* g_{\mathrm{I}j} - g_{\mathrm{II}i}^* f_{\mathrm{II}j} - f_{\mathrm{II}i}^* g_{\mathrm{II}j} \tag{14}$$

и

$$I_{ij} = I_{ji} = g_{\mathrm{I}i} g_{\mathrm{II}j} + g_{\mathrm{I}j} g_{\mathrm{II}i} + f_{\mathrm{I}i} f_{\mathrm{II}j} + f_{\mathrm{I}j} f_{\mathrm{II}i}, \tag{15}$$

$$J_{ij} = -J_{ji} = g_{\mathrm{I}i} f_{\mathrm{II}j} - g_{\mathrm{I}j} f_{\mathrm{II}i} + f_{\mathrm{I}i} g_{\mathrm{II}j} - f_{\mathrm{I}j} g_{\mathrm{II}i}. \tag{16}$$

Заметим, что для случая $i = j$ максимум $|I|^2$ с данным K, равный $^1/_4 K^2$, достигается при

$$|f_{\mathrm{I}}|^2 = |f_{\mathrm{II}}|^2, \qquad |g_{\mathrm{I}}|^2 = |g_{\mathrm{II}}|^2$$

и

$$\frac{f_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{II}}}{g_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{II}}} = \frac{|f_{\mathrm{I}}|^2}{|g_{\mathrm{I}}|^2} = \frac{|f_{\mathrm{II}}|^2}{|g_{\mathrm{II}}|^2}.$$

Теперь рассмотрим выражения, инвариантные с точностью до фазового множителя. Первое из них, обозначаемое M_{ij}, при преобразовании (10) преобразуется по формуле

$$M'_{ij} = M_{ij} \exp[-2i\alpha] \tag{17}$$

и имеет вид

$$M_{ij} = F_{1i}^* G_{1j} + F_{2i}^* G_{2j} = g_{\mathrm{I}i}^* g_{\mathrm{I}j} - f_{\mathrm{I}i}^* f_{\mathrm{I}j} - g_{\mathrm{II}i}^* g_{\mathrm{II}j} + f_{\mathrm{II}i}^* f_{\mathrm{II}j} + g_{\mathrm{I}i}^* f_{\mathrm{I}j} - f_{\mathrm{I}i}^* g_{\mathrm{I}j} + g_{\mathrm{II}i}^* f_{\mathrm{II}j} - f_{\mathrm{II}i}^* g_{\mathrm{II}j}. \tag{18}$$

Другие два, имеющие вид

$$N_{\mathrm{I},ij} = -N_{\mathrm{I},ji} = F_{1i}F_{2j} - F_{2i}F_{1j} = g_{\mathrm{I}i} g_{\mathrm{II}j} - g_{\mathrm{I}j} g_{\mathrm{II}i} - f_{\mathrm{I}i} f_{\mathrm{II}j} + f_{\mathrm{I}j} f_{\mathrm{II}i} + g_{\mathrm{I}i} f_{\mathrm{II}j} - g_{\mathrm{I}j} f_{\mathrm{II}i} - f_{\mathrm{I}i} g_{\mathrm{II}j} + f_{\mathrm{I}j} g_{\mathrm{II}i} \tag{18a}$$

и

$$N_{\mathrm{II},ij} = -N_{\mathrm{II},ji} = G_{1i}G_{2j} - G_{2i}G_{1j} = -g_{\mathrm{I}i} g_{\mathrm{II}j} + g_{\mathrm{I}j} g_{\mathrm{II}i} + f_{\mathrm{I}i} f_{\mathrm{II}j} - f_{\mathrm{I}j} f_{\mathrm{II}i} + g_{\mathrm{I}i} f_{\mathrm{II}j} - g_{\mathrm{I}j} f_{\mathrm{II}i} - f_{\mathrm{I}i} g_{\mathrm{II}j} + f_{\mathrm{I}j} g_{\mathrm{II}i}, \tag{18б}$$

преобразуются по формулам:

$$N'_{\mathrm{I},ij} = N_{\mathrm{I},ij} \exp[-2i\alpha]; \qquad N'_{\mathrm{II},ij} = N_{\mathrm{II},ij} \exp[+2i\alpha]. \tag{17a}$$

Применяя наш результат к двойным процессам испускания двух негатонов, особенно нас интересующим здесь, мы заключаем, что *элементы их S-матриц могут зависеть только от инвариантов* (15) *и* (16) [или же, может быть, только от (18а) либо (18б)].

С другой стороны, закон сохранения лептонного заряда требует, чтобы инварианты (15), (16) *и* (18а), (18б) *обращались в нуль*. В этом случае, применяя подходящее преобразование, (I) или (II), можно всегда прийти к нормальной форме $g_{\mathrm{II}i} = f_{\mathrm{II}i} = 0$, соответствующей группе калибровочных преобразований $\psi_\nu \to \psi_\nu e^{i\alpha}$, $\psi_e \to \psi_e e^{i\alpha}$. (Сначала можно положить $b = 0$, $a = e^{i\alpha}$, но фазовый сдвиг g_{I}, f_{I} можно заменить фазовым сдвигом ψ_e.)

Относительно четности мы сделаем краткое замечание: для сохранения четности достаточно условие, чтобы обращались в нуль или все f_{II}, g_{I}, или все f_{I}, g_{II}, или все f_{I}, f_{II}, или все g_{I}, g_{II}. Для сохранения четности необходимо, чтобы $L_{ij} = 0$[6].

4. Для обсуждения двухкомпонентной теории, не предполагающей справедливость закона сохранения лептонного заряда, удобно рассмотреть эту теорию в форме Майораны, характеризуемой условием вещественности [7]

$$\psi_\nu^c = C^{-1}\bar{\psi}_\nu = \psi_\nu. \tag{19}$$

Хотя в такой теории (при q-числовой форме коммутатора) вектор тока тождественно равен нулю, существует псевдовектор

$$J_\mu^{(\nu)} = -\frac{1}{2} i\bar{\psi}_\nu \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu. \tag{20}$$

В соответствии с (19) он уже имеет вид коммутатора и при нулевой массе нейтрино удовлетворяет уравнению непрерывности для свободного нейтрино. Если общий закон сохранения выполняется [8], то в частном случае $m_\nu = 0$ в теории Майораны все еще существует возможность определить

---

[6] Это условие согласуется с условием Парси (см. прим. 5) для частного случая $g_{\mathrm{II}} = f_{\mathrm{II}} = 0$, рассмотренного им.

[7] Эквивалентность обеих форм теории была показана Серпе (*J. Serpe*. Physica, 1952, 18, 295). Независимо от этой работы мое внимание к такой эквивалентности было привлечено проф. М. Фирцем, которому я весьма благодарен за это. Она была обнаружена также Макленнаном. Заметим, что так называемое пространственное отражение Майораны соответствует операции CP в обозначении Эме, Янга и Ли. Для диагональной матрицы γ_5 условие вещественности (11) принимает простой вид $\psi_3 = -\psi_2^*$, $\psi_4 = \psi_1^*$. Ср. также *K. M. Case*. Phys. Rev., 1957, **107**, 307.

[8] Оба допущения, о теории Майораны и о законе сохранения, вместе могут оправдываться только в том случае, если взаимодействие не сохраняет четность. Действительно, тогда полный ток, удовлетворяющий уравнению непрерывности, будет равен сумме псевдовектора для нейтрино и вектора для прочих легких частиц. Ср. *B. Touschek*. Nuovo cimento, 1957, 5, 1281.

«нейтрино» и «антинейтрино» с помощью четвертой компоненты псевдовектора $J_\mu^{(\nu)}$.

Решающее для нашей проблемы обстоятельство заключается в том, что условие вещественности (19) существенно ограничивает группу преобразований (I). Действительно, подставляя (19) в (I), получаем:

$$\psi' = (a + b\gamma_5)\psi, \quad \overline{\psi}' = \overline{\psi}(a^* - b^*\gamma_5).$$

Эти формулы выражают каноническое преобразование только в том случае, если $ab^* + a^*b = 0$ или если отношение a/b чисто мнимо. В этом случае старое условие (2) приводит, с точностью до произвольного общего фазового множителя $e^{i\beta}$, к преобразованию (II), причем

$$a = \cos\alpha, \quad b = i\sin\alpha \quad (\alpha \text{ — вещественно}). \tag{21}$$

Для дальнейшего достаточно и удобно (хотя и несущественно) нормировать фазовый множитель на единицу.

В силу условия Майораны (19) умножаемые на g_{II} и f_{II} члены в выражении (1) для энергии взаимодействия можно опустить, так что оно теперь приобретает вид

$$H_{\text{вз}} = \sum_{i=1}^{5} (\overline{\psi}_n O_i \psi_p)\,[g_i(\overline{\psi}_\nu O_i \psi_e) - f_i(\overline{\psi}_\nu \gamma_5 O_i \psi_e)] + \text{эрмит.-сопр.} \tag{22}$$

Рассматривая эквивалент преобразования (IIa), а именно:

$$\begin{aligned} g_i' &= g_i\cos\alpha + f_i\, i\sin\alpha, \\ f_i' &= g_i i\sin\alpha + f_i\cos\alpha, \end{aligned} \tag{IIIa}$$

и учитывая, что g_{II}, f_{II} преобразуются теперь аналогично $g_I, -f_I$, мы проверяем, с помощью подстановки последних формул вместо предыдущих в (15) и (16), инвариантность выражений

$$I_{ij} = I_{ji} = g_i g_j - f_i f_j \tag{23}$$

и

$$J_{ij} = -J_{ji} = f_i g_j - f_j g_i \tag{24}$$

по отношению к группе преобразований (II). Матричные элементы двойных процессов, нарушающих закон сохранения лептонного заряда, в двухкомпонентной теории могут зависеть только от этих комбинаций констант связи.

Если этот закон сохранения выполняется, то инварианты должны обращаться в нуль, что приводит к двум возможностям

$$g_i = f_i \quad \text{или} \quad g_i = -f_i \tag{25}$$

с тем же знаком для всех значений индекса i. В этом случае (IIIa) дает

$$g_i' = g_i \exp[i\alpha] \quad \text{или} \quad g_i' = g_i \exp[-i\alpha].$$

Но такое изменение констант связи опять сводится к изменению фазового множителя ψ_e, а именно:

$$\psi_e' = \psi_e \exp[-i\alpha] \text{ или } \psi_e' = \psi_e \exp[i\alpha]. \tag{26}$$

В результате, не считая

$$\psi_\nu = \exp[i\alpha\gamma_5]\,\psi_\nu,$$

мы получаем частный случай группы калибровочных преобразований, указанной для закона сохранения Тушеком [9].

Подставляя (25) в выражение для $H_{\text{вз}}$, мы получаем хорошо известный результат, что ψ_ν входит в гамильтониан только в комбинациях $\overline{\psi}_\nu\,(1-\gamma_5)$ и $(1+\gamma_5)\,\psi_\nu$ или $\overline{\psi}_\nu\,(1+\gamma_5)$ и $(1-\gamma_5)\,\psi_\nu$.

Но цель настоящей статьи заключалась в том, чтобы продемонстрировать независимость закона сохранения лептонного заряда во всех существующих теориях нейтрино, которая также требует независимых количественных методов проверки закона на опыте.

Поступила 14 мая 1957 г.

Цюрих,
Высшая техническая школа

[9] *B. Touschek.* Nuovo cimento, 1957, 5, 1281.

ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА С КОМПЛЕКСНЫМИ КОРНЯМИ *

Теперь я предлагаю перейти к индефинитной метрике и посвящаю ей свое первое небольшое сообщение на тему «Индефинитная метрика с комплексными корнями». Мы договорились с Глезером, что докладывать ее здесь буду я.

В своей статье, посвященной модели Ли, Гейзенберг [1] рассмотрел частный случай дипольных «призрачных» состояний и их физическую интерпретацию. Не исключена возможность, что уравнение для собственных значений V-частицы имеет два комплексно-сопряженных корня. «Призрачные» состояния отвечают частному случаю этой возможности, а именно тому случаю, когда два комплексно-сопряженных корня сливаются на вещественной оси.

Еще прошлой осенью я пришел к убеждению, что случай комплексных корней допускает столь же удовлетворительное рассмотрение, как и разобранный Гейзенбергом случай «призрачных» состояний, — по крайней мере, в секторе с одной лишь V- или одной N-частицей. Разумеется, унитарную S-матрицу нетрудно определить, если исходить из стационарного состояния и действовать только в подпространстве физических состояний с положительной нормой. Но мне хотелось бы сосредоточить внимание на возможности временно́го описания физических явлений, поскольку оно необходимо для понимания причинности. Эта проблема нетривиальна, так как в этом случае энергия системы может принимать и комплексные значения, вследствие чего появляются решения, которые экспоненциально возрастают при $t \to \pm\infty$, и возникает необходимость в исследовании этого предела.

Предположим, что у нас имеется самосопряженный гамильтониан $H = H^0 + V$, где V отвечает «рассеянию» составных частей системы, описываемой H^0. Пусть спектр H^0, кроме обычных собственных состояний $|n\rangle$ с положительной нормой:

$$H^0 | n\rangle = E_n | n\rangle, \quad \langle n | n\rangle = 0, \tag{1}$$

содержит пару «призрачных» состояний $|a\rangle$, $|b\rangle$ с комплексными энергиями:

$$H^0 | a\rangle = E_a | a\rangle,\ H^0 | b\rangle = E_b | b\rangle,\ E_b = E_a^*,$$
$$\langle a | a\rangle = \langle b | b\rangle = \langle a | n\rangle = \langle b | n\rangle = 0,$$
$$\langle a | b\rangle \neq 0, \quad \text{например,} \quad \langle a | b\rangle = 1. \tag{2}$$

---

* *The indefinite metric with complex roots.*— Proc. Ann. Intern. Conf. High Energy Phys. CERN. Geneva, 1958, p. 127, 128.

[1] *W. Heisenberg.* Nucl. Phys., 1957, 4, 532.

Равенство нулю нормы этих двух состояний следует из самосопряженности оператора H^0. Влияние взаимодействия U между двумя конечными временами $t' = -T$ и $t'' = +T$ описывают обычной матрицей $U(+T, -T)$, которая в представлении взаимодействия удовлетворяет уравнению

$$i \frac{d}{dt} U(t, -T) = V(t)\, U(t, -T) \tag{3}$$

с граничным условием $U(-T, -T) = 1$. Эта матрица псевдоунитарна (для конечных интервалов времени) в смысле индефинитной метрики, но матричные элементы $\langle a \mid U \mid n\rangle$ и $\langle b \mid U \mid n\rangle$, отвечающие переходам от обычных состояний к «призрачным», будут отличны от нуля.

Чтобы исправить это положение, воспользуемся следующей идеей. Определим физические состояния как

$$|f\rangle = |n\rangle + c_a |a\rangle \tag{4}$$

(состояния $\mid b\rangle$ сюда не входят). Тогда норма таких состояний всегда будет положительной, или, в более общем плане,

$$\langle f' | f\rangle = \langle n' | n\rangle.$$

Для матричных элементов таких наблюдаемых величин, как H^0, получим

$$\langle f' | H^0 | f\rangle = \langle n' | H^0 | n\rangle.$$

Чтобы по истечении периода времени $2T$ снова прийти к физическому состоянию, попытаемся определить число c_a, входящее в начальное состояние, так, что

$$U(T, -T)\,|f\rangle = |n_T\rangle + c_T\,|a\rangle \tag{5}$$

(т. е. без примеси состояния b). Тогда

$$\begin{gathered} \langle a | U | f\rangle \equiv \langle a | U | n\rangle + c_a \langle a | U | a\rangle = 0, \\ c_a = -\langle a | U | n\rangle / \langle a | U | a\rangle. \end{gathered} \tag{6}$$

Сказанное является непосредственным обобщением того, что было сделано Гейзенбергом в дипольном случае.

Представляет интерес вопрос о том, существует ли предел при $T \to \infty$. Я проверил, что дело обстоит именно так в первом порядке теории возмущений; прошлой осенью те же вычисления независимо проделал Челлен. Приведу результат

$$c_a = \frac{e^{i(E_a^* - E_n)T} - e^{-i(E_a^* - E_n)T}}{e^{i(E_a^* - E_a)T} - e^{-i(E_a^* - E_a)T}} \, \frac{E_a^* - E_a}{E_a^* - E_n} \, \frac{\langle a | V | h\rangle}{\langle a | V | a\rangle}, \tag{7}$$

который показывает, что c_a при $T \to \infty$ стремится к нулю, как $e^{-|\Gamma| T}$ (мы положили здесь $E_a = \varepsilon + i\Gamma$; ε, Γ — вещественны). Матричный элемент, отвечающий переходу между физическими состояниями, равен

$$\langle f' | U | f\rangle = \langle n' | U | n\rangle + c_a \langle n' | U | a\rangle; \tag{8}$$

если отбросить осциллирующий член (без особенности в знаменателе), возникающий из второго слагаемого в (8), что вполне допустимо, то он также будет стремиться к конечному пределу

$$\lim_{T\to\infty}\langle f'\,|\,U(T,-T)\,|\,f\rangle = -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(E_{n'}-E_n)t}dt\,\langle n'\,|\,V\,|\,n\rangle. \tag{9}$$

Я хотел бы обратить внимание на то, что мы можем произвольно выбирать, какое из «призрачных» состояний обозначить через $|\,a\rangle$, а какое — через $|\,b\rangle$. Если поменять их ролями, то выражение (7) в асимптотическом пределе при $T\to\infty$ изменит знак. Это означает, что матрица перехода между физическими состояниями для *конечных* времен *не инвариантна* относительно обращения времени и что унитарность в физическом подпространстве выполняется лишь асимптотически, при больших T.

Челлен заметил также, что нет абсолютно никакой необходимости строго фиксировать конечное время взаимодействия $t''=T$. Если вместо $U(T,-T)$ взять $U(T+\tau,\ -T)$, где число c_a было выбрано из условия при $t''=T$, а затем перейти к пределу при $T\to\infty$, в пределе ничего не изменится. Разумеется, этого и следовало ожидать.

Следовало бы также убедиться в том, что предложенный метод действует и в более высоких приближениях теории возмущений, но это пока еще не сделано.

Несколько дней назад я получил статью Асколи и Минарди, которые пришли к тем же выводам. Однако некоторые места в аргументации этих авторов требуют дополнительных пояснений.

Ясно, что предложенный метод применим и в том случае, когда вместо одной пары «призрачных» состояний имеется несколько таких пар: $|\,a_r\rangle$, $|\,b_r\rangle$ с $\langle a_r\,|\,a_s\rangle=\langle b_r\,|\,b_r\rangle=0$ и $\langle a_r\,|\,b_s\rangle=\delta_{rs}$. В этом случае вместо одного уравнения (6) для определения c_a мы будем иметь систему линейных уравнений

$$\langle a_r\,|\,U\,|\,n\rangle+\sum_s\langle a_r\,|\,U\,|\,a_s\rangle\,c_s=0 \tag{10}$$

(или систему интегральных уравнений в случае континуума). Вопросы, относящиеся к более тонким деталям, например о разрешимости таких уравнений, еще не решены.

Я хотел бы добавить, что Глезер и Фруассар (CERN) весьма остроумно построили релятивистски-ковариантные модели того же типа, что и рассмотренная нами. Они сообщили мне, что некоторые затруднения, возникающие в случае нескольких пар, удалось преодолеть. Думаю, что Гейзенбергу будет интересно узнать об этом.

Однако во всех этих моделях, если включено взаимодействие, спектр неизвестен. В частности, следовало бы посмотреть, могут ли возникнуть связанные состояния с вещественной энергией и отрицательной нормой.

Цюрих,
Высшая техническая школа

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПАУЛИ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Я. Смородинский

Работы Паули относятся ко многим разделам физики. Круг интересов его был очень широким. Однако главным направлением его научной деятельности была квантовая теория, где идеи Пуали оказались самыми плодотворными. Квантовая теория от создания основ квантовой механики, от первых лет ее развития до квантовой теории поля, была его родной стихией, где он, как искусный кормчий, умел прокладывать новые пути.

Вольфганг Эрнст Фридрих Паули родился 25 апреля 1900 г. в Вене. Последний год уходящего века был для физики особым. В физическом календаре он отмечен знаком постоянной Планка h. В декабре 1900 г. на заседании Общества немецких испытателей 42-летний профессор Макс Планк выдвинул гипотезу кванта. Понадобилось четверть века для того, чтобы физики поняли, как превратить ее в новую науку, настолько отличавшуюся от прежней, классической физики, что лишь считанные естествоиспытатели старшего поколения смогли с ней смириться. Лишь тем, кто «встретил» квант в детском возрасте или даже немного опоздал со своим рождением, суждено было понять, что за сила была заключена в странной гипотезе о характере излучения осциллятора. К 1925 г., году появления первой работы двадцатичетырехлетнего Гейзенберга, дети возмужали, и в их руках гипотеза превратилась в великую науку. Одним из главных участников событий, развернувшихся в 1925 г., стал ровесник кванта Паули.

Путь Паули в науку был последовательным и рациональным.

Родился он в семье естествоиспытателя. Его отец, Вольфганг Паули, был химиком, профессором медицинской школы Венского университета, а затем директором Института медицинской коллоидной химии. Имя Паули-старшего было хорошо известно в научных кругах, и молодой Вольфганг до тех пор, пока сам не стал профессором в Федеральной технической высшей школе в Цюрихе (1928 г.), ставил под своими работами подпись «В. Паули, мл.». Восемнадцати лет Паули окончил гимназию. К этому времени он уже стал самостоятельным естествоиспытателем. Осенью 1918 г. из Вены в журнал «Physicalische Zeitschrift» была направлена его первая работа об энергии гравитационного поля [1] [1].

Из возможных мест для дальнейшего образования Паули безошибочно выбирает Мюнхен. Он отправляется к Арнольду Зоммерфельду, за-

---

[1] Здесь и далее в квадратных скобках даны ссылки на работы, помещенные в библиографии научных трудов В. Паули (с. 681).

мечательному знатоку классической физики, виртуозно владевшему математическим аппаратом, и одному из тех немногих, кто смог начать развивать вместе с Бором и Эйнштейном нарождающуюся квантовую физику.

У Зоммерфельда Паули овладел искусством математики и развил свои врожденные способности к критическому анализу огромного количества порой противоречивых фактов, которые накапливались в физике. В 1919 г. Паули публикует еще две работы по теории относительности [2, 3], на этот раз посвященные теории Вейля.

Может показаться странным, что после этих трех работ активное вмешательство Паули в вопросы теории относительности прерывается надолго (до 1933 г.). Одну из причин можно понять, обратив внимание на последние слова работы по теории Вейля [3]: «Мы, кажется, находимся на неправильном пути, занимаясь теорией поля внутри электрона». Это замечание отражает новые интересы Паули, возникшие не без влияния его учителя. Другой причиной было неожиданное поручение, которое он получил от Зоммерфельда в 1920 г. В это время Феликс Клейн издавал «Энциклопедию математических наук». Он попросил Зоммерфельда написать для энциклопедии статью по теории относительности. Зоммерфельд поручил это сделать своему молодому ученику.

Паули изложил все, что знал по этому вопросу (а знал он практически все!) в большой статье [8], которая принесла ему широкую известность. В 1922 г., отмечая выход обзора Паули по теории относительности, Эйнштейн писал: «Тот, кто будет читать эту зрелую и тщательно продуманную работу, вряд ли поверит, что ее автору всего 21 год. Неизвестно, чему следует удивляться больше: глубокому психологическому пониманию хода развития идей, безупречности математических выводов, глубокому проникновению в физическую сущность явлений, способности ясно и систематически излагать предмет, эрудиции, полноте изложения, уверенности критика» [2].

Немного можно указать в истории науки примеров столь раннего признания и столь могучей поддержки молодого таланта. Характеристика молодого ученого оказалась необычайно точной: к ней не надо ничего добавлять сейчас. Все, что сделал и о чем писал за свою жизнь Паули, подтверждает слова Эйнштейна.

В списке работ Паули находятся еще три работы по общей теории относительности. Две из них [43] содержат очень изящную формулировку теории уравнения Эйнштейна, Максвелла и Дирака в однородных пятимерных координатах. Это направление, однако, не получило развития. Третья работа была выполнена вместе с Эйнштейном в 1943 г. [65].

Последний раз он обратился к теории относительности в 1958 г. В новое английское издание своей «Теории относительности» Паули включает дополнения [109] [3]. Обзор Паули и сейчас остается одной из немногих книг, в которых изложена законченная картина физики того классичес-

[2] *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. 4. М., «Наука», 1967, с. 46.
[3] Перевод главных из них включен в книгу «Теоретическая физика XX века». М., ИЛ, 1962.

кого периода, когда многие еще считали, что в эту науку добавить почти ничего нельзя.

Как уже говорилось, с 1920 г. интересы Паули сосредоточились на атомах и их спектрах. Три работы [4, 6, 7] демонстрируют глубину интуиции и понимания молодого физика. В первой из этих работ исследован диамагнетизм одноатомного газа (диамагнетизм Ланжевена — Паули), во второй — парамагнитная восприимчивость. Работы по магнетизму изложены Паули в большом обзоре на VI Сольвеевском конгрессе [36].

Работы Паули по атомной теории многогранны и содержательны. Об их влиянии на развитие современной физики могут рассказать лишь те, кто вместе с ним прошел весь героический и трудный путь. К счастью, такой рассказ существует и переведен на русский язык. Это — сборник «Теоретическая физика XX века», который ученики и друзья Паули готовили к его 60-летию. Но Паули не дожил до своего юбилея. Он неожиданно заболел и через две недели, 15 декабря 1958 г., умер. Сборник оказался мемориальным.

Еще один сборник содержит много ярких воспоминаний о Паули [4]. Осенью 1972 г. в Триесте собрались физики всех поколений, чтобы отметить 70-летие П. А. М. Дирака. Почти все доклады, прочитанные на этой конференции, связаны с историей физики нашего века; среди них — доклад Ш. Энца, ученика Паули, специально посвященный его научной биографии. Много интересного о Паули можно узнать из докладов Ван-дер-Вардена, Гейзенберга, Венцеля и других. В дальнейшем мы ограничились лишь сравнительно кратким изложением событий, в значительной степени опирающимся на эти воспоминания [5].

Когда в 1925 г. появилась статья Гейзенберга [6] о квантовой механике, очень немногие физики были подготовлены к новому повороту событий. Среди них был Паули. К этому времени он уже опубликовал много работ по теории спектров и заканчивал большой обзор по старой квантовой теории [22] для «Hanbuch der Physik». Как и в случае теории относительности, он знал о всех трудностях интерпретации спектров и, как никто, понимал, что разобраться в спектрах нельзя, если ограничиться рамками классических аналогий.

Главной темой своих исследований Паули выбирает аномальный эффект Зеемана [12, 14, 19], который, как он ясно понимал (может быть, только он один), нельзя объяснить, не порвав с классическим мышлением. Наиболее важной явилась третья работа. В ней он отвергает возможность существования магнитного момента у замкнутой K-оболочки и приходит

[4] Доклады этой конференции изданы под редакцией Мехра (The Physicist's Conseption of Nature. D. Reidel Publ. Co., Doddrecht — Boston, 1973).

[5] Еще одна биография Паули, написанная М. Фирцем, была прислана нам и использована в настоящей статье. Известны также биографии Паули, написанные Р. Пайерлсом (Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, v. 5. London, 1959, p. 1975) и В. Тиррингом (Oesterreichs Nobelpreisträger. Wien — Stuttgart — Zürich, 1961, p. 147, 151). Много интересных деталей содержит книга: *W. Heisenberg*. Der Teil und das Ganze. München, 1969.

[6] *W. Heisenberg*. Z. Phys., 1925, 33. 879.

к заключению, что для объяснения спектров щелочных атомов необходимо предположить существование какой-то «квантовотеоретической двузначности» у свойств оптического электрона. Особенно непонятным представлялось существование триплетной и синглетной структур в спектрах щелочных атомов, которую также пытались объяснить свойствами атомного остатка. «Двузначность» Паули открывала новые возможности объяснения эффекта. От этого замечания ведет свою историю теория спина (работа представлена 2 декабря 1924 г.). Первый раз полуцелое квантовое число мы находим в работе Гейзенберга. Вслед за этими работами появились знаменитые публикации Уленбека и Гаудсмита [7]. Вся история подробно рассказана в статье Ван-дер-Вардена в сборнике «Теоретическая физика XX века» и самим Паули [74]. И в этой истории немалую роль сыграл его критический скептицизм. Паули отвергал классическую идею вращающегося электрона. В обзоре о квантовой теории строения атома [32] есть ссылка (на с. 1794), в которой он замечает, что скорость поверхности такого электрона должна была бы быть больше скорости света. Действительно, если радиус электрона принять равным e^2/mc^2, то для скорости получим $v \sim 70c$. Самой важной из работ этого периода была работа [19], в которой Паули сформулировал принцип запрета. На эту тему он много думал уже в студенческие годы в Мюнхене [71, 96]. Еще Ридберг заметил, что длины периодов в периодической системе элементов 2, 8, 18, 32, ...описываются формулой $2n^2$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), которую Зоммерфельд назвал кабалистической. История открытия принципа запрета (принципа Паули, как его называют физики) рассказана самим Паули в Нобелевской лекции [71]. Здесь мы подчеркнем лишь то, что Паули обладал способностью уходить от привычных концепций и строить свое мышление совершенно независимо от классических аналогий. Эта способность, лишь наметившаяся в истории с двузначностью электрона, ярко проявилась во всем его научном творчестве в дальнейшем.

К весне 1925 г. кризис в старой квантовой теории достиг своего апогея. Попытки справиться с трудностью ценой отказа от принципов сохранения, предпринятые Бором, Крамерсом, Слетером [8], оказались тщетными. Боте и Гейгер [9] красивыми опытами демонстрируют справедливость закона сохранения энергии для рассеяния света электроном. Бор в письме Резерфорду 18 апреля описывает трудности и жалуется, что чувствует себя несчастным. Это уже были последние недели кризиса.

Рождение квантовой механики было подобно фазовому переходу. К 1925 г. физика напоминала перегретую жидкость: нужен был небольшой толчок (но великая идея!). Такая идея пришла в голову Гейзенбергу во время прогулок по берегу Северного моря, на острове Гельголанд. Он

---

[7] *G. E. Uhlenbeck*, *S. Goudsmith.* Naturwissenschaften, 1925, 13, 953; Nature, 1926, **117**, 264.

[8] *N. Bohr*, *H. A. Kramers*, *T. C. Slater.* Philos. Mag., 1924, **47**, 785; Z. Phys., 1924, **24**, 69. (Русск. пер.: *Н. Бор.* Избранные научные труды, т. 1. М., «Наука», 1970, с. 526).

[9] *W. Bothe*, *H. Geiger.* Naturwissenschaften, 1925, **13**, 440; Z. Phys., 1925, **32**, 639.

сам рассказывал об этих днях (лучше всего в книге: «Der Teil und das Ganze», о которой уже была речь). История эта похожа на знаменитую легенду о Ньютоне и яблоке. Новая идея сводилась к тому, что классический набор частот в простом ряде Фурье надо заменить квадратной таблицей. Правила вычислений с таблицами были странными, но в них Борн сразу же узнал правила умножения матриц. Первая работа Гейзенберга была окончена в июне 1925 г. Вслед за ней появились статьи Борна, Иордана, Дирака [10]. В знаменитой «работе трех мужей»— Борна, Иордана, Гейзенберга (она поступила в редакцию 16 ноября 1925 г.) основной фундамент матричной механики был завершен.

Паули вступает в «квантовый клуб» чуть позже. Его работа об уровнях атома водорода появляется в 1926 г. [23]. К этому времени он был в Копенгагене, куда приехал осенью 1922 г. по приглашению Бора. Перед этим зиму 1921/22 г. Паули провел в Геттингене, работая ассистентом у М. Борна и еще один семестр в Гамбурге в качестве ассистента Ленца. Совместно с Борном Паули опубликовал работу по применению теории возмущений (известную в небесной механике) к задачам атомной физики [9]. Общение с Ленцем помогло ему в решении той задачи, которую поставил перед ним Гейзенберг. Исходным пунктом истории было письмо Гейзенберга к Паули от 24 июня 1925 г. В этом письме Гейзенберг писал, что ему удалось решить методами матричной механики задачу об энергии ангармонического осциллятора, но он терпит неудачу в попытках найти уровни водородного атома.

9 июля Гейзенберг посылает Паули законченную рукопись. Паули был полон энтузиазма: «Это как утренняя заря, в квантовой теории начинается рассвет», однако он сначала отнесся скептически к математическим сложностям, которыми сразу же стала обрастать теория. Оппозиция длилась недолго и окончилась естественным путем: Паули находит решение задачи об атоме водорода и сообщает об этом в начале ноября Гейзенбергу. 17 января 1926 г. работа была направлена в печать, 27 января Бор пишет Резерфорду, что исчезли причины, которые делали его несчастным прошлой весной.

Задача была не из легких, так как в матричной механике не было дифференциального уравнения для уровней и составление полной системы матричных равенств оказалось нетривиальным. Паули воспользовался тем, что в задаче Кеплера был известен еще со времен Лапласа один интеграл движения, отличный от момента количества движения L. Этот вектор был использован Ленцем в старой квантовой теории [11]. Сопоставляя двум интегралам движения две коммутирующие матрицы, можно было найти алгебраически их собственные значения, а затем и энергию, которая выражается просто через сумму квадратов обеих матриц. В даль-

[10] *M. Born*, *P. Jordan*. Z. Phys., 1925, **34**, 858; *P. A. M. Dirac*. Proc. Roy. Soc., 1925, **A109**, 642; *M. Born*, *W. Heisenberg*, *P. Jordan*. Z. Phys., 1926, **35**, 557. История также описана Мехра (*J. Mehra*. The Birth of Quantum Mechanics. CERN, 76-10, 14 May 1976).

[11] *W. Lenz*. Z. Phys., 1924, **24**, 197. Вектор Лапласа — Ленца имеет вид $(Ze^2)^{-1}(\mathbf{L}\times\mathbf{v}) - \mathbf{r}/r$.

нейшем В. А. Фок [12] обнаружил связь этих матриц с группой движения трехмерной сферы.

К концу 1925 г. в новой механике не хватало только уравнения, решение которого дало бы уровни энергии для любой системы и которое позволило бы решить задачу о рассеянии. Уравнения появились в начале 1926 г. в двух статьях Шредингера [13]: «Квантование как проблема собственных значений» (первая из них поступила в редакцию 27 января, вторая — 23 февраля 1926 г.). На первых порах никто не мог понять, существуют ли две разные теории — волновая и матричная — или эти теории эквивалентны. Шредингер показал их эквивалентность в работе, поступившей в редакцию 18 марта 1926 г. [14] Доказательство не было полным. Совсем недавно выяснилось, что 12 апреля того же года Паули послал Иордану письмо, в котором ясно доказал связь между матричными элементами и операторами волновой механики [15]. В этом же письме, основываясь на идее де Бройля, Паули выводит релятивистское волновое уравнение для частиц без спина [16].

В 1926 г. выходит из печати первый из обзоров Паули по квантовой теории [22], который он закончил в сентябре предыдущего года. Может быть, мир идей старой квантовой механики, в котором жил Паули, работая над обзором, тормозил процесс его перерождения. Только к ноябрю новая квантовая физика становится его родной стихией. Написанному обзору не суждено было разделить славу статьи по теории относительности в «Математической энциклопедии»: создание квантовой механики Гейзенбергом и Шредингером сделало ненужным хитроумные построения, основанные на постулатах Бора, и с легкостью ликвидировало многочисленные трудности, с большим искусством проанализированные Паули в этом обзоре. Но обзор Паули был все же последним актом, посвященным старой теории, и он сохранил свое значение как авторитетный источник сведений о самых последних днях догейзенберговской физики.

Со временем решение конкретных задач все меньше и меньше занимало Паули. Его мысли обращались к наиболее фундаментальным проблемам. И в волновой механике он нашел такую проблему. Это была теория релятивистских волновых полей.

В конце упомянутой работы трех авторов был намечен переход к «вторичному квантованию». В ней была рассмотрена задача о флуктуации

---

[12] *В. А. Фок.* Изв. АН СССР, серия техн., 1937, 169.

[13] *E. Schrödinger.* Ann. Phys., 1926, **79**, 361, 489. (Русск. пер. см. в кн.: Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1959).

[14] *E. Schrödinger.* Ann. Phys., 1926, **79**, 734.

[15] История с письмом Паули описана Ван-дер-Варденом в упоминавшемся сборнике триестских докладов (с. 276). Эквивалентность матричной и волновой механики была продемонстрирована также Эккартом (*C. Eckart.* Proc. Nat. Acad. Sci., 1926, **12**, 473).

[16] Это уравнение было получено независимо и другими авторами: *E. Schrödinger.* Ann. Phys., 1926, **81**, 129; *O. Klein.* Z. Phys., 1926, **37**, 895; *W. Gordon.* Z. Phys., 1926, **40**, 117; *V. Fock.* Z. Phys., 1926, **38**, 242; **39**, 226; *H. van Dungen, Th. de Donder.* C. R. Acad. sci. Paris, 1926, **183**, 22; *J. Kudar.* Ann. Phys., 1926, **81**, 632.

энергии электромагнитного поля, при решении которой была использована идея Иордана (намеченная в работе Борна и Иордана, см. прим. 10) о замене векторов электромагнитного поля операторами. Дирак [17] вслед за этим показал, как можно описывать взаимодействие частиц с полем, не прибегая к принципу соответствия Бора.

Паули вместе с Иорданом [30] начинает разрабатывать последовательную теорию релятивистских полей. В этой работе строится квантовая электродинамика свободного поля и устанавливаются перестановочные соотношения. Здесь же впервые появляются релятивистские сингулярные функции.

Вслед за этим выходят две фундаментальные работы (совместно с Гейзенбергом) [33, 34], в которых содержится практически в завершенном виде квантовая электродинамика. В течение долгих лет, вплоть до появления теории перенормировок, форма электродинамики, описанная в этих работах, почти не изменялась. Лишь статья Ферми [18], появившаяся через 5 лет, могла соперничать с ними.

В 1933 г. выходит фундаментальный обзор В. Паули «Общие принципы квантовой механики» в новом издании «Handbuch der Physik» [39]. До сих пор он сохранил свое значение классического представления квантовой механики, основанной на уравнениях Шредингера и Дирака. В характерном для Паули стиле «Общие принципы» содержат почти все, что можно сказать о главных идеях, которые лежат в основе квантовой механики. В этом обзоре современный читатель, как нигде в другом месте, может почувствовать степень завершенности этой науки. В наше время, время увлечения практическими задачами, особенно полезно вновь возвращаться к истокам науки; это должно помочь ее новому развитию. После обзора Паули было написано много книг по квантовой механике, но ни одна из них его не заменит.

Прошло лишь четыре года с рождения квантовой механики, и ее идеи уже охватили практически всю физику.

Из работ этого времени можно еще раз упомянуть доклад Паули на VI Сольвеевском конгрессе [36], в котором изложены применения квантовой механики к магнетизму. В докладе изложены к тому времени еще не опубликованная теория диамагнетизма Ландау и, конечно, теория парамагнетизма Паули.

Вместе с развитием, так сказать, физической квантовой механики создается и ее математический аппарат. Гильбертово пространство, представления конечных и непрерывных групп оказываются тем новым языком, который стал сейчас обычным в физике. Фон Нейман, Вейль, Вигнер создали мощный аппарат, который позволил просто излагать то, что представлялось неимоверно сложным на классическом языке XIX в. Эта революция в языке равна по силе появлению языка исчисления бесконечно малых во времена Ньютона.

---

[17] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc., 1927, **A114**, 243, 710.

[18] *E. Fermi.* Rev. Mod. Phys., 1932, 4, 87. (Русск. пер. см.: *Э. Ферми.* Научные труды, т. 1. М., «Наука», 1971, с. 375).

Паули и здесь внес свой вклад. Ему принадлежит введение в физику алгебры двумерных матриц для описания спина [26]. Он же подробно исследует алгебру матриц Дирака [46, 50]. Хотя эти работы могут показаться сейчас формальными и даже несколько элементарными, они открывали новое направление исследований различных алгебр, столь характерных для современной теории элементарных частиц.

Этими работами заканчивается период, о котором можно говорить как о периоде становления квантовой механики. Начинается развитие теории элементарных частиц, которое полностью увлекает Паули. Можно еще только отметить его работу (совместно с Фирцем) 1957 г. по H-теореме в квантовой механике [51] (ср. более раннюю работу [29]), которой завершается вклад Паули в статистическую физику.

Новый период в творчестве Паули начинается в 1939 г. работами о волновых уравнениях для частиц со спином, отличным от 0 и $^1/_2$ [56, 57]. Вопрос, на первых порах чисто формальный, приводит к выяснению важных свойств волновых полей и к пониманию общих свойств спина.

Работы в этом направлении привели к открытию в 1940 г. одного из основных законов теории квантовых полей — связи статистики и спина [58, 59, 61]. Длинные и сложные исследования завершаются простой по форме теоремой. Как и в истории с принципом запрета, новая теорема не имеет корней в классической физике.

Годы войны Паули проводит в США. Здесь его интересы обращены к теории мезонных полей, к попыткам, захватившим физиков, построения новой теория ядерных сил по типу квантовой электродинамики [62—64, 70, 73].

Эта задача оказалась значительно труднее — до сих пор она не имеет решения. Однако Паули и здесь увидел глубокие и доступные исследованию области.

Развивая метод Дирака и Вентцеля (предельный λ-процесс), он приходит к исследованию общей теории регуляризации расходящихся выражений в квантовой теории поля. Влияние этой работы, написанной вместе с Вилларсом [80], на все дальнейшее развитие теории было очень большим.

Возвращаясь назад по времени, надо вспомнить еще и об истории нейтрино. Большая, может быть слишком большая, осторожность Паули привела к тому, что его идея о нейтрино осталась неопубликованной. О ней он сообщил в письме физикам и позже, на VII Сольвеевском конгрессе в 1933 г. Правда, авторитет Паули был столь велик, что честь теоретического открытия им нейтрино никогда не оспаривалась. История этого открытия опубликована и теперь известна всем [106].

История с нейтрино переплелась волею судеб с новой главой физики — открытием несохранения четности. Паули узнал о нем за несколько часов до начала своей лекции о нейтрино. Это открытие — одно из самых невероятных событий в физике. Сейчас даже трудно понять, почему столь единодушно все физики считали, что микромир должен быть зеркально-симметричным. В обзоре «Общие принципы волновой механики»

[39] [19] имеется все, что нужно для описания зеркально-асимметричного нейтрино. Но ни Вейль, открывший волновое уравнение для такой частицы еще в 1929 г., ни кто-либо из читавших обзор Паули не заметили в этом уравнении намека на реальную действительность. Открытие несохранения четности Ву, Янгом и Ли, а затем спиральности нейтрино Ландау и Саламом оказалось для всех неожиданным.

Паули был потрясен тем, что надо изменять свои представления о природе. 27 января 1957 г. он послал письмо Вайскопфу, в котором очень эмоционально описал свое состояние. Это малоизвестное письмо Паули очень точно отражает его отношение к физике, остроту его восприятия и яркий образный язык. Поэтому мы воспроизведем здесь это письмо полностью. Оно хорошо завершает описание жизненного пути замечательного физика [20]:

«Дорогой Вайскопф, наконец прошел первый шок и я могу собрать себя (zusammenzuklauben), как говорят здесь в Мюнхене.

Да, все выглядит весьма драматично. В понедельник 21-го в 8.15 вечера я предполагал выступить с лекцией «Старая и новая история нейтрино». Неожиданно в 5 вечера почта принесла мне три экспериментальные работы: Ву, Ледермана и Телегди. Мне их любезно прислал Телегди. В то же утро я получил две теоретические работы: одну — Янга, Ли и Эме, другую — Янга и Ли о двухкомпонентной спинорной теории. Эта последняя почти совпадала с работой Салама, которую я получил (в форме препринта) полтора-два месяца тому назад и о которой я упомянул в моем коротком письме к Вам. Знаете ли Вы об этой работе в США?) (В то же время пришло еще письмо от Вилларса с (заметкой из «Нью-Йорк Таймс».)

С чего же мне начать? Хорошо, что я не успел ни с кем заключить пари. Это окончилось бы тяжелыми денежными потерями (чего я не могу переносить); я успел сделать из себя дурака (что я, как мне кажется, могу перенести) только в письмах и в разговорах, но не в печатных изданиях. И все же другие имеют теперь право смеяться надо мной.

Меня шокировал *не тот* факт, что «Бог — левша», а то, что, *несмотря на это*, он показывает себя право-левосимметричным в *сильных* своих выражениях.

Короче говоря, реальная проблема состоит в том, почему *сильное* взаимодействие *право-левосимметрично*? Каким образом интенсивность взаимодействия *обусловливает возникновение* группы симметрии, инвариантности или законов сохранения. Я не знаю хорошего ответа, но надо иметь в виду, что прецедент существует: группа симметрии в пространстве изотопического спина, которой нет у электромагнитного поля. Но мы не понимаем, *почему* она вообще существует. Кажется, в этом есть какая-то аналогия.

На моей лекции я рассказывал, как Бор (Фарадеевская лекция 1932 г., Сольвеевский конгресс 1932 г.), мой главный оппонент по нейтрино, считал возможным нарушение закона сохранения энергии при бета-распаде (мы называем это теперь «слабым взаимодействием»), как его оппозиция слабела и он лишь говорил в самой общей форме, что надо «*ожидать сюрпризов*» не где-нибудь, а специально связанных с бета-распадом.

---

[19] *В. Паули.* Труды по квантовой теории. М., «Наука», 1975, с. 544. Примечание на с. 545 дано лишь во втором издании.

[20] Это письмо (написанное по-немецки) опубликовано в первом томе собрания научных трудов В. Паули: Collected Scientific Papers by W. Pauli. N. Y.—London — Sydney, Intersc. Publish., 1964.

После этого я сказал (неожиданно импровизируя), что в конце лекции я вернусь к сюрпризу, который профессор Бор здесь предвидел.

Он был неправ с несохранением энергии[21], но, кто знает, нет ли здесь какого-то препятствия новому принципу? Может быть, по этому принципу бета-взаимодействие *слишком сильно*, чтобы разрушить закон сохранения энергии; быть может, существует взаимодействие еще более слабое, для которого уже этот закон не работает (как этого Бор с самого начала хотел).

Такую ситуацию можно *приближенно* описать с помощью формализма квантовой механики (и квантования поля). Представим себе для этого в операторе Гамильтона член взаимодействия (с очень малым коэффициентом), который слабо зависит от времени, например, осциллирует; тогда мы и получим то, что хотим.

Нам, конечно, могут сказать: зависимость от времени есть *внешнее поле*, которое и поставляет (или отбирает) энергию. Тогда все вернется к исходному пункту. Но ведь тот же фокус можно сделать и с лево-правой симметрией. Возьмем формулу (23) на стр. 42 моей работы в сборнике, посвященном семидесятилетию Бора (кажется, эта работа стала сейчас весьма модной)[22]. Представим себе, что члены с $C_1, \ldots, C_5$ умножены на скалярное поле $\Phi(x)$, а члены с $C_6, \ldots, C_{10}$ — на псевдоскалярное поле $\hat{\Phi}(x)$. Для самого Бога, который может менять знак $\hat{\Phi}$, такая теория была бы, конечно, праволевосимметричной; но это не для нас, смертных, ничего не знающих о таких гипотетических новых полях, кроме того, что у нас на Земле они постоянны в пространстве и времени (однородные и статические) и что у нас нет никаких путей для их изменения. Это все высокая теория. Почему обязательно скалярное поле? Я не знаю, на самом деле рассматривал ли кто-нибудь лоренц-инвариантность *взаимодействия* (которая, конечно, есть для свободной частицы)? Почему не взять, например, векторное поле Φ_ν и псевдовекторное поле $_{\flat}\Phi_{[\varkappa\lambda\mu]}$, у которых 4- и соответственно [123]-компоненты много больше других? Как-то в 1936 г. я отметил (в не очень ясной форме), что константа Ферми может оказаться пропорциональной *корню квадратному из гравитационной постоянной*[23]. Не существует способа проверить эту гипотезу или опровергнуть. Тем не менее надо помнить, что, может быть, какое-то еще *неизвестное поле* и впутывается сюда. Тот факт, что здесь впутывается именно слабое взаимодействие, может иметь какие-то основания, связанные с непонятой еще физической природой этого поля. Вопросов много, ответов нет!»

Статья в сборнике, посвященном Бору, о которой пишет Паули, и на самом деле была очень популярной.

Многие физики замечали, что следствия, получаемые из инвариантности выражений относительно трех типов отражений — пространственного (P), временно́го (T) и зарядового (C),— не всегда бывают независимыми; однако связь между этими тремя операциями ускользала от всех. Паули (и одновременно Людерс) обнаружил эту связь и сформулировал ее в обычной для него лаконичной форме. Родилась CPT-теорема, одна из наиболее общих и глубоких теорем современной физики. Симметрии

[21] Он сдался лишь в 1932 г., в заметке в «Nature».
[22] См. с. 646.— *Ред.*
[23] В статье «Пространство, время и причинность в современной физике». См. *В. Паули.* Физические очерки, с. 7.

могут нарушаться: P и C при β-распадах и в распадах K-мезонов, T — в распадах K^0-мезонов. Третья симметрия должна нарушаться так, чтобы произведение всех трех операций CPT не изменило физически наблюдаемых величин. Поэтому, например, PC-симметрия — комбинированная четность — эквивалентна T-симметрии.

Этому закону подчиняется любая теория физических полей; нет никаких указаний, что она сколько-нибудь нарушается в природе. Справедливость CPT-теоремы связана с существованием античастиц.

Подобно принципу запрета, CPT-теорема не имеет классического аналога. Третий раз в своей жизни Паули обнаружил, следуя своей интуиции, чисто квантовый закон, который нельзя было предвидеть, рассуждая только по принципу соответствия, следуя классическим аналогиям.

Последние работы Паули продолжали развиваться все по тому же пути: симметрия в физике микромира, квантовые законы и новые квантовые числа. Квантовые числа для лептонов — лептонный заряд — было последним его увлечением.

Еще одна проблема занимала его всю жизнь — это проблема числа «137», знаменитой постоянной, введенной учителем Паули, Зоммерфельдом, постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137{,}0360\ldots$ Происхождение этой постоянной остается пока тайной. К ней он часто возвращался в своих статьях. По удивительному совпадению Паули провел свои последние дни в комнате с номером 137.

В средние века люди испытывали радость открытия в дальних путешествиях. В новое время великие открытия происходят вблизи от нас. Но и сейчас в науке нужны и те, кто строит корабли, и те, кто эти корабли искусно водит.

О научном наследии Паули, о его вкладе в теоретическую физику можно сказать словами португальского поэта:

В кормчем, суда стремящем, нет ни
лжеца, ни труса.
Верным путем ведет он в море потомков
Луса.
Стало дышаться легче, место нашлось
надежде.
Стал безопасным путь наш, полный
тревоги прежде [24].

[24] Эти строки португальский поэт Л. Камоэнс (1524—1580) посвятил лоцману Васко да Гама Ахмаду ибн Маджиду. Лус — легендарный король португальцев, друг Бахуса (см. *Т. А. Шумовский.* У моря арабистики. М., «Наука», 1975, с. 60).

ОСНОВНЫЕ ДАТЫ ЖИЗНИ ВОЛЬФГАНГА ЭРНСТА ФРИДРИХА ПАУЛИ

25 апреля 1900	В Вене родился В. Паули
2 июля 1918	Закончил с отличием гимназию в Вене
1918—1921	Учеба в Университете в Мюнхене. Работа у А. Зоммерфельда
1921—1922, *зима*	Геттинген. Ассистент М. Борна
1922, *лето*	Гамбург. Ассистент В. Ленца. Первая встреча с Нильсом Бором в Геттингене
1922—1923	Копенгаген. Работа у Нильса Бора
1923—1926	Гамбург. Ассистент В. Ленца
1926—1928	Гамбург. Профессор Университета
1928—1940	Цюрих. Профессор Высшей технической школы
1934	Женился на Франке Бертран
1940—1946	Принстон. Приглашенный профессор в Институте высших исследований
1945	Присуждена Нобелевская премия
1946—1958	Возвращение в Цюрих. Профессор Высшей технической школы
15 декабря 1958	В Цюрихе умер В. Паули

БИБЛИОГРАФИЯ НАУЧНЫХ ТРУДОВ В. ПАУЛИ*

1. Монографии. Статьи. Доклады и сообщения на конференциях

1919

1. Uber die Energie-Komponenten des Gravitationsfeldes.— Phys. Z., 1919, **20**, 25—27.
2. Zur Theorie der Gravitation und der Elektrizität von Hermann Weyl.— Phys. Z., 1919, **20**, 457—467.
3. Mercurperihelbewegung und Strahlenablenkung in Weyls Gravitationstheorie.— Verhandl. Deutsch. phys. Ges., 1919, **21**, 741—750.

1920

4. Theoretische Bemerkungen über den Diamagnetismus einatomiger Gase.— Z. Phys., 1920, **2**, 201—205. Русск. пер: ПI, с. 570—574.
5. Die Ausbreitung des Lichtes in bewegten Medien.— Math. Ann., 1920, **82**, 113—119.
6. Quantentheorie und Magneton.— Phys. Z., 1920, **21**, 615—617.

1921

7. Zur Theorie der Dielektrizitätskonstante zweiatomiger Dipolgase.— Z. Phys., 1921, **6**, 319—327.
8. Relativitätstheorie.— In: Encyclopädie der math. Wissenschaften, Bd. 5, T. 2. Leipzig, 1921, S. 539—775.

   См. также отдельное издание: *W. Pauli.* Relativitätstheorie. Leipzig, 1921. Русск. пер.: *В. Паули.* Теория относительности. М.—Л., Гостехиздат, 1947. Англ. издание с дополнительными замечаниями автора: *W. Pauli.* Theory of Relativity. London, 1958.

   Итал. пер.: *W. Pauli.* Theoria della relatività. Torino, 1958.

1922

9. (M. Born, W. Pauli.) Uber die Quantelung gestorter mechanischer Systeme.— Z. Phys., 1922, **10**, 137—158. Русск. пер.: ПI, с. 575—595.
10. Uber das Modell des Wasserstoffmolekülions.— Ann. Phys., 1922, (4), 68, 177—240. (Расширенный вариант мюнхенской диссертации автора).

1923

11. (H. A. Kramers, W. Pauli.) Zur Theorie der Bandenspektren.— Z. Phys., 1923, **13**, 351—367. Русск. пер.: ПI, с. 596—610.
12. Uber die Gesetzmässigkeiten des anomalen Zeemaneffektes.— Z. Phys., 1923, **16**, 155—164. Русск. пер.: ПI, с. 611—620.
13. Uber das thermische Gleichgewicht zwischen Strahlung und freien Elektronen.— Z. Phys., 1923, **18**, 272—286. Русск. пер.: ПI, с. 621—633.

---

* В основу положена библиография, составленная Ш. Энцем и опубликованная в книге «Theoretical Physics in the twentieth century. A memorial volume to Wolfgang Pauli». Cambridge, USA, 1960 (русск. пер.: Теоретическая физика XX века. М., ИЛ, 1962) и в книге «Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie». Vieweg, Braunschweig. Все работы Паули собраны в двухтомном издании «Collected Scientific Papers by W. Pauli». N. Y.— London — Sydney, Intersc. Publish., 1964.

В ссылках на русские переводы работ Паули книга: *В. Паули.* Труды по квантовой теории. М., «Наука», 1975, в данной библиографии цитируется как ПI, а настоящее издание — как ПII.

1924

14. Zur Frage der Zuordnung der Komplexstrukturterme in starken und in schwachen äusseren Feldern.— Z. Phys., 1924, **20**, 371—387.
15. Bemerkungen zu den Arbeiten «Die Dimension der Einsteinschen Lichtquanten» und «Zur Dynamik des Stosses zwischen einem Lichtquant und einem Elektron» von L. S. Ornstein und H. C. Burger.— Z. Phys., 1924, **22**, 261—265.
16. Zur Frage der theoretischen Deutung der Satelliten einiger Spektrallinien und ihrer Beeinflussung durch magnetische Felder.— Naturwissenschaften, 1924, **12**, 741—743.
17. Störungstheorie.— In: «Physikalisches Handwörterbuch». A. Berliner, K. Scheel (Hrsg.). Berlin, Springer-Verlag, 1924, S. 752—736. Русск. пер. в кн.: *В. Паули*. Физические очеркп. М., «Наука», 1975, с. 86—97.

1925

18. Uber den Einfluss der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt.— Z. Phys., 1925, **31**, 373—385. Русск. пер.: ПI, с. 634—644.
19. Uber den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur des Spektren.— Z. Phys., 1925, **31**, 765—783. Русск. пер.: ПI, с. 645—660.
20. Uber die Intensitäten der im elektrischen Feld erscheinenden Kombinationslinien.— Kgl. Danske vid. selskab. Mat.-fys. medd., 1925, 7, 3—20.
21. Uber die Absorption der Reststrahlen in Kristallen.— Verhandl. Deutsch. phys. Ges., 1925, (3), 6, 10—11.

1926

22. Quantentheorie.— In: Handbuch der Physik, Bd. 23. Berlin, 1926, S. 1—278. Русск. пер.: ПI, с. 7—351.
23. Uber das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik.— Z. Phys., 1926, **36**, 336—363.
24. (L. Mensing, W. Pauli.) Uber die Dielektrizitätskonstante von Dipolgasen nach der Quantenmechanik.— Phys. Z., 1926, **27**, 509—512.

1927

25. Uber Gasentartung und Paramagnetismus.— Z. Phys., 1927, **41**, 81—102.
26. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons.— Z. Phys., 1927, **43**, 601—623.
27. (W. Baade, W. Pauli). Uber den auf die Teilchen in den Kometischweifen ausgeübten Strahlungsdruck.— Naturwissenschafften, 1927, **15**, 49—50.

1928

28. Выступления в дискуссии на V Сольвеевском конгрессе.— В кн.: Cinquième Conseil de Physique Solvay, Electrons et Photons, Bruxelles, 1927. Paris, 1928, p. 46, 95—98, 134—135, 256—258, 276—277, 280—282, 286.
29. Uber das *H*-Theorem von Anwachsen der Entropie vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik.— In: Probleme der modernen Physik, Arnold Sommerfeld zum 60. Geburtstage, gewidmet von seinen Schülern. Leipzig, 1928, S. 30—45. Русск. пер.: ПI, с. 661—679.
30. (P. Jordan, W. Pauli.) Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder.—Z. Phys., 1928, **47**, 151—173. Русск. пер.: ПII, с. 7—29.

1929

31. Theorie der schwarzen Strahlung.— In: Müller-Pouillets Lehrbuch, Bd. 2, T. 2. 11. Aufl. Braunschweig, 1929, Kap. 27, S. 1483—1533.

32. Allgemeine Grundlagen der Quantentheorie des Atombaues.— In: Müller-Pouillets Lehrbuch, Bd. 2, T. 2. 11. Aufl. Braunschweig, 1929, Kap. 29, S. 1709—1842.
33. (W. Heisenberg, W. Pauli.) Zur Quantendynamik der Wellenfelder.— Z. Phys., 1929, 56, 1—61. Русск. пер.: ПII, с. 30—88.

1930

34. (W. Heisenberg, W. Pauli.) Zur Quantendynamik der Wellenfelder. II.— Z. Phys., 1930, 59, 168—190. Русск. пер.: ПII, с. 89—110.

1931

35. (P. Güttinger, W. Pauli.) Zur Hyperfeinstruktur von Li+.— Z. Phys., 1931, **67**, 743—765.

1932

36. Diracs Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik.— Helv. phys. acta, 1932, **5**, 179—199. Русск. пер.: ПII, с. 111—130.
37. Les théories quantiques du magnétisme. L'électron magnétique.— In: Sixième Conseil de Physique Solvay, Le Magnétisme, Bruxelles, 1930. Paris, 1932, p. 175—238. Русск. пер.: ПII, с. 131—181.
Выступление в дискуссии на VI Сольвеевском конгрессе.— loc. cit., p. 74, 240—242, 244, 269, 272, 275, 276.
38. (W. Pauli, J. Solomon.) La théorie unitare d'Einstein et Mayer et les équations de Dirac, I, II.— J. phys. et radium, 1932, (7), **3**, 452—463, 582—589.

1933

39. Die allgemeinen Prinzipen der Wellenmechanik.— In: Handbuch der Physik, Bd. 24, T. 1, 2 Aufl. Berlin, 1933, S. 82—272. Русск. пер.: *В. Паули.* Общие принципы волновой механики. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
Переработанное издание.— In: Handbuch der Physik, Bd. 5, T. 1, 3. Aufl., Berlin, 1958, S. 1—168. Русск. пер.: ПI, с. 352—569.
40. Einige die Quantenmechanik betreffenden Erkundigungsfragen.— Z. Phys., 1933, **80**, 573—586. Русск. пер.: ПII, с. 182—193.
41. Uber die Intensität der Streustrahlung bewegter freier Elektronen.— Helv. phys. acta, 1933, **6**, 279—286.
42. Uber die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogenen Koordinaten. Teil I. Klassische Theorie. Teil II. Die Dirac'schen Gleichungen für die Materiewellen.— Ann. Phys., 1933, (5) **18**, 305—336, 337—372.
43. Paul Ehrenfest.— Naturwissenschaften, 1933, **21**, 841—843. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 213—219.

1934

44. Выступления в дискуссии на VII Сольвеевском конгрессе (гипотеза нейтрино).— In: «Septième Conseil de Physique Solvay, Noyaux Atomiques, Bruxelles, 1933». Paris, 1934, p. 175, 180, 213—214, 215, 324—325.
45. (W. Pauli, V. Weisskopf.) Uber die Quantizierung der skalaren relativistischen Wellengleichung.— Helv. phys. acta, 1934, **7**, 709—731. Русск. пер.: ПII, с. 194—214.

1935

46. Beiträge zur mathematischen Theorie der Dirac'schen Matrizen.— In: *P. Zeeman.* Verhandeling, M. Nighoff, Haag, 1935, S. 31—43.

1936

47. Raum, Zeit und Kausaltät in der modernen Physik.— Scientia (Milan), 1936, **59**, 65—76. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 7—20.
48. (W. Pauli, M. E. Rose.) Remarks on the Polarization Effects in the Positron Theory.— Phys. Rev., 1936, **49**, 462—465. Русск. пер.: ПII, с. 215—221.
49. Contributions mathematiques à la théorie des matrices de Dirac.— Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, **6**, 109—136. Русск. пер.: ПII, с. 222—243.
50. Théorie quantique relativiste des particules obéissant à la statistique de Einstein — Bose.— Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, **6**, 137—152. Русск. пер.: ПII, с. 244—256.

1937

51. (W. Pauli, M. Fierz.) Uber das *H*-Theorem in der Quantenmechanik.— Z. Phys., 1937, **106**, 572—587. Русск. пер.: ПII, с. 257—273.

1938

52. (W. Pauli, M. Fierz.) Zur Theorie der Emission langwelliger Lichtquanten.— Nuovo cimento, 1938, **15**, 167—188. Русск. пер.: ПII, с. 274—293.
53. On Asymptotic Series for Functions in the Theory of Diffraction of Light.— Phys. Rev., 1938, **54**, 924—931.
54. Некоторые принципиальные замечания относительно теории β-распада.— Изв. АН СССР, серия мат. и естеств. наук, 1938, 149—152.

1939

55. Uber die Kriterium für Ein- oder Zweiwertigkeit der Eigenfunktionen in der Wellenmechanik.— Helv. phys. acta, 1939, **12**, 147—168. Русск. пер.: ПII, с. 294—314.
56. (W. Pauli, M. Fierz.) Uber relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld.— Helv. phys. acta, 1939, **12**, 297—300. Русск. пер.: ПII, с. 315—317.
57. (M. Fierz, W. Pauli.) On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field.— Proc. Roy. Soc. London, 1939, **A173**, 211—232. Русск. пер.: ПII, с. 318—338.

1940

58. (W. Pauli, F. J. Belinfante.) On the Statistical Behaviour of Known and Unknown Elementary Particles.— Physica, 1940, **7**, 177—192. Русск. пер.: ПII, с. 339—353.
59. The Connection between Spin and Statistics.— Phys. Rev., 1940, **58**, 716—722. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Релятивистская теория элементарных частиц, М., ИЛ, 1947, с. 72—83 (с некоторыми сокращениями). См. также ПII, с. 354—366.
60. Uber die Invarinz der Dirac'schen Wellengleichungen gegenüber Ahnlichkeitstransformationen des Linienelementes im Fall verschwindender Ruhmasse.— Helv. phys. acta, 1940, **13**, 204—208. Русск. пер.: ПII, с. 367—371.

1941

61. Relativistic Field Theories of Elementary Particles.— Rev. Mod. Phys., 1941, **13**, 203—232. Русск. пер.: *В. Паули.* Релятивистская теория элементарных частиц. М., 1947. См. также ПII, с. 372—423.

1942

62. (W. Pauli, S. M. Dancoff.) The Pseudoscalar Meson Field with Strong Coupling.— Phys. Rev., 1942, **62**, 85—108. Русск. пер.: ПII, с. 424—466.

1943

63. On Strong-coupling and Weak-coupling Theories of the Meson Field.— Phys. Rev., 1943, **63**, 221 (A).
64. (W. Pauli, S. Kusaka.) On the Theory of a Mixed Pseudoscalar and a Vector Meson Field.— Phys. Rev., 1943, **63**, 400—416. Русск. пер.: ПII, с. 467—497.
65. (A. Einstein, W. Pauli.) On the Non-Existence of Regular Stationary Solutions of Relativistic Field Equations.— Ann. Math., 1943, **44**, 131—137. Русск. пер. в кн.: *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. 2. М., «Наука», 1966, с. 560—567.
66. On Dirac's New Method of Field Quantization.— Rev. Mod. Phys., 1943, **15**, 175—207. Русск. пер.: ПII, с. 498—545.
67. On Applications of the λ-Limiting Process to the Theory of the Meson Field.— Phys. Rev., 1943, **64**, 332—344. Русск. пер.: ПII, с. 546—566.

1944

68. (W. Pauli, J. M. Jauch.) On the Application of Dirac's Method of Field-Quantization to the Problem of Emission of Low Frequency Photons.— Phys. Rev., 1944, **65**, 255—256.

1945

69. Niels Bohr on His 60th Birthday.— Rev. Mod. Phys., 1945, **17**, 97—101. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 238—247.
70. (W. Pauli, N. Hu.) On the Strong Coupling Case for Spin-Dependent Interactions in Scalar- und Vector-Pair Theories.— Rev. Mod. Phys., 1945, **17**, 267—286.

1946

71. Remarks on the History of the Exclusion Principle.— Science, 1946, **103**, 213—215. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 98—103.
72. Diracs Feldquantisierung und Emission vor Photonen kleiner Frequenz.— Helv. phys. acta, 1946, **19**, 234—237.
73. Meson Theory of Nuclear Forces. N. Y., Intersci. Publ., Inc., 1946. Русск. пер.: *В. Паули.* Мезонная теория ядерных сил. М., ИЛ, 1947. Второе американское издание вышло в 1948 г.

1947

74. Exclusion Principle and Quantum Mechanics. Neuchâtel 1947; Prix Nobel 1946 131—147, Stockholm, 1948. (Нобелевская лекция, прочитанная 13 декабря 1946 г.). Русск. пер. в кн.: Теоретическая физика XX века. М., ИЛ, 1962, с. 357—375, а также в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 65—86.
75. Difficulties of Field Theories and of Field Quantization.— Phys. Soc. Cambridge Conf. Rept, 1947, p. 5—10. Русск. пер.: ПII, с. 567—573.

1948

76. Der Einflüss archetypischer Vorstellungen auf die Bildung naturwissenschaftliche Theorien bei Kepler.— Psychologischer Club, Zurich, Jahresbericht, 1947/48, S. 37—44. См. также в кн.: Naturerklärung und Psyche. Zürich, Rascher Verlag, 1952, p. 109—194; The Interpretation of Nature and the Psyche. N. Y.— London, 1955. Русск. пер. с некоторыми сокращениями в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 137—175.
77. Sommerfelds Beiträge zur Quantentheorie.— Naturwissenschaften, 1948, **35**, 129—132. Русск. пер. в кн: *В. Паули.* Физические очерки, с. 219—230.
78. Editorial (On the Concept of Complementarity).— Dialectica, 1948, **2**, 307—311. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 50—56.

1949

79. Note after the Conference of Prof. Born (On the Foundation of Quantum Statistics).— Nuovo cimento, 1949, 6, Suppl., 166—169. Русск. пер.: ПІІ, с. 574—577.
80. (W. Pauli, F. Villars.) On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory.— Rev. Mod. Phys., 1949, **21**, 434—444. Русск. пер. в кн.: Сдвиг уровней атомных электронов. М., ИЛ, 1951, с. 139—163; см. также ПІІ, с. 578—601.
81. Einstein's Contribution to Quantum Theory.— In: Albert Einstein, Philosopher-Scientist. Vol. VII, Library of Living Philosophers, 1949, p. 149—160. (Англ. пер.). Einstein's Beitrag zur Quantentheorie.— In: Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher. Stuttgart, 1955, S. 74—83. (Оригинальный немецкий вариант).
Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 202—212.

1950

82. Communication.— In: Huitième Conseil de Physique Solvay. Les particules élémentaires. Bruxelles, 1948. Bruxelles, 1950, p. 287—289. Duscussions, p. 193, 284.
83. On the Connection between Spin and Statistics.— Progr. Theor. Phys., 1950, 5, 526—543. Русск. пер.: ПІІ, с. 602—619.
84. Die philosophische Bedeutung der Idee der Komplementarität.— Experimentia, 1950, 6, 72—81. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 56—65.
85. Préface.— In: *H. Schilt.* Précis de physique générale. III. Electricité. Bibliothèque scientifique, v. 18, Neuchâtel, 1950.
86. Etat actuel de la théorie quantique des champs. Le rénormalisation.— In: Particules foundamentales et noyaux. Paris, 1950. См. также Colloques intern. Centre nat. Recherche Sci., 1953, 38, 67—77. Русск. пер.: ПІІ, с. 620—626.

1951

87. Arnold Sommerfeld.— Z. Naturforsch., 1951, **6a**, 468. (Более короткий вариант см.: Z. angew. Math. Phys., 1951, **2**, 301). Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 230—232.

1952

88. Die Geschichte des periodischen Systems der Elemente.—Vierteljahreschr. naturforsch. Ges. Zürich, 1952, **97**, 137—139. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 132—136.
89. Theorie und Experiment.— Dialectica, 1952, **6**, 141—142. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 41—43.

1953

90. Remarques sur le problème des paramètres cachés dans la mécanique quantique et sur la théorie de l'onde pilote.— In: L. de Broglie Physicien et Penseur, A. George, A. Michel. Paris, 1953, p. 33—42. Русск. пер.: ПІІ, с. 627—633.
91. On the Hamiltonian Structure of Non-Local Field Theories.— Nuovo cimento, 1953, **10**, 648—567.
92. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit und seine Rolle in den Naturwissenschaften.— Verlandl. Schweiz. naturforsch. Ges., Bern, 1952, 1953, 76—79.

1954

93. Wahrscheinlichkeit und Physik.— Dialectica 1954, **8**, 112—124. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 43—50.
94. Naturwissenschaftliche und erkenntnistheoretische Aspekte der Ideen vom Unbewussten.— Dialectica, 1954, **8**, 283—301.

95. Matter.— In: Man's Right to Knowledge. International Symposium Presented in Honour of the Two — Hundredth Anniversary of Columbia University, 1754—1954. N. Y., H. Muschel, 1954, p. 10—18. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 31—41.

1955

96. Rydberg and the Periodic System of the Elements.— Proc. Rydberg Centennial Conf. Atomic Spectroscopy, Lund, 1954, Lund, 1955, p. 22—26. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 233—238.
97. Выступление в дискуссии на X Сольвеевском конгрессе.— In: Dixième Conseil de Physique Solvay, Les électrons dans les métaux. Bruxelles, 1954. Bruxelles, 1955, p. 282.
98. Impression über Albert Einstein.— Neue Zürich. Zeitung, N 1055, Aug. 22, 1955. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 176—179.
99. Exclusion Principle, Lorentz Group and Reflection of Space-Time and Charge.— In: Niels Bohr and the Development of Physics. W. Pauli (Ed.). London, Pergamon Press, 1955, p. 30—51. (См. также Physik und Erkenntnistheorie, Braunschweig, 1960). Русск. пер. в кн.: Нильс Бор и развитие физики. М., ИЛ, 1958, с. 46—74; см. также ПII, с. 634—655.
100. (G. Källén, W. Pauli.) On the Mathematical Structure of T. D. Lee's Model of a Renormalizable Field Theory.— Kgl. Danske vid. selskab. Mat.-Fys. medd., 1955, **30**, 3—23.

1956

101. Remarks on Problems Connected with the Renormalization of Quantized Fields.— Nuovo cimento, 1956, (10) 4, Suppl., 703—710.
102. Die Wissenschaft und das abendländische Denken.— In: Europa — Erde und Aufgabe, Internationaler Gelehrtenkongress, Mainz, 1955. Wiesbaden, S. Steiner Verlag, 1956, S. 71—79; перепечатана в журнале Schweiz. Bauzeitung., 1959, **77**, H. 1, 1—4.
103. Opening Talk; Schlusswort durch den Präsidenten der Konferenz.—In: Fünfzig Jahre Relativitätstheorie, Bern, 1955; Helv. Phys. acta, 1956, Suppl. 4, 27, 261—267. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 186—187, 194—202.
104. Relativitätstheorie und Wissenschaft.— In: Fünfzig Jahre Relativitätstheorie. Bern, 1955; Helv. phys. acta, 1956, Suppl., 4, 282—286. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 187—193.
105. Announcement.— Proc. CERN Symp. High Energy Accelerators Pion Phys. Geneva, 1956, v. 2, p. 259. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 248.

1957

106. Zur älteren und neueren Geschichte des Neutrinos.—Vierteljahresschr. naturforsch. Ges. Zürich, 1957, **102**, 387—388 (автореферат доклада 21 января 1957 г. в Цюрихе); *W. Pauli.* Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie. Braunschweig, 1961, S. 156—180. Русск. пер. в кн.: Теоретическая физика XX века. М., 1962, с. 386—412 и в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 104—132.
107. On the Conservation of the Lepton Charge.— Nuovo cimento, 1957, **6**, 204—215. Русск. пер.: ПII, с. 656—665.
108. Phänomen und physikalische Realität.— Dialectica, 1957, **11**, 36—48. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 21—31.

1958

109. Supplementary Notes by the Author.— In: *W. Pauli.* Theory of Relativity. N. Y., Pergamon Press, 1958, p. 207—232. Русск. пер. двух наиболее существенных дополнений см. в кн.: Теоретическая физика XX века. М., 1962, с. 413—431.

110. Albert Einstein in der Entwicklung der Physik.— Neue Züricher Zeitung, N 89, Jan. 12, 1958; Universitas, 1958, **13**, 593—598. Русск. пер. в кн.: *В. Паули.* Физические очерки, с. 180—186.
111. Die Verletzung von Spiegelungs-Symmetrien in der Gessetzen der Atomphysik.— Experimentia, 1958, **14**, 1—5; *W. Pauli.* Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie. Braunschweig, 1961. Русск. пер. в кн.: Теоретическая физика XX века. М., 1962, с. 376—385.
112. Zur Thermodynamik dissoziierter Gleichgewichtsgemische in äusseren Kraftfeldern.— In: Festschrift Jakob Ackeret. Z. angew. Math. Phys., 1958, **9b**, 940—497.
113. The Indefinite Metric with Complex Roots.— Proc. Annual Internat. Conf. High Energy Phys. CERN, Geneva, 1958, p. 127—128. Русск. пер.: ПІІ, с. 666—668.

1959

114. (W. Pauli, B. Touschek). Report and Comment on F. Gürsey's «Group Structure of Elementary Particles».— Nuovo cimento, 1959, **14**, 205—211.

2. Рецензии на книги

1. E. Buchwald. Das Korrespondenzprinpiz.— Naturwissenschaften, 1924, **12**, 36—37.
2. E. P. Adams. The Quantum Theory, 2nd ed.— Naturwissenschaften, 1924, **12**, 412—413.
3. M. Born. Vorlesungen über Atommechanik, 1. Teil.— Naturwissenschaften, 1925, **13**, 487—488.
4. A. S. Eddington. Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung.— Naturwissenschaften, 1926, **14**, 273—274.
5. Ergebnisse der Exackten Naturwissenschaften, 7. Band.— Naturwissenschaften, 1929, **17**, 257—259.
6. H. A. Lorentz. Vorlesungen über theoretische Physik, Band II/III; IV.— Naturwissenschaften, 1929, **17**, 279.
7. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, 8. Band.— Naturwissenschaften, 1930, **18**, 568, 570.
8. M. Born, P. Jordan. Elementare Quantenmechanik.— Naturwissenschaften, 1930, **18**, 602.
9. P. A. M. Dirac. The Principles of Quantum Mechanics.— Naturwissenschaften, 1931, **19**, 188.
10. W. Heisenberg. Die physikalischen Prinzipen der Quantentheorie.— Naturwissenschaften, 1931, **19**, 188—189.
11. A. March. Die Grundlagen der Quantenmechanik.— Naturwissenschaften, 1931, **19**, 867.
12. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, 10. Band.— Naturwissenschaften, 1932, **20**, 186—187.
13. G. Gamov. Der Bau des Atomkernes und die Radioaktivität.—Naturwissenschaften, 1932, **20**, 582.
14. J. H. van Vleck. The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities.— Naturwissenschaften, 1933, **21**, 239.
15. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, 11. Band.— Naturwissenschaften, 1933, **21**, 301—302.
16. P. Debye. Kernphysik.— Naturwissenschaften, 1935, **23**, 772—773.
17. H. Reichenbach. Philosophic Foundations of Quantum Mechanics.— Dialectica, 1947, **1**, 176—178.
18. A. Sommerfeld. Vorlesungen über theoretische Physik, Band IV: Optic.— Z. angew. Math. Phys., 1951, **2**, 215.
19. D. ter Haar. Elements of Statistical Mechanics.— Z. angew. Math. Phys., 1956, **7**, 467.

3. Лекции

1. The Theory of the Positron und Related Topics (запись Б. Гофмана). Princeton, IAS, 1936.
2. Statistische Mechanik (обработка М. Шафрота). Zürich, ETH, 1947.
3. Optik und Elektrontheorie (обработка А. Шайдеггера, 2-е изд.— П. Эрдеша). Zürich, ETH, 1948, 1957.
4. Elektrodynamik (обработка А. Теллунга). Zürich, ETH, 1949.
5. Ausgewählte Kapitel aus der Feldquantisierung (обработка У. Хохштрассера и М. Шафрота). Zürich, ETH, 1951.
6. Thermodynamik und kinetische Gastheorie (обработка Э. Юккера). Zürich, ETH, 1952.
7. Continuous Groups in Quantum Mechanics (запись А. Эдмондса). CERN-Report, N 31, Genève, 1956.
8. Continuous Groups and Reflections in Quantum Mechanics (запись Р. Риделла, мл.). UCRL-Report N 8213, Berkeley, 1958.
9. Wellenmechanik (обработка Ф. Герлаха и Г. Кнепфеля). Zürich, EHT, 1959.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адлер Ф. 425
Айзенбуд (Eisenbud L.) 650, 655
Акулов Н. С. 161
Асколи 668

Баба́ (Bhabha H.) 419, 425, 426, 547, 555, 557
Баргман (Bargmann V.) 368
Барнет 151
Батдорф (Batdorf S.) 420, 422
Беккер (Becker R.) 161
Беккерель (Becquerel J.) 162, 164, 165
Белинфанте (Belinfante F.) 339, 353, 354, 376, 417
Бете (Bethe H.) 165, 210, 212, 493, 494
Бечер (Becher R. F.) 493, 494
Биденхарн (Biedenharn L.) 655
Блох (Bloch F.) 149, 150, 155, 157, 161, 275—277
Больцман 574, 575
Бом (Bohm D.) 628, 632, 633
Бор (Bohr N.) 112, 114, 130, 138, 139, 165, 166, 169, 186, 289, 499, 621, 626, 628, 634, 670, 672, 673, 677, 678
Борн (Born M.) 7, 574, 575, 673, 675
Боровитц (Borowitz S.) 624
Боте (Bothe W.) 672
Брейт (Breit G.) 104
Бриллюэн (Brillouin L.) 112, 166
Бронштейн М. 32
Бут (Booth F.) 413, 420
Бутенант А. 632

Вайскопф (Weisskopf V. F.) 5, 194, 244, 256, 384, 516, 539, 540, 567, 572, 580, 601, 677
Валлер (Waller I.) 535
Ван-дер-Варден (van der Waerden B.) 222, 228, 336, 355, 671, 672, 674
Ван-Дунген (van Dungen H.) 674
Ван-Флек 131
Васко да Гама 679
Ватанабе (Watanabe S.) 636, 655
Вейль (Weyl H.) 89, 91, 94, 305, 367, 376, 675, 677
Вейсс (Weiss P.) 133, 152, 154, 160
Вейцзекер (Weizsäcker C. F.) 421
Вентцель (Wentzel G.) 83, 112, 495, 523, 546, 547, 578, 581, 593—595, 671
Вет, де (de Wet J. S.) 362
Вигнер (Wigner E.) 7, 8, 31, 75, 108, 110, 188, 365, 408, 572, 634, 636, 641, 650, 655, 675
Вижье (Vigier J.-P.) 629
Вилларс (Villars F.) 578, 623, 624, 676, 677
Вильсон А. (Wilson A. H.) 413, 420, 495, 572
Ву (Wu C. S.) 677

Гааз, де (de Haas W. J.) 162, 165
Гайтлер (Heitler W.) 132, 148, 150, 210, 212, 290, 293, 422, 425, 426, 448, 459, 495, 557, 572, 573
Гамов 87
Гаудсмит (Goudsmit S.) 672
Гейгер (Geiger) 672
Гейзенберг (Heisenberg W.) 7, 30, 89, 131, 150, 151, 154, 155, 195, 197, 198, 209, 215, 217, 220, 221, 408—411, 425, 426, 568—570, 572, 607, 621, 628, 636, 655, 666—668, 669, 671—675
Гелл-Манн (Gell-Mann M.) 654
Герни 87
Гиббс 259, 262, 574, 575
Гильберт (Hilbert D.) 376
Глезер 666, 668
Гордон (Gordon W.) 177, 198, 597, 674
Грин 595
Гроот, де (de Groot S.) 655

Дайсон (Dyson F.) 578, 581, 582, 601, 612, 623
Данков (Dancoff S. M.) 424, 467, 468, 548, 552
Дарвин (Darwin C. G.) 163, 177
Даффин (Duffin R. J.) 413, 416
Де Бройль Л. (de Broglie L.) 134, 188, 223, 237, 239, 356, 416, 627—630, 674
Дельбрюк (Delbrück M.) 257, 258
Детуш (Destouches J. L.) 632
Детуш-Февриe (Destouches-Fevrier P.) 632
Дирак (Dirac P. A. M.) 7, 30, 31, 32, 55, 75, 83, 88, 89, 108, 129, 133, 143, 159, 172, 181, 195—198, 214, 244, 252, 256, 282, 303, 318, 362, 363, 385, 387, 397, 401, 403, 407, 408, 413, 414, 495, 498, 499, 511, 514, 524, 532, 542—544, 546,

547, 566, 567, 570, 602, 610, 634. 635, 671, 673, 675
Дондер, де (de Donder Th.) 674
Дорфман Я. Г. 161
Дэвис (Davis R.) 656

Жэньо (Gehenian J.) 416

Заутер (Sauter F.) 129
Зоммерфельд А. 131, 163, 258, 669, 670, 679

Изинг (Ising E.) 159
Иордан (Jordan P.) 7, 8, 23, 31, 58, 60, 61, 62, 68, 75, 81, 108, 110, 187, 362, 365, 385, 408, 673—675
Йост (Jost R.) 619, 625, 626, 654, 655
Иттман (Ittmann G.) 127

Камефучи (Kamefuchi S.) 637, 655
Камоэнс Л. 679
Капица П. Л. 161
Кейз (Case K. M.) 582, 663
Кеммер (Kemmer N.) 400, 413, 416. 459, 557, 558
Кикоин И. К. 161
Киношита (Kinoshita T.) 620
Клейн (Klein O.) 7, 23, 31, 32, 60, 68, 81, 108, 115, 124, 180, 187, 420, 574, 674
Клейн Ф. 670
Кнауэр (Knauer F.) 169
Кон (Kohn W.) 624
Кондон 87
Корбен (Corben H.) 418—420, 425
Крамерс (Kramers H. A.) 113, 126, 127, 162, 164, 165, 342, 353, 406, 410, 672
Кристи (Christy H.) 422, 424
Крониг (Kronig R.) 5
Кудар (Kudar J.) 674
Кусака (Kusaka S.) 422, 424, 467, 546

Ладенбург (Ladenburg R.) 163
Ландау Л. Д. 140, 189, 376, 421, 423, 677
Ланде (Lande A.) 177, 178
Ланжевен 154
Лаплас 673
Лапорт (Laporte O.) 338, 418
Ледерман 677
Ленц (Lenz W.) 169, 673
Ли (Lee T.-D.) 635, 655, 663, 677
Лифшиц Е. М. 376
Лондон (London F.) 132, 148
Лоренц Г. (Lorentz H. A.) 138, 139
Людерс (Lüders G.) 637. 638, 653—655, 678
Люттингер (Luttinger J.) 582

Ма (Ma S. T.) 425, 448, 591, 601
Маджид, Ахмад ибн 679
Майорана (Majorana E.) 333, 410, 647, 663
Макленнан 663
Максвелл 31, 568
Мёглих (Möglich F.) 31, 295
Мёллер (Møller Ch.) 417—419, 467, 480, 547, 548, 570
Мехра (Mehra J.) 671, 673
Ми (Mie G.) 31, 35
Минарди 668
Минесава 625
Минковский Р. (Minkowski R.) 163
Мишель (Michel L.) 646, 650, 655
Мольер (Moliere G.) 257, 258
Мотт (Mott N. F.) 167, 178, 179
Мэсси (Massey H.) 418, 419

Намбу (Namby Y.) 620
Нейман, фон (von Neumann J.) 95, 257, 258, 262—265, 268, 273, 575, 576, 630, 632, 675
Нельсон (Nelson E.) 424
Нишина (Nishina Y.) 420
Нордсик (Nordsieck A.) 275—277
Ньютон 673, 675
Ньютон Т. (Newton T.) 655

Оппенгеймер (Oppenheimer R.) 105, 111, 419, 421, 423, 424, 426, 427, 475, 552, 556

Пайерлс (Peierls R.) 189, 191, 197, 671
Пайс (Pais A.) 579, 683, 624
Паркер 620
Парси (Pursey D. L.) 660
Патри (Patry J.) 547
Паули В., старший 669
Паули Ф. 6
Пенг (Peng H. W.) 557
Планк 669
Подольский Б. 524
Прока (Proca A.) 390, 399

Радемахер (Rademacher H.) 494
Райский (Rayski G.) 580, 581, 601, 625
Райхе (Reiche F.) 494
Рака́ (Racah G.) 403, 410, 417
Раман Ч. 632
Резерфорд Э. 672, 673
Ривье (Rivier D.) 580, 582, 601, 603
Ридберг 672
Розенфельд (Rosenfeld L.) 163, 289, 467, 480, 547, 548, 621, 626
Рорлих (Rohrlich F.) 620
Росселанд (Rosseland S.) 87

Роуз (Rose M.) 215, 591, 655
Рупп (Rupp E.) 179

Сакаи Такуро 258
Саката (Sakata S.) 624
Салам (Salam A.) 677
Свинне (Swinne R.) 160
Сербер (Serber R.) 215, 217, 219, 220, 419, 421, 423, 424, 468, 475, 548
Серпе (Serpe J.) 663
Слетер (Slater J.) 143, 155, 160, 672
Смородинский Я. А. 420, 421, 669
Снайдер (Snyder H.) 419, 421, 423

Тамм И. Е. 418, 420
Танака (Tanaka S.) 637, 655
Таникава (Tanikawa Y.) 424
Телегди 677
Теллер (Teller E.) 158
Тетроде (Tetrode H.) 31, 64
Тирринг (Thirring W.) 655, 671
Толхук (Tolhoek H.) 655
Томас Р. (Thomas R.) 420, 422
Томонага (Tomonaga S.) 578, 622
Тушек (Touschek B.) 663, 665

Уайтман (Whiteman) 646
Уилер (Wheeler J. A.) 568
Уленбек (Uhlenbeck G.) 338, 672
Умедзава (Umezawa H.) 580, 637, 655

Фаулер (Fowler R.) 161
Фейнман (Feynman R.) 580—582, 596, 597, 603, 613, 614, 639, 652
Ферми (Fermi E.) 92, 237, 401, 516, 675
Фирц (Fierz M.) 6, 257, 274, 315, 318, 356, 357, 362, 366, 494, 575, 663, 671, 676
Фок В. А. 91, 524, 674
Френкель Я. И. 163
Френч (French J. B.) 580
Фрёлих (Fröhlich H.) 459
Фруассар 668
Фюс (Fues E.) 177, 179

Хаантьес 231
Хеелман (Hellmann H.) 177, 179
Хунд (Hund) 163
Хюльтен (Hulthen L.) 490

Цван (Zwaan A.) 127

Чейз (Chase C. T.) 179
Челлен (Källen G.) 635, 655, 668

Швингер (Schwinger J.) 418, 419, 426, 427, 449, 463, 467, 480, 552, 556, 578, 579, 581, 583, 588, 596, 600, 601, 604, 614, 621—625, 634, 636, 638, 639, 641, 647, 655
Шиллер 634
Шредингер (Schrödinger E.) 9, 31, 105, 129, 139, 190, 192, 250, 295, 297—299, 303, 305, 311, 368, 674
Штюкельберг (Stückolberg E. C.) 397, 547, 548, 561, 562, 565, 566, 570, 580, 592, 601
Шумовский Т. А. 679
Шур (Schur J.) 222, 228
Шутт (Schutt R. P.) 425

Эддингтон (Eddington A. S.) 31, 295
Эйнштейн (Einstein A.) 7, 32, 317, 332, 366, 367, 670
Эккарт (Eckart C.) 674
Эме (Oehme R.) 655, 663, 677
Энц (Enz C.) 658, 671
Эренфест П. (Ehrenfest P.) 182, 188, 189, 192, 257, 258, 261, 574, 575
Эренфест Т. (Ehrenfest T.) 257, 258, 261, 574

Юкава (Yukawa H.) 390, 424, 429, 580
Юлинг (Uehling E.) 315, 220, 221

Ямада (Yamada E.) 580
Янус Р. Л. 161
Янг (Yang C.-N.) 622, 623, 663, 677
Яух (Jauch J. M.) 547, 551

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции 5

1928

К квантовой электродинамике свободных полей *(совместно с П. Иорданом* 7

1929

К квантовой динамике волновых полей *(совместно с В. Гейзенбергом)* 30

1930

К квантовой теории волновых полей. II *(совместно с В. Гейзенбергом* 89

1932

Волновое уравнение Дирака для электрона и геометрическая оптика 112

Квантовые теории магнетизма. Магнитный электрон 131

1933

Некоторые вопросы интерпретации квантовой механики . . 182

1934

О квантовании скалярного релятивистского волнового уравнения *(совместно с В. Вайскопфом* 194

1936

Замечания о поляризационных эффектах в теории позитронов *(совместно с М. Роузом)* 215

К математической теории матриц Дирака 222

Квантовая релятивистская теория частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна 244

1937

По поводу H-теоремы в квантовой механике *(совместно с М. Фирцем)* 257

1938

К теории испускания длинноволновых квантов света *(совместно с М. Фирцем)* 274

1939

О критерии одно- или двузначности собственных функций в волновой механике 294
О релятивистских уравнениях поля для частиц с произвольным спином в электромагнитном поле *(совместно с М. Фирцем)* 315
О релятивистских волновых уравнениях для частиц с произвольным спином в электромагнитном поле *(совместно с М. Фирцем)* 318

1940

О статистических свойствах известных и неизвестных элементарных частиц *(совместно с Ф. Белинфанте)* 339
Связь между спином и статистикой 354
Об инвариантности волновых уравнений Дирака относительно преобразований подобия линейного элемента в случае нулевой массы покоя 367

1941

Релятивистская теория элементарных частиц 372

1942

Псевдоскалярное мезонное поле с сильной связью *(совместно с С. Данковым)* 424

1943

О теории смешанного псевдоскалярного и векторного мезонного поля *(совместно с С. Кусака)* 467
О новом методе Дирака для квантования поля 498
О применении предельного λ-процесса к теории мезонного поля 546

1947

Трудности теорий поля и квантования поля 567

1949

Замечание после конференции проф. Борна 574
Об инвариантной регуляризации в релятивистской квантовой теории *(совместно с Ф. Вилларсом)* 578

1950

О связи между спином и статистикой 602
Современное состояние квантовой теории полей. Перенормировка 620

1953

Замечания к проблеме скрытых параметров в квантовой механике и к теории волны-пилота 627

1955

Принцип запрета, группа Лоренца, отражение пространства-времени и заряда 634

1957

О сохранении лентонного заряда 656

1958

Индефинитная метрика с комплексными корнями 666

ПРИЛОЖЕНИЕ

Паули и квантовая теория *(Я. Смородинский)* 669
Основные даты жизни Вольфганга Эрнста Фридриха Паули 680
Библиография научных трудов В. Паули 681
Именной указатель 690

Вольфганг Паули

ТРУДЫ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Статьи 1928—1958

Утверждено к печати
Редакционной коллегией серии «Классики науки»

Редактор *С. И. Ларин*
Редактор издательства *Ю. Г. Тихомирова*
Художественный редактор *Н. Н. Власик*
Технические редакторы
П. С. Кашина, В. И. Зудина
Корректоры
В. Г. Петрова, П. А. Пирязев, И. А. Талалай

Сдано в набор 27/VII 1976 г.
Подписано к печати 11/I 1977 г.
Формат 70×90[1]/[16], Бумага типографская № 1
Усл. печ. л. 51. Уч.-изд. л. 44,2.
Тираж 4200. Тип. зак. 1036.
Цена 4 р. 95 к.

Издательство «Наука»
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10



W. Pauli

В. ПАУЛИ

ТРУДЫ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

*



4 р. 95 к.